

非 Seifert 多様体に対する量子不変量の 量子モジュラー性

東北大学理学研究科数学専攻 村上友哉

Yuya Murakami, Mathematical Institute, Tohoku University

1 序論

本稿は 2022 年 1 月 27 日の RIMS 共同研究（公開型）「保型形式、保型 L 関数とその周辺」における筆者の講演「非 Seifert 多様体に対する量子不変量の量子モジュラー性」に基づいた、森祥仁氏（東北大学）との共著論文 [MM21] の解説である。論文や講演では述べることができなかった基礎事項についても併せて紹介する。

本稿の主題は 3 次元実多様体の量子不変量が量子モジュラー形式をなすという現象である。そのような現象はこれまで Seifert 多様体と呼ばれるクラスの 3 次元実多様体に対してのみ知られていたが、森氏との共同研究により非 Seifert 多様体に対して示すことができたというのが本稿の主結果である。

研究に際してモジュラー形式の部分は筆者が担当し、トポロジーの部分は森氏に担当して頂いた。この共同研究に至ったきっかけは、共著者の森氏（彼は筆者の東北大学における同級生である）から量子不変量の計算に現れるモジュラー形式について相談を受けたことである。彼から話を聞いた筆者が抱いた率直な感想は「モジュラー形式がトポロジーに応用されるというのは大変興味深い。量子不変量というトポロジーの対象も何やら面白そうだ。しかしそれを研究する内動的な動機が無い」というものであった。しかしながらひとたび研究に取り掛かると量子不変量は非常に絶妙な性質を持つ大変面白い対象だということが分かり、今では筆者はすっかりこの分野の虜になっている。本稿を通じてこの分野の面白さを伝えることが出来れば幸いである。

本稿の構成を述べる。2 節では本稿における第一の主役である量子モジュラー形式を紹介する。3 節では 3 次元実多様体の構成法を述べる。4 節では本稿における第二の主役である 3 次元実多様体の量子不変量のサーベイを与える。5 節では本稿の主結果と証明の概略を述べ、6 節で計算の詳細を紹介し、7 節で証明の肝となる重み付き Gauss 和の消滅性について述べる。

2 量子モジュラー形式

それではまず、本稿における第一の主役である量子モジュラー形式のサーベイを与えよう。

2.1 量子モジュラー形式の定義

量子モジュラー形式とは、量子不変量に関する Witten の漸近展開予想を解決するために Zagier [Zag10] によって導入された対象で、大雑把に述べると歪んだモジュラー性を持つ写像 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ のことである。

量子モジュラー形式がどういう対象なのかを説明するための足掛かりとして、以下の計算を行ってみる。

観察 2.1. 群 $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のモジュラー形式 $f(\tau)$ を固定する。すなわち、 f は上半平面

$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) > 0\}$ 上の正則関数であって、各行列 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対しモジュラー変換則

$$f(\tau) = (f|_{\kappa} \gamma)(\tau) := (c\tau + d)^{-\kappa} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \quad (2.1)$$

を満たし、「カスプでの正則性」と呼ばれる条件を満たすものとする。ここで任意の有理数 $x \in \mathbb{Q}$ に対し極限値 $f(x) := \lim_{\tau \rightarrow x} f(\tau)$ が収束すると仮定しよう。これは「カスプでの正則性」を強めた仮定であり、多くのモジュラー形式はこの仮定を満たさない。しかし満たすものも存在する。このとき $f(x)$ を計算してみよう。任意に既約分数 $x = h/k \in \mathbb{Q}$ を取る。ここで h と $k > 0$ は互いに素な整数である。すると行列 $\gamma = \begin{pmatrix} a & h \\ c & k \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ が存在するので、モジュラー変換則 (式 (2.1)) において $\tau \rightarrow 0$ とすることで $f(x) = k^{\kappa} f(0)$ を得る。

このようにして容易に $f(x)$ を計算することができたが、この計算が興味深いとは言えない。そこで $f(\tau)$ としてモジュラー形式ではなく、擬^{モック}モジュラー形式などのように「歪んだモジュラー変換則」を持つものを取ってみる。このとき $f(x)$ は最早自明とは言えないだろう。そのようにして得られる $f(x)$ がそが Zagier によって見出された「量子モジュラー形式」である。

定義 2.2 (Zagier [Zag10]). 写像 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ が重さ $\kappa \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, 部分群 $\Gamma \subset \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ($\kappa \in 1/2 + \mathbb{Z}$ のときは $\Gamma \subset \Gamma_0(4)$ とする) の量子モジュラー形式であるとは、各 $\gamma \in \Gamma$ に対し $f - f|_{\kappa} \gamma$ が $\mathbb{R}$ のある開集合上の実解析的関数に延長されることを言う。

この定義だけを見ても量子モジュラー形式が重要な対象だと感じることは難しいだろう。しかしながら、単に「モジュラー変換則を満たす正則関数」として定義されるモジュラー形式が数学の随所に現れる重要な対象であることと同様に、量子モジュラー形式もまた上の定義からは想像もつかない文脈において現れる重要な対象である。実のところ、量子モジュラー形式は 3 次元多様体の量子不変量として現れることがあるのである。

実際のところ歴史的な順序はここでの説明とは逆で、量子モジュラー形式は量子不変量を研究するための枠組みとして定義された。「量子モジュラー形式」という名前の由来もここにある。

量子モジュラー形式の研究はその出自に起因して、抽象論を樹立する方向というよりはむしろ興味深い具体例を個々に調べていくという方向で進展している。そのため上で述べた「定義」についても個々の具体例が持つ性質を必要十分に反映したものであるかは不明であり、現時点では暫定的な定義とみなすのが慎重な姿勢かもしれない。実際、Zagier は量子モジュラー形式を導入した論文中 ([Zag10, Pages 2, Lines 9–13]) で

... quantum modular form should be a function $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ for which the function $h_{\gamma}: \mathbb{Q} \setminus \{\gamma^{-1}(\infty)\} \rightarrow \mathbb{C}$ defined by

$$h_{\gamma}(x) = f(x) - (f|_{\kappa} \gamma)(x)$$

has some property of continuity or analyticity (now with respect to the real topology) for every element $\gamma \in \Gamma$.

