

完備離散付値体のガロア・コホモロジー

東大理 加藤和也

§ 1. Introduction.

K を完備離散付値体, F を剰余体とするとき, 遠藤 [1] に述べられているように, K の Brauer 群について次のことが知られている. K_{nr} を K の最大不分岐拡大とし, $Br(K_{nr}/K)$ を Brauer 群 $Br(K)$ から $Br(K_{nr})$ への標準写像の核とし, $X(F)$ を, ガロア群 $Gal(F_S/F)$ (体 k に対し k_S で k の分離閉包をあらわす) から離散群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ への連続準同型全体の群とするとき,

$$(A) \quad Br(K_{nr}/K) \cong Br(F) \oplus X(F)$$

が成立する. F が完全体の場合には $Br(K_{nr}) = 0$ となるので, $Br(K)$ 全体がよくわかることになる. (例えば F が有限体なら, $Br(F) = 0$ 及び $X(F) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ から, 局所類体論における基本的な同型 $Br(K) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が得られる.) しかし, F が標数 p の非完全体である時, $Br(K_{nr}/K)$ は $Br(K)$ の中の小さ

な直和因子にすぎず、残りの部分は、 P 中 *torsion* の元のみからなる、複雑な構造をもったよくわからない群になってしまう。

本稿の主目標は、標数 $P > 0$ の体を剰余体とする標数 0 の完備離散付値体 K に対してガロア・コホモロジー群 $H^q(K, \mathbb{Z}/P\mathbb{Z})$ ($q = 0, 1, 2, \dots$) の構造を決定することであり、(§2 定理 1), $q = 2$ の場合 (1 の P 乗根を P 個含む体 k については $Br(k)_P = \{x \in Br(k) : Px = 0\}$ は $H^2(k, \mathbb{Z}/P\mathbb{Z})$ と同型なので) これから $Br(K)_P$ の構造を知ることができる。また、高次のコホモロジー群における、上の (A) の自然な類似物についても述べる (§3 定理 3)。

§2. $H^q(K, \mathbb{Z}/P\mathbb{Z})$ の構造

この § では、 K は、標数 $P > 0$ の剰余体 F をもつ、標数 0 の完備離散付値体とする。

$H^q(K, \mathbb{Z}/P\mathbb{Z})$ の構造は、より調べやすい、Milnor の K -group $K_q(K)$ の構造をもとに、下記のような、ガロア・コホモロジーと Milnor の K -group の間の (予想されてはいるが立証はされていない) 関係を通じて調べていくしかないように思われる。

一般に k を体とし、 M を $Gal(k_s/k)$ が連続に作用する離散アーベル群とする時、ガロア・コホモロジー群 $H^q(k, M)$ ($q = 0, 1, 2, \dots$)

が, Serre [6] におけるように定義される. 以下 M としては,
 m を k の標数でわれない整数とする時の, k_s 内の 1 の m 乗根
 全体の群 μ_m や, $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 加群としての) テンソル積 $\mu_m^{\otimes r}$
 $= \mu_m \otimes \cdots \otimes \mu_m$ (r 個) に $\text{Gal}(k_s/k)$ が自然に作用しているも
 のを考える. $\mu_m^{\otimes r}$ はアーベル群としては $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ と同型である
 が, 以下, 単に $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ と書けば, $\text{Gal}(k_s/k)$ が trivial に作用し
 ているものとする.

一方, $K_q(k)$ ($q = 0, 1, 2, \dots$) を [5] で定義されている
 Milnor の K -group とする. すなわち, $k^\times$ を k の乗法群 $k - \{0\}$ と
 して, $K_q(k) = (\underbrace{k^\times \otimes \cdots \otimes k^\times}_{q \text{ 個}}) / J$, ここに J は $x_1 \otimes \cdots \otimes x_q$ で
 ある相異なる i, j について, $x_i + x_j = 1$ となるものから生成さ
 れる部分群である. $K_q(k)$ の元 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_q \bmod J$ を $\{x_1, \dots, x_q\}$
 と書く.

m が k の標数でわれない整数なら, Galois symbol と呼ばれ
 る準同型

$$h_{m,k}^q : K_q(k) / m K_q(k) \longrightarrow H^q(k, \mu_m^{\otimes q})$$

が, 標準同型 $k^\times / (k^\times)^m \cong H^1(k, \mu_m)$ から cup 積によって導
 かれる. この写像は常に同型であろうと予想され ([5] §6
 参照), k が代数体や, 有限体上の一変数関数体の場合には,
 類体論を用いて Tate によって同型であることが示されている
 が (Tate [7] 参照), 一般には $q \geq 2$ に対しては, 全射性も

