

学 位 審 査 報 告 書

(ふ り が な) 氏 名	えのもと なおや 榎 本 直 也
学位 (専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学位授与の日付	平成 年 月 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理学研究科 数学・数理解析 専攻
(学位論文題目) A QUIVER CONSTRUCTION OF SYMMETRIC CRYSTALS (籓を用いた対称結晶の幾何学的構成について)	
論 文 調 査 委 員	(主査) 柏原 正樹 教授 向井 茂 教授 中島 啓 教授

理 学 研 究 科

(論文内容の要旨)

申請者と Kashiwara は、B 型アフィンヘッケ環の既約表現を記述する組み合わせ論的概念として対称結晶基底を導入した。すなわち、ルート系とその involution に対してある代数 $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ を構成し、その既約表現が(大域)結晶基底を持つ(これを対称結晶基底と呼んだ)ことを予想した。申請者は、本学位論文において、カルタン行列が対称行列となる場合にこの予想を肯定的に解決した。

カルタン行列が対称行列となるルート系には、籐が対応する。籐に involution があたえられると、反対称籐多様体が構成できる。この反対称籐多様体にはある群がはたらいているが、その群作用に対する同変偏屈層のアーベル圏の導来圏の K 群を考える。すると、反対称籐多様体の間の代数的対応をもちいて、 K 群への作用が定義される。申請者は、この作用が代数 $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ の作用となることをまずしめた。こうして、同変偏屈層のアーベル圏の導来圏の K 群が、 $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ の表現空間となる。

一方、既約な同変偏屈層は K 群の基底となる。本学位論文において申請者は、実はこれが既約表現となり、しかも既約な同変偏屈層が大域結晶基底となることを証明した。こうしてカルタン行列が対称行列の場合に対称結晶基底の存在が証明された。

$\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ はパラメータ q をもつが、この q は、籐多様体の幾何においてはコホモロジーの次数に対応する。 $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ の作用の基底に関する行列要素は q のローラン多項式となる。行列要素の q に関する次数の評価により、基底が結晶基底となるための十分条件を与えることができる。さらに、この十分条件は代数的対応に付随した偏屈層の順像のコホモロジーの消滅に翻訳される。申請者は、反対称籐多様体の幾何的性質を調べることにより、アフィン空間上の偏屈層のコホモロジー消滅定理等を援用して順像のコホモロジー消滅を証明した。

この結果は、Lusztig による籐多様体上の同変偏屈層をもちいた量子群の構成と類似の結果ともいえる。Lusztig の証明は内積の評価をもちいた複雑なものであったが、申請者のもちいた証明は基底が結晶基底となるための十分条件を用いる方法で、量子群の構成の場合においても新しい証明を与えており、Lusztig の証明よりはるかに分かりやすい。

(論文審査の結果の要旨)

ヘッケ環は、有限 Chevalley 群の表現論との関わりから生まれたが、それまで扱えなかった種々の対称性を記述する代数として現在ますますその重要性を増している。

この代数はパラメータ q を含み、 $q=1$ の時は古典的なワイル群の群環と一致する。 q が 1 の冪根でないときも、古典的なワイル群の群環と同型となることが知られており、その表現論はよくわかっている。しかし q が 1 の冪根となるときは、その表現論は複雑である。これに関して、1996 年に、Lascoux-Leclerc-Thibon は、 A 型のヘッケ環の既約表現と A 型のアフィン量子群の既約表現の結晶基底が対応することを予想した。この LLT 予想は、その後、Ariki により 1996 年に肯定的に証明された。実際、Ariki は、LLT 予想を大きく一般化し、 q が 1 の n 乗根のとき、 A 型のアフィンヘッケ環の有限次元既約表現と A_{n-1} 型のアフィン量子群の結晶基底が対応することをしめした (LLTA 理論)。しかし、このような記述は、 A 型のアフィンヘッケ環の場合には成功したものの、申請者と Kashiwara が B 型のヘッケ環に対して類似の対応があることを予想するまで、他の型のヘッケ環に対しては全く知られていなかった。

申請者と Kashiwara は、一般に、ルート系とその involution が与えられた時、ある代数 $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ を構成し、その既約表現が結晶基底を持つ (これを対称結晶基底と呼んだ) ことを予想した。さらに、 A 型のアフィンルート系とその involution に対応する対称結晶基底が LLTA 理論における A 型のアフィン量子群の結晶基底の役割を果たし、これが B 型のアフィンヘッケ環の有限次元既約表現を記述するであろうと予想した。

$\mathfrak{sl}_\infty$ の場合には、申請者と Kashiwara により、具体的に結晶基底を構成することにより、対称結晶基底の存在が証明された。しかし対称結晶基底の存在は、一般には未だ予想の段階で未解決である。

申請者は本論文において、カルタン行列が対称行列となる場合に、対称結晶基底の存在を幾何学的方法により証明した。これにより、 B 型アフィンヘッケ環の既約表現を記述する組み合わせ論的手段が準備されたことになる。

未だ、対称結晶基底が B 型アフィンヘッケ環の有限次元既約表現を記述することは証明されていないが、本論文はそれに大きく貢献するものである。

以上の理由で、本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。