と述べており、“quantum modular form should be...” という表現からは定義を明確に与えるというよりもむしろ数学的な現象を捉えるための述語として「量子モジュラー形式」を提案したように筆者には思われる。更に Zagier は同論文のその後のページで「量子モジュラー形式」の例を六つ挙げており（それぞれ Dedekind 和, Ramanujan のモックテータ関数, 固定された判別式を持つ二次形式のある種の和, Kontsevich 級数, Poincaré ホモロジー球面の Witten–Reshetikhin–Turaev 不変量, 色付き Jones 多項式から構成される）, 「量子モジュラー形式」の定式化というよりは様々な数学的対象が「量子モジュラー性」という何か新しい性質を持つことを述べることに重点が置かれているように思われる。

2.2 量子モジュラー形式の具体例

上で述べたように、現時点で量子モジュラー形式の研究は抽象論よりも具体例を調べることに重きが置かれている。そこで量子モジュラー形式の典型的な例を紹介しよう。

例 2.3. 写像 $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ は「歪んだモジュラー変換則」

$$f - (f|_{\kappa} \gamma) = (\text{ある解析的関数}) \tag{2.2}$$

を満たすとする。ただし $\kappa \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ であり、 γ はある部分群 $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の任意の元を走るとする。このとき任意の有理数 $x \in \mathbb{Q}$ に対し極限值 $f(x) := \lim_{\tau \rightarrow x} f(\tau)$ が収束するなら、写像 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ は定義から量子モジュラー形式である。

この例を踏まえると、次に問題となるのは歪んだモジュラー変換則（式 (2.2)）を満たす $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ としてどのようなものがあるかということである。典型的なものは **擬モジュラー形式** ([BFOR17, Definition 5.16]) である。これはモジュラー形式の非正則版である調和 Maass 形式の正則部分として定義されるもので、元の調和 Maass 形式の非正則部分の寄与により歪んだモジュラー変換則を持つことが分かる。

歪んだモジュラー変換則を満たす関数は他にもある。**部分テータ関数**や **偽テータ関数**と呼ばれる関数がそれであり、それぞれ

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{N(n+a)^2}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(n) q^{N(n+a)^2}$$

のような表示式で定義されるものである。これらの関数は通常のテータ関数とよく似ているものの若干異なる式で定義され、それゆえに歪んだモジュラー変換則を持つ。擬モジュラー形式は近年活発に研究が行われておりその重要性がますます強く認識されていることは対照的に、部分^{モック}テータ関数や偽^{フォルス}テータ関数は近年まであまり日の目を見ていなかったように思われる。実際、近年高瀬幸一氏による翻訳版が出版された Sills の本 [Sil21, 115 ページ] には

擬テータ関数が……注目を浴び続けたのとは異なり、偽テータ関数はごく最近まで時たま注目されるのみであった。

とある。しかしながら、これらの関数は量子不変量の文脈で現れることが近年分かってきており、その重要性が認識されるようになってきている。本稿で研究するのもこれらの関数である。

2.3 量子モジュラー形式の様々な変種

2.1 項で述べた通り量子モジュラー形式は抽象論よりも具体例を調べる方向で研究が進んでおり、様々な具体例を通して様々なバリエーションが定義されている。本項ではそれらを紹介する。

まず第一に、**量子集合付き量子モジュラー形式**を紹介する。これは 2.1 項で述べた量子モジュラー形式が $\mathbb{Q}$ 上の写像だったのを、代わりに $\mathbb{Q}$ の部分集合 Q 上の写像を考えるときに「量子集合 Q の量子モジュラー形式」と呼ぶもので、Bringmann, Kaszian, Mahlburg, Milas らのグループの論文（例えば [BKM19a], [BKM19b], [BM15], [BMM20]）で用いられている用語である。ここで「量子集合 (quantum set)」という用語は Zagier のオリジナルの論文 [Zag10] には登場しない。筆者が調べた限りでは Bringmann-Milas の論文 [BM15, Subsection 3.2] が初出であるが、この論文では「量子集合」という用語の由来は説明されていない。量子不変量の文脈に現れる用語でもないようなので、あまり深い意味は無い名称のように思われる。

Zagier は量子モジュラー形式を定義した論文 [Zag10] で “strong quantum modular form” という対象も命

名している。これは量子モジュラー形式が単に $\mathbb{Q}$ 上の写像を考えていたのを、 $\mathbb{Q}$ の各点に近づく漸近展開の情報込みで考えたもののことである。例 2.3 では「歪んだモジュラー変換則」を持つ写像 $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して定まる量子モジュラー形式を考察したが、この元の写像 $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ の情報も込みで考えたものが “strong quantum modular form” である。応用上現れる量子モジュラー形式は現状全て例 2.3 で考察したものとして生じるため、“strong quantum modular form” を考えれば十分のように思われるが、この概念の定式化はまだなされていないために多くの論文では “weak” な量子モジュラー形式の定義が採用されている。

一変数二次形式の部分テータ関数や ^{フォルス} 偽 テータ関数は量子モジュラー形式を定めるが、二次形式の変数が上がると一般に量子モジュラー形式にはならない。そこで代替物として Bringmann–Kasdzian–Milas [BKM19a] が定義したのが深さ付き量子モジュラー形式である。

定義 2.4 ([BKM19a, Definition 3]). 深さ 1 の量子モジュラー形式とは量子モジュラー形式のことである。

深さ 2, 重さ $\kappa \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, 部分群 $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ($\kappa \in 1/2 + \mathbb{Z}$ のときは $\Gamma \subset \Gamma_0(4)$ とする), 量子集合 $\mathcal{Q} \subset \mathbb{Q}$ の量子モジュラー形式とは、写像 $f: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ であって各 $\gamma \in \Gamma$ に対し $f - f|_{\kappa} \gamma$ が量子モジュラー形式と $\mathbb{R}$ のある開集合上の実解析的関数の積の有限和で書けるもののことである。

帰納的に、深さ $d \geq 2$, 重さ $\kappa \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, 部分群 $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, 量子集合 $\mathcal{Q} \subset \mathbb{Q}$ の量子モジュラー形式とは、写像 $f: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ であって各 $\gamma \in \Gamma$ に対し $\kappa_1, \dots, \kappa_r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, 0 \leq d_1, \dots, d_r < d$ と開集合 $R \subset \mathbb{R}$ が存在して $f - f|_{\kappa} \gamma$ が $\mathcal{Q}_{\kappa_1}^{d_1}(\Gamma)\mathcal{O}(R) \oplus \dots \oplus \mathcal{Q}_{\kappa_r}^{d_r}(\Gamma)\mathcal{O}(R)$ の元として書けるものとして定義する。ただし $\mathcal{O}(R)$ は R 上の $\mathbb{C}$ 実解析的関数全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間で、 $\mathcal{Q}_{\kappa}^0(\Gamma) := 1$ とおき、深さ d_i , 重さ κ_i , 部分群 Γ , 量子集合 $\mathcal{Q}$ の量子モジュラー形式のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $\mathcal{Q}_{\kappa}^{d_i}(\Gamma)$ とおいた。

つまり「深さ付き量子モジュラー形式」とは「量子モジュラー形式」よりも更に歪んだモジュラー変換則を持つ対象である。この「定義」にも「深さ付き量子モジュラー形式」の定式化を与えるというよりは未解明の性質に名前を付けておいたという印象が筆者には見受けられる。なお [BKM19a, Definition 3] では深さに加えて指標も付けた量子モジュラー形式も定義されている。また [BKM19b] ではベクトル値深さ付き量子モジュラー形式という概念も扱われている。