単射性も示されていない。

K の正規加法付値を ord_K と書く。各 $i \geq 1$ に対し、 $K_q(K)$ の第 i 単数群 $U_q^{(i)}$ を、 $\{1+x, y_1, \dots, y_{q-1}\}$ ($x \in K, \text{ord}_K(x) \geq i, y_1, \dots, y_{q-1} \in K^\times$) の形の元で生成される部分群とする。これは乗法群 $K^\times = K_1(K)$ 内の通常の第 i 単数群の自然な一般化である。 $\overline{U}_q^{(i)}$ を、 $K_q(K)/PK_q(K)$ における $U_q^{(i)}$ の像とする。簡単のため、 K は 1 の原始 P 乗根を含むとし、 $h_{p,K}^q: K_q(K)/PK_q(K) \rightarrow H^q(K, \mu_p^{\otimes q}) \cong H^q(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ による $\overline{U}_q^{(i)}$ の像を $U^i H^q$ と書く。

いくつかの記号の準備をする。 k を標数 $P > 0$ の体とするとき、 $q \geq 0$ に対し、 Ω_k^q を、differential module $\Omega_{k/\mathbb{Z}}^1$ の k 上の q 次外積とし、 $\Omega_{k,d=0}^q$ を、外微分 $d: \Omega_k^q \rightarrow \Omega_k^{q+1}$ の核とし、準同型

$$\Omega_k^q \rightarrow \Omega_k^q / d(\Omega_k^{q-1}) \quad ; \quad x \frac{dy_1}{y_1} \wedge \dots \wedge \frac{dy_q}{y_q} \mapsto (x^P - x) \frac{dy_1}{y_1} \wedge \dots \wedge \frac{dy_q}{y_q}$$

(Milne [4] §1 参照) の核、余核を、それぞれ $\gamma(q)_k$,

$H_p^{q+1}(k)$ とおく。 $q < 0$ についてはこれらの群は 0 であると

定義する。Galois symbol に相当する準同型 differential symbol

$$h_{p,k}^q: K_q(k)/PK_q(k) \rightarrow \gamma(q)_k \quad ; \quad \{x_1, \dots, x_q\} \mapsto \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_q}{x_q}$$

があり、これも常に同型であろうと予想され、実際 $q=0, 1$

では同型である。筆者はこれが常に全射であることは証明で

きたが、単射性は示せていない。

定理 1. K を §2 の初めのとおりとし, K は 1 の原始 p 乗根を含むとする. $e = \text{ord}_K(p)$ とおく.

$$(1) \quad H^2(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/U^1 H^2 \cong \nu(\varphi)_F \oplus \nu(\varphi-1)_F.$$

(2) 任意の $i \geq 1$ に対し, Galois symbol によって, 同型

$$\overline{U}_\varphi^{(i)}/\overline{U}_\varphi^{(i+1)} \cong U^i H^2/U^{i+1} H^2$$

がなりたつ. これら二つの群は,

$$0 < i < \frac{ep}{p-1} \text{ で } i \text{ が } p \text{ と素なら } \Omega_F^{2-i} \text{ と,}$$

$$0 < i < \frac{ep}{p-1} \text{ で } p \mid i \text{ なら } \Omega_F^{2-i}/\Omega_{F,d=0}^{2-i} \oplus \Omega_F^{2-i-2}/\Omega_{F,d=0}^{2-i-2} \text{ と,}$$

$$i = \frac{ep}{p-1} \text{ なら } H_p^2(F) \oplus H_p^{2-1}(F) \text{ と,}$$

同型である. また, $i > \frac{ep}{p-1}$ なら, $\overline{U}_\varphi^{(i)} = U^i H^2 = 0$.

(注意) 上の, K が 1 の原始 p 乗根を含むという仮定は本質的な仮定ではない. 一般には, K に 1 の原始 p 乗根を添加した体を K' とすれば, $[K':K]$ が p と素であることから, $H^2(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ は $H^2(K', \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ の $\text{Gal}(K'/K)$ -不変部分に一致し, 前者の構造は後者の構造から容易に計算できる. 同様の理由で, $\text{Br}(K)_p$ の構造も, $H^2(K', \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ の構造から計算できる.

