

孤立特異点の無限小変形について.

京大 数理解 藤井明

(X, p) を孤立特異点とす。 (X, p) の変形に因りて次の定理が基本的である。

定理 (i). (X, p) の Versal deformation が存在する。 2.4.12

(ii) $\text{Ext}_X^2(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)_p = 0$ ならば; deformation の parameter space S は nonsingular. この時 $\dim S = \dim \text{Ext}_X^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.

この定理は Grauert [2] にある。 (ii) の特殊な仮定のことも Tjurina [1] により証明されている。 [5].

しかし一般に (ii) の条件はチェックするのは、 (X, p) が complete intersection の場合を除き著しく困難である。 本稿では (X, p) の変形 Σ , $X-p$ の変形と infinitesimal に比較するところにより、

(ii) の条件をみるより別な別法を考へた。 以下 (X, p) は normal.

§1. 考へて fix するに、 X は $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^N(z_1, \dots, z_N)$ の polydisc $D = \{ \sum_{i=1}^N |z_i|^2 < 1 \}$ の analytic subset, $p = \mathbb{C}^N$ の原点とす。

$U = X - p$, $W = D - p$ とす。

命題 1. i) $\exists j_1: \text{Ext}^1(\Omega_X', \mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^1(U, \mathcal{O}_U)$ 自然に包含写像. さらに $\dim X \geq 3$ のとき j_1 は bijective.

ii) $\exists j_2: \text{Ext}^2(\Omega_X', \mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^1(U, N_{U/W})$, 自然に包含写像. さらに $\dim X \geq 3$ のとき j_2 は bijective.

iii) j_1 は (X, p) の変形が ∞ 個の infinitesimal deformation map に可換. また正確に言うと, $f: (X, p) \rightarrow (S, 0) \in (X, p)$ の

任意の deformation とする. $U_\delta = \{x \in X \mid |\delta \langle \Sigma | z_i |^2 \rangle| < 1\}$ と $\delta < 1$ 時,

f の U_δ の deformation と誘導する. これ $f_0: U \rightarrow (S, 0)$ とする.

f, f_0 に対しては infinitesimal deformation map $p: T \rightarrow \text{Ext}^1(\Omega_X', \mathcal{O}_X)$

$p_0: T \rightarrow H^1(U_\delta, \mathcal{O}_U)$ がそれぞれ定義される. $U_\delta \hookrightarrow U$ inclusion に

対し $l^*: H^1(U_\delta, \mathcal{O}_U) \rightarrow H^1(U_\delta, \mathcal{O}_U)$ は Andreotti-Grauert のように

injective. ($\dim X \geq 3$ のとき bijective, trivial case $\dim X = 1$ は除外して).

すると iii) の $[j_1]p = p_0$ を意味する. T は T は S の 0 点の近傍の Zariski 接空間.

上の命題, 幾何学的な意味づけをして.

命題 2. $\dim X \geq 3$ とする. $f_0: (U, U_\delta) \rightarrow (S, 0) \in U_\delta$ の任意の deformation とするとき, f_0 は isolated singularity (X, p) の変形が上のようにして得られる. したがって S は nonsingular.

S が一点よりなる時, これは Rossi の結果 [6] である. Relative case は Ling, Siu, Ranis et Ruzet のにより, 結果が得られている. 命題 2 は Ling, Thm (I) [5] の結論である.

さて $\sigma: (X, A) \rightarrow (X, p) \in (X, p)$ の resolution とする。次の声矢に、まず注意する。

定理 3 次、条件は同値。

(i). $\text{depth}_p X \geq k$

(ii). $R^i \sigma_* \mathcal{O}_X = 0, \quad 1 \leq i \leq k-2.$

[3]

これは Grauert-Riemenschneider の消滅定理 $\wedge$ Serre duality より導かれる。

$(X, A) \in (X, p)$ の変形に因り、 $\rightarrow$ の関係が次により与えられる。

命題 4 $\tilde{f}: (\tilde{X}, A) \rightarrow (S, 0) \in (\tilde{X}, A)$ の $\left\{ \begin{array}{l} \text{任意の} \\ \text{deformation} \end{array} \right.$ とする。

もし $\text{depth}_p X \geq 3$ ならば、 $\tilde{f}$ の equiblowing down により (X, p) の変形が得られる。i.e. $\exists f: (X^p) \rightarrow (S, 0), (X, p)$ の変形, $\exists \tilde{\sigma}: (\tilde{X}, A) \rightarrow (X, p)$ proper birational morphism. s.t. $\tilde{\sigma}|_{\tilde{X}} = \sigma$. τ ,