[BKM19a], [BMM20, Theorem 1.1] では二変数二次形式の部分テータ関数や ^{フォルス} 偽 テータ関数が深さ 2 の量子モジュラー形式になることを証明している。一般に d 変数二次形式のフォルステータ関数の 1 の冪根への極限が深さ d の量子モジュラー形式になるかどうかはまだ知られていないようである。

3 重み付き木から定まる 3 次元実多様体

前節では本稿における第一の主役である量子モジュラー形式について述べた。次節で第二の主役である量子不変量について述べるために、本節では 3 次元実多様体の構成法を紹介する。

3.1 Dehn 手術

まず、最も重要な 3 次元多様体の構成法である Dehn 手術を紹介する。これは絡み目から 3 次元多様体を構成する方法である。まず絡み目を定義する。

定義 3.1. 絡み目とは、有限個の S^1 の非交和の S^3 への埋め込みのことである。絡み目がワイルドでないとは、十分小さな管状近傍が有限個のトーラス体 (solid torus) と同相になることである。

直感的に述べると、ワイルドな絡み目とは無限に絡まった絡み目のことである。そのような病的な例を排除するため、本稿ではワイルドでない絡み目のみを考えることとする。そのような絡み目に対して、以下のようにして 3 次元多様体を構成することができる。

定義 3.2. 成分数 n の絡み目 L に沿った手術係数 $p_1/q_1, \dots, p_n/q_n \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ の **Dehn 手術**とは, S^3 からコンパクト向き付け可能 3 次元実多様体を得る以下の操作のことである.

- (i) S^3 内の絡み目 L の管状近傍 $\overline{L}$ を取る.
- (ii) $S^3 \setminus \overline{L}$ と n 個のトーラス体をそれぞれ傾き $p_1/q_1, \dots, p_n/q_n$ で貼り合わせる.

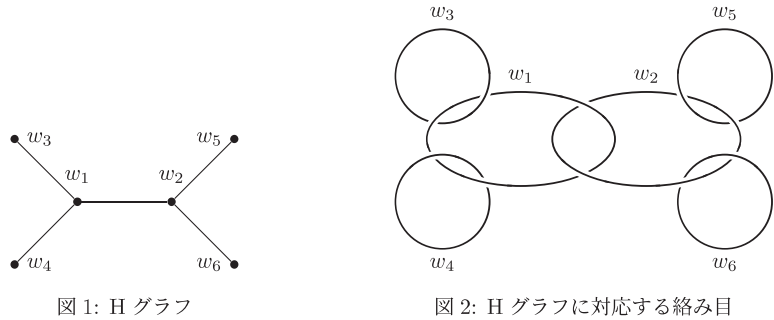
Dehn 手術により任意のコンパクト向き付け可能 3 次元実多様体を得られることが知られている (Lickorish-Wallace の定理). また, 二つの手術係数付き絡み目が同相な 3 次元多様体を定めることの必要十分条件として Kirby 移動というものがある (Kirby の定理). 従って 3 次元多様体の位相不変量を得ることは, 手術係数付き絡み目の Kirby 移動に関する不変量を得ることと同値である.

3.2 重み付き木から定まる絡み目

Dehn 手術により 3 次元多様体を考える代わりに絡み目を考えれば良いということが分かったが, 絡み目もまた複雑怪奇な対象であり, 任意の絡み目に対して不変量を一息に計算することは到底望めない. そのため, 絡み目の研究ではまず具体的な絡み目の場合に計算してみるという手法が採られることが多いようである. 本稿で紹介する研究もそのような方針に基づき, 以下のように定まる特別な絡み目について考察する.

- 定義 3.3.** (i) **重み付き木**とは, 各成分を整数で重み付けられた連結有限無向グラフで閉路を持たないもののことである.
- (ii) 重み付き木 Γ に対し, 各頂点を自明な結び目に, 各辺を自明な結び目を絡ませることに, 頂点の重みを手術係数に対応させることで手術係数付き絡み目を得る. この絡み目に沿って Dehn 手術することで得られる 3 次元多様体を $M(\Gamma)$ と書く.

例えば, 図 1 で図示されているグラフを **H グラフ**と呼ぶが, これに対応する絡み目は図 2 の通りである.



なお, 二つの重み付き木が同相な 3 次元多様体を定めることの必要十分条件として Neumann 移動というものがある ([Neu80, Proposition 2.2], [Neu81, Theorem 3.1]).

さて, このようにして重み付き木 Γ から得た 3 次元多様体 $M(\Gamma)$ の情報は, 元の Γ の情報のみで記述できることが多々ある. 例えば 1 次ホモロジー群や次節で述べる量子不変量がそうである. そこで我々は 3 次元多様体を調べる代わりに重み付き木を考察する. なお, 1 次ホモロジー群は以下のように計算できる.

補題 3.4. 重み付き木 Γ の頂点数を n , 隣接行列を $W \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})$ とすると $H_1(M_3(\Gamma), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n / W(\mathbb{Z}^n)$ が成り立つ.

証明. 重み付き木 Γ に対応する絡み目を L , Dehn 手術において $S^3 \setminus \overline{L}$ と貼り合わせる n 個のトーラス体を

$\overline{L}, \overline{L}$ の内部を $\overline{L}^\circ$ とおく. Mayer-Vietoris 完全系列を分解 $M(\Gamma) = (S^3 \setminus \overline{L}^\circ) \cup \overline{L}$ に適用することで, 完全系列

$$\begin{array}{ccccc} H_1(\partial \overline{L}) & \xrightarrow{f_1} & H_1(S^3 \setminus \overline{L}^\circ) \oplus H_1(\overline{L}) & \xrightarrow{g_1} & H_1(M(\Gamma)) \\ \rightarrow & H_0(\partial \overline{L}) & \xrightarrow{f_0} & H_0(S^3 \setminus \overline{L}^\circ) \oplus H_0(\overline{L}) & \end{array}$$

を得る. ここで f_0 は同型 $H_0(\partial \overline{L}) \xrightarrow{\sim} H_0(\overline{L})$ を經由するので単射である. 従って g_1 は全射である. トーラス $\partial \overline{L}, \partial \overline{L}$ のロンジチュードとメリディアンをそれぞれ x_i, y_i, x'_i, y'_i ($1 \leq i \leq n$) とおくと

$$H_1(\partial \overline{L}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}x'_i \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}y'_i, \quad H_1(S^3 \setminus \overline{L}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}x_i, \quad H_1(\overline{L}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}y'_i$$

と書け, $S^3 \setminus \overline{L}^\circ$ と $\overline{L}$ の貼り合わせ方から $f_1(x'_i) = (w_i x_i + y_i, y'_i)$, $f_1(y'_i) = (0, y'_i)$ が成り立ち, $M(\Gamma)$ 内のパスとして y_i と y'_i はホモトープである. また Γ から定まる絡み目の絡み方から $S^3 \setminus \overline{L}^\circ$ 内のパス y_i と $\sum_j x_j$ はホモトープである. ただしここで j は i と隣接する頂点を走る. 以上の議論から

$$H_1(M(\Gamma)) \cong \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}x_i \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}y'_i \right) / \left(W \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}x_i \right) \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}y'_i \right) \cong \mathbb{Z}^n / W(\mathbb{Z}^n)$$

が従う. □

3.3 様々な種類の 3 次元多様体

重み付き木による構成法を利用して 3 次元多様体の様々なクラスを定義しておく.