なお, 定理 1 (2) の後半に述べられた同型は, K の素元 π を固定して得られる全射準同型 $\Omega_F^{2-i} \oplus \Omega_F^{2-i-2} \rightarrow \overline{U}_\varphi^{(i)}/\overline{U}_\varphi^{(i+1)}$;

$$\begin{cases} (x \frac{dy_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dy_{2-i}}{y_{2-i}}, 0) \mapsto \{1 + \tilde{x}\pi^i, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{2-i}\} \\ (0, x \frac{dy_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dy_{2-i-2}}{y_{2-i-2}}) \mapsto \{1 + \tilde{x}\pi^i, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{2-i-2}, \pi\} \end{cases}$$

($\sim$ は剰余体の元に対し, K の付値環におけるその任意の代

表元をあらわす) によって導かれるものである. また

$K_q(K)/U_q^{(1)}$ は $K_q(F) \oplus K_{q-1}(F)$ と同型であって, Galois symbol が導く準同型 $K_q(K)/(U_q^{(1)} + PK_q(K)) \rightarrow H^q(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/U^1 H^q$ は, 定理 1 (i) の同型を通じて differential symbol と同一視される. これから,

定理 2. K を §2 の初めのとおりとすると, Galois symbol $h_{p^n, K}^q$ は任意の $n \geq 0$ について全射であり, 次の (i)(ii)(iii) は同値である. (i) $h_{p, K}^q$ は同型. (ii) $h_{p^n, K}^q$ はすべての $n \geq 0$ について同型. (iii) differential symbol $h_{p, F}^q$ 及び $h_{p, F}^{q-1}$ は同型.

§3. コホモロジー群の不分岐部分

§2 では, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 係数のコホモロジー群を調べたが,

$H^q(K, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ や一般の $H^q(K, \mu_{p^n}^{\otimes r})$ ($n \geq 2$) の構造はよくわからない. しかし $H^q(K, \mu_{p^n}^{\otimes (q-1)}) \rightarrow H^q(K_{nr}, \mu_{p^n}^{\otimes (q-1)})$ の核は, 以下に述べるように簡明な形にあらわすことができる. この核は, $n=1$ で K が 1 の原始 p 乗根を含む時は定理 1 の $U_{\frac{ep}{p-1}} H^q$ に一致し一般には $H^q(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ のたいへん小さい部分群となるが, $[F:F^p] \leq p^{q-2}$ の時には全体に一致する. この §3 の内容は 付値体 K や剰余体 F の標数によらぬ

統一した形で述べた方がすっきりするので、体 k と非零整数 m に対し $H_m^q(k)$ ($q=0, 1, 2, \dots$) を次のように定義する。まず m が k の標数でわれない時は、 $H^q(k, \mu_m^{\otimes(q-1)})$ を $H_m^q(k)$ と定義する。

$$(B) \quad H_m^1(k) \cong X(k)_m, \quad H_m^2(k) \cong \text{Br}(k)_m$$

(アベール群 A に対し、 $A_m = \{x \in A; mx=0\}$ とおく) であり、いろいろな $H^q(k, \mu_m^{\otimes r})$ の中で、 $r=q-1$ のものが特に重要であると思われるのである。一方、Milne [4] の考え方によれば、標数 $p > 0$ の体 k に対して、標数 0 の体における $H^q(k, \mu_{p^n}^{\otimes(q-1)})$ に相当すると思われるもの (標数 $p > 0$ の体に対する実際の $H^q(k, \mu_{p^n}^{\otimes(q-1)})$ は、 k_S 内に 1 の p 巾乗根は 1 しかないため、使い物にならない) があって、それは [4] の $F-1: C_n^{q-1}(k) \rightarrow C_n^{q-1}(k)/dC_n^{q-2}(k)$ の余核であるが (記号の説明は略する)、それを $H_{p^n}^q(k)$ と書く。この $H_{p^n}^q(k)$ は、

$$H_{p^n}^q(k) = (W_n(k) \otimes \underbrace{k^{\times} \otimes \dots \otimes k^{\times}}_{q-1 \text{ 個}}) / J$$

としても定義できる。但しここに $W_n(k)$ は k 上の長さ n の Witt vector 全体のなす群、 J は、 $w \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_{q-1}$ で或る相異なる i, j について $b_i = b_j$ となるもの、

$(0, \dots, 0, a, 0, \dots, 0) \otimes a \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_{q-1}$ の形のもの、及び

$(w^{(p)} - w) \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_{q-1}$ の形のもの (Witt vector $w = (a_0, \dots, a_{n-1})$)

に対し、 $w_{\text{def}}^{(p)} = (a_0^p, \dots, a_{n-1}^p)$ 全体で生成される部分群である。

§2 で Ω_k^{q-1} の商として登場した $H_p^q(k)$ は, ここの意味での $H_p^q(k)$ と一致する. 一般の $m \neq 0$ に対して, $H_m^q(k)$ を, $H_{m'}^q(k) \oplus H_{m''}^q(k)$ ($m = m'm''$, m' は k の標数でわれず, m'' は 1 に等しいかまたは k の標数の中) と定義する. すると上の (B) の同型は任意の $m \neq 0$ について成立する.

定理 3. K を完備離散付値体, F をその剰余体とする.

$q \geq 0$, $m \neq 0$ を任意とする.

(1) $H_m^q(K) \rightarrow H_m^q(K_{nr})$ の核は $H_m^q(F) \oplus H_m^{q-1}(F)$ に同型である.