$\tilde{f} = f \circ \tilde{\sigma}$ が成立する。

命題 1 と 命題 4 に対して

命題 5 命題 4 の状況で、 $\exists \mu: H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{R}_{\tilde{X}}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})_p$

自然写像; かつ $\tilde{\rho}: T \rightarrow H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}), \rho: T \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{R}_{\tilde{X}}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})_p \in \mathbb{A}^1$ 及び $\tilde{f}, f$ に対する無限小変換写像とする時、 $\mu \tilde{\rho} = \rho$ 。

(注) 命題 4, 5 は $R^i \sigma_* \mathcal{O}_X = 0$ の仮定のもとで一般に成立する。

定理 3 により、特に $\text{depth}_p X \geq 3$ のもとでもよい。

§2. 特殊な孤立特異点の族を調べる。 (X, p) : 孤立特異点
が curve により解消できるとは、 $\exists h: (X_0, A_0) \rightarrow (X, p)$ 特異点の
解消 s.t. $\dim A_0 \stackrel{=1}{\leq} 1$ ととする。

命題 6 (X, p) を curve により解消できる孤立特異点とし、

$\dim X \geq 3$ を仮定する。この時、

i) (X, p) は Cohen-Macaulay

ii). $f: (\tilde{X}, A) \rightarrow (X, p)$ は (X, p) の勝手の解消で $\dim A = 1$ とする時、次が成立: A の各既約成分 A_i は $\mathbb{P}^1$ に同型、 A は cycle を含まぬ。かつ $A_i \hookrightarrow \tilde{X}$ は、例外的埋め込み (Grauert 意味で)。

命題 1 (ii) の簡単な応用として、

定理 7 (X, p) を命題 6 の如くとする時、もし $\dim X \geq 4$ なら、 $\text{Ext}^2(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = 0$, 従って、命題、Tjurina の定理 1 に於ける versal 変形は、非特異。すなわち、 $\dim \text{Ext}^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ が成立する。

注意 8 (i). $\dim X \neq 3$ ならば、命題 6 の (X, p) は完全交叉ではない。
ii). $\dim X = 3$ ならば、完全交叉 (complete intersection) の例はある。例としては、Brieskorn [1] 参照。

(ii). (X, p) を命題 6 の如くとする時に、 (X, p) が Gorenstein $\iff \dim X = 3$ かつ、 $\mathcal{N}_{A_i/X} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}_i(-2)$, $\forall i$ 。そして上の Brieskorn の例では、これは満たされる。(i) の事実も、このことから、また

12. $(X, p) \neq \text{U.F.D.}$ if $\dim X \geq 4$, etc.

最後に、 $\frac{B}{A}$ の簡単な場合として、 $\exists \sigma: (X, A) \rightarrow (X, p)$. resolution.

s.t. $A \cong IP^1$ の場合を示す。

命題 8. (i) (X', p') が同形 α , i.e. $\exists \sigma': (X', A') \rightarrow (X', p')$ with $A' \cong IP^1$ であるとき、 $(X, p) \cong (X', p') \iff (X, A) \cong (X', A')$.

(ii). $A \hookrightarrow X$ の埋め込みは、 $\mathbb{C}^m$ の fibre とし、 A は基底とすることができる特殊な fibre bundle の 'zero' section, $\phi: A \rightarrow Z$, とし、 ϕ の埋め込みは、 $\phi: Z \rightarrow A$ と同じ値。

・構造群は例として $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2(x, y)$ の時は、 $(x, y) \mapsto (ax + b(y), by)$

$a, b \in \mathbb{C}^*$, $g(y): y$ が正則有理函数のようになる形を持つ。一般の場合に $\mathbb{C}$ manifold Z の ϕ の記述が可能であるが、ここでは省略する。
この ϕ のような type の bundle は Jacobbino [7] にも、 $\mathbb{C}^2$ の context から得られることに注意した。

文献

- [1] Brieskorn, E., Über die Auflösung gewisser Singularitäten von hol. Abb. Math. Ann. 166 (1966)
- [2] Grauert, H., Über die Deformation isolierter Singularitäten. —, Invent. Math. 15 (1972)
- [3] Grauert, H., u. Remmert, O., Verschwindungssätze für —. Invent. Math. 11. (1970)
- [4] Jacobbino, A., An alg. fibre bundle over IP^1 that is not a v.b. Topology. 12. (1973)
- [5] Ling, H.-S., Extending families of pseudocompact complex spaces, Math. Ann. 204. (1973)
- [6] Rossi, H., Attaching analytic spaces —, Proc. Conf. Complex Analysis, Minneapolis. (1964)
- [7] Tjurina, Locally universal deformations of isol. sing. —. Math. of Izv. 3. (1969)