定義 3.5. 3 次元多様体 M に関する以下の用語を定義する.

- (i) M が **ホモロジー球面** であるとは, S^3 と同じホモロジー群を持つこと, すなわち $H_0(M, \mathbb{Z}) = H_3(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_1(M, \mathbb{Z}) = H_2(M, \mathbb{Z}) = 0$ が成り立つことをいう.
- (ii) ある重み付き木 Γ に対し $M = M(\Gamma)$ と書ける M を **鉛管多様体**^{*1} (**plumbed manifold**) と呼ぶ.
- (iii) 三葉結び目に沿った手術係数 -1 の Dehn 手術で得られる M を **Poincaré ホモロジー球面** と呼ぶ.

連結性と Poincaré 双対性より, M がホモロジー球面であることと $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$ が成り立つことは同値である. 補題 3.4 より, 重み付き木 Γ に対し $M(\Gamma)$ がホモロジー球面であることと Γ の隣接行列 W がユニモジュラーであること, すなわち $\det W = \pm 1$ が成り立つことは同値である.

定義 3.6. 重み付き木 Γ に対し, 3 次元多様体 $M = M(\Gamma)$ に関する以下の用語を定義する.

- (i) Γ の各頂点の次数が高々 3 以下で次数 3 の頂点が丁度一つあるとき, M は **Brieskorn** であるという.
- (ii) Γ の各頂点の次数が一つを除いて高々 2 以下であるとき, M は **Seifert** であるという.

なお, これらの用語は通常では上とは異なる定義が採用される.

注意 3.7. Poincaré ホモロジー球面は Brieskorn であることが知られている. 各頂点の次数が高々 2 以下の重み付き木 Γ に対し $M(\Gamma)$ は $S^3, S^1 \times S^2$ または **レンズ空間** と呼ばれるクラスに属する. レンズ空間と Brieskorn 多様体は Seifert 多様体であり, Seifert 多様体は鉛管多様体である. H グラフ (図 1) から定まる鉛管多様体は最も簡単な非 Seifert 多様体である.

^{*1} この訳語は松本幸夫『4 次元のトポロジー』(日本評論社) などによる “plumbing” の「鉛管工事」という訳語に基づくが, 用例は少ないようである. 「鉛管」は昭和末期頃まで使われていた鉛製の水道管を指す.

4 3次元実多様体の量子不変量

量子不変量とは量子群を用いて定義される不変量のことである。例えば Jones 多項式は結び目の量子不変量である。本稿で考察するのは、Witten によって物理的に構成されたのち Reshetikhin と Turaev によって数学的に構成された経緯を持つ、**Witten–Reshetikhin–Turaev (WRT) 不変量**という 3 次元実多様体 M の量子不変量 $\text{WRT}_k(M) \in \mathbb{C}$ (ただし $k \in \mathbb{Z}_{>0}$) である。これは鉛管多様体の場合には以下の明示式を持つ。

命題 4.1 ([GPPV20, Equation A.10]). 重み付き木 Γ から定まる 3 次元多様体 $M(\Gamma)$ の WRT 不変量^{*2}は

$$\text{WRT}_k(M(\Gamma)) = \frac{e(-\sigma/8)\zeta_k^{3\sigma/4}}{2^n k^{n/2}(\zeta_{2k} - \zeta_{2k}^{-1})} \sum_{n \in (\mathbb{Z} \setminus k\mathbb{Z})^n / 2k\mathbb{Z}^n} \prod_{1 \leq i \leq n} \zeta_{4k}^{w_i(n_i^2-1)} (\zeta_{2k}^{n_i} - \zeta_{2k}^{-n_i})^{2-\deg(i)} \cdot \prod_{(i,j) \in \text{Edges}} \left(\zeta_{2k}^{n_i n_j} - \zeta_{2k}^{-n_i n_j} \right)$$

と書ける。ただし b_+ と b_- はそれぞれ Γ の隣接行列の正と負の固有値の数、 $\sigma := b_+ - b_-$ は隣接行列の符号、 n は Γ の頂点数、 w_i と $\deg(i)$ はそれぞれ i 番目の頂点の重みと次数（伸びている辺の数）である。

この命題は色付き Jones 多項式による表示式 ([RT91, Theorem 3.3.2]) を計算することで得られる。WRT 不変量の研究で重要なのが、数列 $\text{WRT}_k(M)$ の $k \rightarrow \infty$ に関する漸近展開に Chern–Simons 不変量や Reidemeister torsion などの重要な不変量が現れるという **Witten の漸近展開予想**である。この予想を解決する糸口になるのが量子モジュラー形式である。実際、量子モジュラー形式 $f_M: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ であって任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $f_M(1/k) = \text{WRT}_k(M)$ が成り立つものが存在するとすると、量子モジュラー性から従う式

$$f_M\left(\frac{1}{k}\right) = k^\kappa f_M(-k) + (\text{ある解析的関数})$$

から $\text{WRT}_k(M)$ の $k \rightarrow \infty$ に関する漸近展開が得られることが期待できる。このような観点から Witten の漸近展開予想に挑戦した研究として以下のものがある。

- Lawrence–Zagier [LZ99] は M が **Poincaré ホモロジー球面**のときに $f_M(\tau)$ として ^{フォールス}偽 テータ関数が取れることを示し、この場合に Witten の漸近展開予想を解決した。
- 樋上 [Hik05] は M が **Brieskorn ホモロジー球面**のときに $f_M(\tau)$ として ^{フォールス}偽 テータ関数が取れることを示し、この場合に Witten の漸近展開予想を解決した。
- 樋上 [Hik06] は M が **Seifert ホモロジー球面**のときに $f_M(\tau)$ として ^{フォールス}偽 テータ関数の微分の有限和が取れることを示し、この場合に Witten の漸近展開予想を解決した。
- 藤・岩木・村上・寺嶋 [FIMT21] は M が **Seifert ホモロジー球面**のときに $f_M(\tau)$ の候補として **WRT 関数**という q 級数を導入し、その $\tau \rightarrow 1/k$ での極限が $\text{WRT}_k(M)$ になることを示した。
- Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20] は M が **鉛管多様体**であって重み付き木の隣接行列が負定値のときに $f_M(\tau)$ の候補として **ホモロジカルブロック**という q 級数 $\hat{Z}_M(q)$ を導入し、その $\tau \rightarrow 1/k$ での極限が $\text{WRT}_k(M)$ になることとそれが量子モジュラー形式を定めることを予想した。
- Andersen–Mistegård [AM20] は M が **Seifert ホモロジー球面**のときに **WRT 関数**が **ホモロジカルブロック**に本質的に一致することを示し、[FIMT21] の結果の resurgence 理論による別証明を与えた。
- 松坂・寺嶋 [MT21] は M が **Seifert ホモロジー球面**のときに **ホモロジカルブロック**の量子モジュラー性を示し、樋上 [Hik06] とは独立に Witten の漸近展開予想を解決した。