(2) m が F の標数でわれないか または F が標数 $p > 0$ で $[F:F^p] \leq p^{q-2}$ であれば, $H_m^q(K_{nr}) = 0$ であり, $H_m^q(K) \cong H_m^q(F) \oplus H_m^{q-1}(F)$ になりたつ.

この定理は, 上の (B) を考えに入れると, §1 (A) の一般化である. K や F の標数によらぬ形に述べてあるが, 主題は K, F を §2 の初めのとおりとする時, $H_{pn}^*(K)$ と $H_{pn}^*(F)$ が, (定義のされ方が全く異なっているにもかかわらず) 深い関係にあるということである. そのような K の p -コホモロジー次元 $cd_p(\text{Gal}(K_s/K))$ が, この定理により次の系の形でとまる. 一般に体 k と素数 p に対し $\dim_p(k)$ を, k の標数が p と異なれば $cd_p(\text{Gal}(k_s/k))$ ([6] 参照) とし, k の標数が p であれば, $[k:k^p] \leq p^r$ かつ, k のすべての有限次拡大 k'

について $H_p^{r+1}(k') = 0$, かなりたつ最小の整数 r (存在しなければ ∞ とする) と定義する.

系. K を完備離散付値体, F をその剰余体とするとき, 任意の素数 p に対して $\dim_p(K) = \dim_p(F) + 1$.

§4. §1 への二つの補足.

§1 では, 同型 (A) から 剰余体 F が有限体の場合に特に簡明な定理 $Br(K) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が得られるのであったが, §3 定理3からは, そのような「良い」特殊化として次が得られる.

定理4. $N \geq 0$ とし, k_0 は有限体とし, 各 $i=1, \dots, N$ に対し k_i は完備離散付値体で k_i の剰余体は k_{i-1} であるとする. k_N を K と書く. この時, 任意の $m \neq 0$ に対し, 標準的同型 $H_m^{N+1}(K) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ がある.

有限体を剰余体とする完備離散付値体の Brauer 群の定理から 局所類体論が得られるように, この定理4から, 定理4の K のアーベル拡大論が得られる ([2], [3]).

最後に, §1 で剰余体 F が標数 p の非完全体の場合, $Br(K)$ の p 中 torsion 部分はよくわからないと述べ, §2 で $Br(K)_p$ の構造のみを調べたのであるが, $[F:F^p] = p$ の場合には $Br(K)$ 全体も比較的簡単な構造をもち, よくわかることを述

べる.

定理 5. K は完備離散付値体で, 剰余体 F は標数 $p > 0$ であり, $[F:F^p] = p$ とする. この時 $Br(K)$ の部分群の増大列 $0 \subset Br^0(K) \subset Br^1(K) \subset Br^2(K) \subset \dots$ が標準的に定義され,

$$(1) \quad \bigcup_i Br^i(K) = Br(K), \quad Br^0(K) = Br(K_{nr}/K).$$

(2) 各 $i \geq 0$ に対し $Br^{i+1}(K)/Br^i(K)$ は F 上 1 次元線型空間の構造をもつ.

(3) K が標数 0 で 1 の原始 p 乗根を含む時は, $0 \leq i < \frac{ep}{p-1}$ に対し $Br^i(K) \cap Br(K)_p$ は定理 1 の $\bigcup_{i=1}^{\frac{ep}{p-1}-i} H^2$ に一致し, $i \geq \frac{ep}{p-1}$ ならば $Br(K)_p \subset Br^i(K)$ となる.

一般に $[F:F^p] = p^r$ の時は $\varinjlim_m H_m^{r+1}(K)$ が同様の構造を持つと予想される.

本稿の内容の証明は, 大部分 preprint "Galois cohomology of complete discrete valuation fields" にあるが, 一部は [2] [3] に述べられている.

文献表

- [1] 遠藤静男, 可換環の Brauer 群, 京都大学数理解析研究所講究録 53. Scheme の Brauer 群の研究報告集 1968.
- [2] 加藤和也, A generalization of local class field theory by using K -groups I, 東京大学理学部紀要 Sec. IA. 26 巻 No.2 1979.
- [3] ———. II, 東京大学理学部紀要に投稿中
- [4] J.S. Milne, Duality in flat cohomology of a surface. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 4 ème série, 9, 1976.
- [5] J. Milnor, Algebraic K -theory and quadratic forms, Inventiones Math. 9, 1970.
- [6] J.-P. Serre, Cohomologie Galoisienne, Lecture Notes in Math. 5, Springer-Verlag 1965.
- [7] J. Tate, Symbols in arithmetic, Actes du Congrès International des Mathématiciens 1970, Tome 1, Gauthier - Villars, Paris, 1971.