^{*2} WRT 不変量は正規化を $\text{WRT}_k(S^3) = 1$ と取るか $\text{WRT}_k(S^1 \times S^2) = 1$ と取るかで二通りの流儀があるため注意が必要である。本稿や [GPPV20] では前者の流儀を採用している。

- Bringmann–Mahlburg–Milas [BMM20] は M が $\mathbf{H}$ グラフから定まる非 Seifert ホモロジー球面のときにホモロジカルブロックが深さ 2 の量子モジュラー形式 (定義 2.4) を定めることを示した。

まとめると, Witten の漸近展開予想は **Seifert ホモロジー球面** に対しては証明されているものの, そうでない場合には示されておらず, 重み付き木の隣接行列が負定値となる **鉛管多様体** に対しては Gukov–Pei–Putrov–Vafa の **ホモロジカルブロック** による枠組みがあり, $\mathbf{H}$ グラフ (図 1) から定まる非 Seifert **鉛管ホモロジー球面** の場合に Bringmann–Mahlburg–Milas の部分的な結果があるというのがこれまでの先行研究である。そこで $\mathbf{H}$ グラフの場合に残された問題を解決するというのが次の目標になる。森氏と筆者は [MM21] でこの場合にホモロジカルブロックの $\tau \rightarrow 1/k$ での極限が $\text{WRT}_k(M)$ になることを示した。これが本稿の主結果である。なお, この結果から Witten の漸近展開予想に挑戦するには更にホモロジカルブロックのモジュラー変換則や Chern–Simons 不変量を計算する必要がある, 現在研究に取り組んでいる。

なお, Gukov–Pei–Putrov–Vafa のホモロジカルブロックは以下のように定義される。

定義 4.2 ([GPPV20, Subsection 3.4]). 重み付き木 Γ から定まる 3 次元多様体 $M(\Gamma)$ に対し, その **ホモロジカルブロック** を

$$\widehat{Z}_\Gamma(q) = q^{-\sum_{1 \leq i \leq n} (w_i + 3)/4} \text{v.p.} \int_{|z_i|=1, 1 \leq i \leq n} \Theta_{-W, \delta}(q; z) \prod_{1 \leq i \leq n} (z_i - 1/z_i)^{2 - \deg(i)} \frac{dz_i}{2\pi\sqrt{-1}z_i}$$

と定義する。ただし $|q| < 1$ で, v.p. は Cauchy の主値, $\delta := (\deg(i))_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{Z}^n$ であり,

$$\Theta_{-W, \delta}(q; z) := \sum_{l \in 2\mathbb{Z}^n + \delta} q^{-lW^{-1}l/4} \prod_{1 \leq i \leq n} z_i^{l_i}$$

はテータ関数である。

5 主結果

それではいよいよ主結果を述べていこう。負の整数 $w_1, \dots, w_6 \in \mathbb{Z}_{<0}$ で重み付けられた $\mathbf{H}$ グラフ Γ (図 1) であって, その隣接行列 W が負定値で行列式が 1 となるものを固定する。ここで Neumann の定理 ([Neu80, Proposition 2.2], [Neu81, Theorem 3.1]) より $M(\Gamma)$ が非 Seifert であることと $w_3, \dots, w_6 \leq -2$ が成り立つことは同値で, そのような $\mathbf{H}$ グラフの同型類は丁度 39 個あり ([BMM20, Theorem 1.2]), [BMM20, Appendix] で与えられている ([BMM20] の記号は我々の記号と異なる。巻末の表 1 に対応を記した)。正整数 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ を固定し, $\zeta_k := e^{2\pi\sqrt{-1}/k}$ とおく。この記号の下で, 本稿の主結果は以下のように述べられる。

定理 5.1.

$$\text{WRT}_k(M(\Gamma)) = \frac{1}{2(\zeta_{-2k} - \zeta_{-2k}^{-1})} \lim_{q \rightarrow \zeta_{-k}} \widehat{Z}_\Gamma(q).$$

この結果は Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20] で予想された式とは若干の差異がある。彼らの予想は $\mathbf{H}$ グラフの場合には以下の通りである。

予想 5.2 ([GPPV20, Conjecture 2.1, Equation (A.28)]).

$$\text{WRT}_k(M(\Gamma)) = \frac{1}{2(\zeta_{2k} - \zeta_{2k}^{-1})} \lim_{q \rightarrow \zeta_k} \widehat{Z}_\Gamma(q).$$

定理 5.1 の証明の方針は, WRT 不変量とホモロジカルブロックを明示的に計算することでどちらも **重み付き Gauss 和** と我々が呼んでいる表示式で書くというものである。WRT 不変量側では命題 4.1 から出発し

て **Gauss 和の相互則**と呼ばれる公式を用いながら技巧的な計算を施していく．ホモロジカルブロック側では Bringmann–Mahlburg–Milas [BMM20] によって与えられた ^{フォルス} 偽 テータ関数表示式から出発し，その漸近展開を Bringmann–Mahlburg–Milas [BMM20] の Euler–Maclaurin 和公式から求める．どちらの計算も，仕上げに **重み付き Gauss 和の消滅性**という性質を用いることで証明が完了する．この **重み付き Gauss 和の消滅性**という性質が証明における一番の肝である．

それでは次節以降で証明をより詳しく見ていこう．なお紙面の都合により，以下では我々の論文 [MM21] に書いた計算は省略し，そこに書かなかったアイデアなどを中心に記すことにする．

6 量子不変量の計算

6.1 主定理の明示形

前節では WRT 不変量とホモロジカルブロックをどちらも **重み付き Gauss 和**で書き表すことで定理 5.1 を証明すると述べた．まずはこのことを主張の形で述べておく．そのために記号の準備をする．

H グラフ Γ の隣接行列 W に対し， $-W^{-1} \in \text{Sym}_6^+(\mathbb{Z})$ の左上の 2×2 ブロック行列を $S \in \text{Sym}_2^+(\mathbb{Z})$ ，対応する二変数正定値二次形式を $Q(m, n) := {}^t(m, n)S(m, n) = -{}^t(m, n, 0, 0, 0, 0)W^{-1}(m, n, 0, 0, 0, 0)$ とおく．明示的に W^{-1} を計算することでこれらは

$$S = \begin{pmatrix} Ma & -MN \\ -MN & Nc \end{pmatrix}, \quad Q(m, n) = Mam^2 + 2MNmn + Ncn^2$$

と書ける ([MM21, Lemma 2.4])．ただし

$$M := w_3w_4, \quad N := w_5w_6, \quad a := -w_2w_5w_6 + w_5 + w_6, \quad c := -w_1w_3w_4 + w_3 + w_4$$

である．またこのとき直接計算から $ac - MN = \det W = 1$ が分かり，従って

$$A := \begin{pmatrix} c & N \\ M & a \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

とおくと

$$SA = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

が成り立つので $S(\mathbb{Z}^2) = M\mathbb{Z} \oplus N\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^2$ が従う．また $\gcd(w_3, w_4)$ は c と M を割るため $ac - MN = 1$ の約数なので $\gcd(w_3, w_4) = 1$ が成り立つ．同様に $\gcd(w_5, w_6) = 1$ が成り立つ．

互いに素で非零な整数の組 $(w, w') \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2$ に対し

$$\chi^{(w, w')}(n) := \begin{cases} ee' & \text{ある } e, e' \in \{\pm 1\} \text{ について } n \equiv w'e + we' + ww' \pmod{2ww'}, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とおき，周期写像 $\chi: \frac{1}{2M}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ， $\psi: \frac{1}{2N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ をそれぞれ $\chi(\alpha) := \chi^{(w_3, w_4)}(2M\alpha)$ ， $\psi(\beta) := \chi^{(w_5, w_6)}(2N\beta)$ で定める．また周期写像 $\varepsilon: (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2 = \frac{1}{2M}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{2N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \rightarrow \{\pm 1, 0\}$ を $\varepsilon(\alpha, \beta) := \chi(\alpha)\psi(\beta)$ で定める．複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対し $e(z) := e^{2\pi\sqrt{-1}z}$ とおく．

以上の記号の下で，WRT 不変量とホモロジカルブロックの極限値は以下の明示式を持つ．

定理 6.1 ([MM21, Theorem 1.2]).

$$\begin{aligned} \text{WRT}_k(M_3(\Gamma)) &= \frac{\zeta_k^{-(18 + \sum_{i=1}^6 w_i + \sum_{i=3}^6 1/w_i)/4}}{2k^2 (\zeta_{-2k} - \zeta_{-2k}^{-1})} \sum_{\gamma = {}^t(\alpha, \beta) \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2) \cap [0, k)^2} \varepsilon(\gamma) e\left(-\frac{1}{k}Q(\gamma)\right) \alpha\beta \\ &= \frac{1}{2(\zeta_{-2k} - \zeta_{-2k}^{-1})} \lim_{q \rightarrow \zeta_{-k}} \hat{Z}_\Gamma(q). \end{aligned}$$

この式に登場する和が**重み付き Gauss 和**と我々が呼んでいる対象である。どのようにして重み付き Gauss 和が現れるかをより詳しく見ていこう。

6.2 WRT 不変量の計算

まず WRT 不変量の計算を詳しく見ていく。命題 4.1 を出発点に、有理関数

$$G(q) := \frac{(q^{w_3} - q^{-w_3})(q^{w_4} - q^{-w_4})}{q^M - q^{-M}}, \quad H(q) := \frac{(q^{w_5} - q^{-w_5})(q^{w_6} - q^{-w_6})}{q^N - q^{-N}}$$

を用いた以下の表示式が得られる。

命題 6.2 ([MM21, Proposition 6.1]).

$$\begin{aligned} & \text{WRT}_k(M(\Gamma)) \\ &= \frac{-\sqrt{-1}\zeta_k^{-(18+\sum_{i=1}^6 w_i + \sum_{i=3}^6 1/w_i)/4}}{4k(\zeta_{2k} - \zeta_{2k}^{-1})\sqrt{MN}} \sum_{\mu=t(m,n) \in (\mathbb{Z} \setminus k\mathbb{Z})^2/2kS(\mathbb{Z}^2)} e\left(-\frac{1}{4k}t\mu S^{-1}\mu\right) G(\zeta_{2M}^m) H(\zeta_{2N}^n). \end{aligned}$$

この命題は技巧的な計算によって証明される。証明のポイントは、以下の **Gauss 和の相互則 (reciprocity)** と呼ばれる公式を用いることである。

命題 6.3 ([DT07, Theorem 1]). L を階数 n の $\mathbb{Z}$ 上の格子、その上の非退化双線形形式を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とし、その双対格子を $L' := \{y \in L \otimes \mathbb{R} \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \text{ for all } x \in L\}$ とおく。 $k \in |L'/L|_{\mathbb{Z}_{>0}}$ と $u \in \frac{1}{k}L$ を取る。 $h: L \otimes \mathbb{Q} \rightarrow L \otimes \mathbb{Q}$ は自己随伴同型であって、 $h(L') \subset L'$ を満たし任意の $y \in L'$ に対し $\frac{k}{2} \langle y, h(y) \rangle \in \mathbb{Z}$ が成り立つものとする。 σ を二次形式 $\langle x, h(y) \rangle$ の符号とする。このとき

$$\sum_{x \in L/kL} e\left(\frac{1}{2k} \langle x, h(x) \rangle + \langle x, u \rangle\right) = \frac{e(\sigma/8)k^{n/2}}{\sqrt{|L'/L| |\det h|}} \sum_{y \in L'/h(L')} e\left(-\frac{k}{2} \langle y + u, h^{-1}(y + u) \rangle\right)$$

が成り立つ。

なお、[DT07] で述べられている仮定には条件が重なっているものもあり、ここで述べたのは条件を整理した形である。また、この主張において $k=1, u=0$ とすると

$$\sum_{y \in L'/h(L')} e\left(-\frac{1}{2} \langle y, h^{-1}y \rangle\right) = e(-\sigma/8) \sqrt{|L'/L| |\det h|}$$

という Gauss 和の明示公式が得られる。この公式はよく知られているため命題 6.3 も数論の専門家に知られている可能性は高いように思われるが、[DT07] 以前の文献は無いようだ。命題 6.3 を証明した Deloup と Turaev は二人ともトポロジーの専門家で、量子不変量を計算する上で必要になったことが研究の動機のようなのである。

さて、命題 6.2 に現れる和は m, n が k の倍数を除いた部分を走っているのでこれを補いたい。しかし安直に k の倍数を加えようすると $G(\zeta_{2M})$ といった項を考える必要が出てくるが、 $G(q)$ は $q = \zeta_{2M}$ を極に持っためうまいかない。そこで $t > 0$ に対して $G(\zeta_{2M}^m e^{-t})$ という項を考えて $t \rightarrow +0$ での極限を取ることにすると m が k の倍数にも議論が機能する。 $t \rightarrow +0$ での極限が存在することや、補われる k の倍数の部分の極限値が 0 になることは**重み付き Gauss 和の消滅性** ([MM21, Proposition 4.2]) によって保証される。このようにすることで定理 6.1 に記した WRT 不変量の明示式が得られるのである ([MM21, Proposition 6.5])。ここで定理 6.1 の式において周期写像 $\varepsilon: (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \{\pm 1, 0\}$ が登場するのは有理関数 $G(q), H(q)$ が

$$G(q) = -\sum_{n=1}^{\infty} \chi\left(\frac{n}{2M}\right) q^n, \quad H(q) = -\sum_{n=1}^{\infty} \psi\left(\frac{n}{2N}\right) q^n$$

と Taylor 展開されることによる. なお, トーラス結び目の場合に $G(q)$ や $H(q)$ に対応する有理関数は Alexander 多項式と関係する ([Hik05, Section 8]) ので, ここで述べた $G(q)$ や $H(q)$ も Alexander 多項式と関係するかもしれない.

6.3 ホモロジカルブロックの計算

次にホモロジカルブロックの計算を詳しく見ていく. まず, 定義 4.2 で定義されたホモロジカルブロックを計算することで 偽^{フォルス} テータ関数による表示式を得る.

命題 6.4 ([BMM20, Proposition 5.3], [MM21, Proposition 2.3]).

$$\hat{Z}_\Gamma(q) = \frac{1}{2} q^{(-18-w_1-\dots-w_6-1/w_3-1/w_4-1/w_5-1/w_6)/4} (F_{Q_+, \varepsilon}(\tau) - F_{Q_-, \varepsilon}(\tau))$$

が成り立つ. ただし $Q_+(m, n) := Q(m, n)$, $Q_-(m, n) := Q(m, -n)$ とおき, 偽^{フォルス} テータ関数を

$$F_{Q, \varepsilon}(\tau) = F_{Q_+, \varepsilon}(\tau) := \sum_{0 \leq \gamma \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)} \varepsilon(\gamma) q^{Q+(\gamma)}, \quad F_{Q_-, \varepsilon}(\tau) := \sum_{0 \leq \gamma \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)} \varepsilon(\gamma) q^{Q-(\gamma)}$$

によって定める.

なお, これは和の範囲を $(2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)$ に取ることで [BMM20] の表示式よりもシンプルな形になっている. さて, この 偽^{フォルス} テータ関数表示に基づくと

$$F_{Q, \varepsilon} \left(\frac{1}{k} + \frac{t\sqrt{-1}}{2\pi} \right) = \sum_{\gamma \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2) \cap [0, k)^2} e \left(\frac{1}{k} Q(\gamma) \right) \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2} e^{-tQ(k\mu + \gamma)}$$

の $t \rightarrow 0$ での極限値を計算すれば定理 6.1 を示すことができる (ここで $Q(\gamma) \bmod k\mathbb{Z}$ は $\gamma \bmod \mathbb{Z}^2$ で定まることに注意). そこで例えば右辺の μ に関する無限和の各項を t について Taylor 展開して足し合わせようとしてみると, 定数項が発散してしまうかいかないことが分かる. そのため Taylor 展開の代わりに漸近展開を考える.

まず, この分野における研究の嚆矢である Lawrence–Zagier [LZ99] がどのように漸近展開を求めたか紹介しよう. 彼らのように扱う多様体が Seifert のときはホモロジカルブロックは一変数二次形式の 偽^{フォルス} テータ関数で書くことができる. このとき [LZ99] は以下の漸近展開の公式を準備した.

命題 6.5 ([LZ99, pp. 98, Proposition], [Ono04, Proposition 10.15] の些細な拡張). 正整数 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ と写像 $\chi: \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し L 関数を

$$L(s, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

で定めると, 正整数 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $t \rightarrow +0$ に関する漸近評価

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-n^d t} &\sim -t^{-1} \operatorname{Res}_{s=d} L(s, \chi) + \sum_{i=-1}^{\infty} \frac{L(-di, \chi)}{i!} (-t)^i \\ &= -t^{-1} \delta_{1,d} \sum_{n \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \chi(n) - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} \frac{k^{di}}{di+1} \sum_{1 \leq n \leq k} \chi(n) B_{di+1} \left(\frac{n}{k} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし $F(t) \sim G(t)$ は任意の正整数 N に対し $F(t) = G(t) + O(t^N)$ が成り立つことを意味し, $B_i(x)$ は i 次の Bernoulli 多項式であり, $\delta_{1,d}$ は Kronecker デルタである.

この命題は L 関数 $L(s, \chi)$ の極を調べるという非常に面白い方法により証明される. 以下に証明を記す.

証明. $F_d(t)$ と $b_{d,i}$ を

$$\begin{aligned} F_d(t) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-n^d t} \\ &\sim \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_{d,i} t^i \text{ as } t \rightarrow +0 \end{aligned}$$

により定める. まず $b_{1,i}$ を計算する.

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \sum_{1 \leq n \leq k} \chi(n) \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(n+km)t} \\ &= \sum_{1 \leq n \leq k} \chi(n) \frac{e^{-nt}}{1 - e^{-kt}} \end{aligned}$$

が成り立つので, Bernoulli 多項式の母関数による定義式

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i(x) \frac{t^i}{i!}, \quad |t| < 2\pi$$

より, $|t| < 2\pi/k$ の範囲で

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \sum_{1 \leq n \leq k} \frac{\chi(n)}{kt} \sum_{i=0}^{\infty} B_i\left(\frac{n}{k}\right) \frac{(-kt)^i}{i!} \\ &= - \sum_{i=-1}^{\infty} \frac{(-kt)^i}{(i+1)!} \sum_{1 \leq n \leq k} \chi(n) B_{i+1}\left(\frac{n}{k}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ. よって $B_0(x) = 1$ に注意すると

$$b_{1,i} = \begin{cases} \frac{(-k)^i}{(i+1)!} \sum_{1 \leq n \leq k} \chi(n) B_{i+1}\left(\frac{n}{k}\right) & i \geq -1, \\ 0 & i \leq -2 \end{cases}$$

を得る.

さて, $L(s, \chi)$ の Mellin 変換表示式に着想を得ることで

$$\begin{aligned} \Gamma(s) L(ds, \chi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \int_0^{\infty} e^{-n^d t} t^{s-1} dt \\ &= \int_0^{\infty} F_d(t) t^{s-1} dt \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_{d,i} \int_0^{\varepsilon} t^{s+i-1} dt + (\mathbb{C} \text{ 上の正則関数}) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_{d,i} \frac{1}{s+i} + (\mathbb{C} \text{ 上の正則関数}) \end{aligned}$$

と計算できる. ただし ε は十分小さい正の数である. 特に $d = 1$ の場合を考えると, ガンマ関数 $\Gamma(s)$ は $s = -i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ で留数 $(-1)^i/i!$ の 1 位の極を持ちその他の点で正則なので, $s = -i$ における留数を比較することで $i \geq 0$ に対し $b_{1,i} = (-1)^i L(-i)/i!$ であり, $L(s, \chi)$ は $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ 上正則で, $s = 1$ で高々 1 位の極を持ち留数は $b_{1,-1} = -\sum_{n \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \chi(n)$ である. $d \geq 2$ の場合も同様に留数を比較することで, $i \geq 0$ に対し $b_{d,i} = L(-di)$ であり, $i \leq -1$ に対し $b_{d,i} = 0$ を得る. $\square$

この命題において $\sum_{n \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \chi(n) = 0$ のときは $t \rightarrow +0$ に関する極限値は d によらず $L(0, C)$ になる. これらの極限値は $d = 2$ のときは 偽 テータ関数となり $d = 1$ のときは WRT 不変量となるためそれらが一致することが従う, というのが [LZ99] における議論の核心部分である.

なお, このような漸近展開を調べる手法をまとめた文献として Zagier [Zag06] は非常に参考になる.

さて, 今考えている H グラフの場合には二変数二次形式の 偽 テータ関数の漸近展開を調べる必要があるため, この命題は使えない. そこで代わりに以下の Euler-Maclaurin の和公式から従う補題を利用する.

補題 6.6 ([BKM19a, Equation (2.8)], [BMM20, Lemma 2.2]). 実数 α, β と C^∞ 級な急減少関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ に対し $t \rightarrow +0$ に関する漸近評価

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} f(t(m+\alpha, n+\beta)) \sim \sum_{i,j=-1}^{\infty} \frac{B_{i+1}(\alpha)}{(i+1)!} \frac{B_{j+1}(\beta)}{(j+1)!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(0,0) t^{i+j}$$

が成り立つ. ただし

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f := \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial y^j} f, \quad \frac{\partial^{-1} f}{\partial x^{-1}}(x', y) := - \int_{x'}^{\infty} f(0, y) dx$$

と定義する.

この補題の初出は [BKM19a, Equation (2.8)] のようだが, そこで証明は省略されている. そこで以下に証明を述べておく.

証明. 一変数関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し $t \rightarrow +0$ に関する漸近評価

$$\sum_{m=0}^{\infty} f(t(m+\alpha)) \sim \sum_{i=-1}^{\infty} \frac{B_{i+1}(\alpha)}{(i+1)!} \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(0) t^i \quad (6.1)$$

を示せば良い. 固定した $M \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し Euler-Maclaurin の和公式より

$$\sum_{m=0}^{\infty} f(m) = \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{1 \leq l \leq M} \frac{B_l}{l!} f^{(l-1)}(0) + \frac{(-1)^{M+1}}{M!} \int_0^{\infty} B_M(x - [x]) f^{(M)}(x) dx$$

が成り立つ. ただし B_l は l 番目の Bernoulli 数である. $f(x)$ を $f(t(x+\alpha))$ に置き換えることにより

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} f(t(m+\alpha)) \\ &= \int_0^{\infty} f(t(x+\alpha)) dx - \sum_{1 \leq l \leq M} \frac{B_l t^{l-1}}{l!} f^{(l-1)}(t\alpha) - \frac{(-t)^M}{M!} \int_0^{\infty} B_M(x - [x]) f^{(M)}(t(x+\alpha)) dx \end{aligned} \quad (6.2)$$

を得る. ここで $f^{(i)}(x)$ の Taylor 展開を考えることにより, 式 (6.2) の右辺第一項は

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t(x)) dx - \int_0^{\alpha} f(t(x)) dx &= t^{-1} \int_0^{\infty} f(x) dx - \int_0^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} t^j x^j dx \\ &= - \sum_{-1 \leq i \leq M-1} \frac{f^{(i)}(0)}{(i+1)!} t^i \alpha^{i+1} + O(t^M) \end{aligned}$$

と書け, 同様にすることで式 (6.2) の右辺第三項は $O(t^{M-1})$ であり, 式 (6.2) の右辺第二項は

$$- \sum_{1 \leq l \leq M} \frac{B_l t^{l-1}}{l!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(l+j-1)}(0)}{j!} t^j \alpha^j = - \sum_{0 \leq i \leq M-1} \frac{f^{(i)}(0) t^i}{(i+1)!} \sum_{1 \leq l \leq i+1} \binom{i+1}{l} B_l \alpha^{i+1-l} + O(t^M)$$

と書ける. 以上より, $B_0 = 1$ に注意すると

$$\sum_{m=0}^{\infty} f(t(m+\alpha)) = - \sum_{-1 \leq i \leq M-2} \frac{f^{(i)}(0)t^i}{(i+1)!} \sum_{0 \leq l \leq i+1} \binom{i+1}{l} B_l \alpha^{i+1-l} + O(t^{M-1})$$

を得る. ここで $B_i(x) = \sum_{0 \leq l \leq i} \binom{i}{l} B_l x^{i-l}$ より式 (6.1) を得る. $\square$

さて, 補題 6.6 を用いることで ^{フオリス} 偽 テータ関数 $F_{Q,\varepsilon}(1/k + t\sqrt{-1}/2\pi)$ の $t \rightarrow +0$ に関する漸近展開が得られるが, t の負冪の項も現れてしまうという問題がある. この問題は一変数二次形式の場合には周期写像の総和が 0 (命題 6.5 においては $\sum_{n \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \chi(n) = 0$ に対応する) という性質から解消されるが, 二変数二次形式の場合にはより複雑である. この負冪における t の係数の消滅性こそが **重み付き Gauss 和の消滅性**なのである.

7 重み付き Gauss 和の消滅性

本稿の締めくくりとして, 主定理の証明の核心部である **重み付き Gauss 和の消滅性**について述べる.

命題 7.1 (重み付き Gauss 和の消滅性, [MM21, Proposition 4.2 (ii)]). 任意の写像 $C: \mathbb{Q}/k\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し

$$\sum_{\gamma = {}^t(\alpha, \beta) \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)/k\mathbb{Z}^2} \varepsilon(\gamma) e\left(\frac{h}{k} Q(\gamma)\right) C(\alpha) = \sum_{\gamma = {}^t(\alpha, \beta) \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)/k\mathbb{Z}^2} \varepsilon(\gamma) e\left(\frac{h}{k} Q(\gamma)\right) C(\beta) = 0.$$

証明のポイントは周期写像 ε が以下の条件を満たすことである.

仮定 7.2. (i)

$$\sum_{\gamma \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2} \varepsilon(\gamma) = 0.$$

(ii) $\varepsilon(\gamma) \neq 0$ なる $\gamma = {}^t(\alpha, \beta) \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)$ に対し α, β の既約分数表示の分母はそれぞれ $2M, 2N$ である.

(iii) $\varepsilon(\gamma) \neq 0$ なる $\gamma = {}^t(\alpha, \beta) \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)$ に対し

$$M\alpha \bmod \mathbb{Z}, \quad N\beta \bmod \mathbb{Z}, \quad M\alpha^2 \bmod \mathbb{Z}, \quad N\beta^2 \bmod \mathbb{Z}$$

は γ によらない.

命題 7.1 の証明のアイデアは [BMM20, Theorem 4.1] に基づく. [BMM20, Theorem 4.1] の設定や証明は非常に複雑だが, 整理すると次の主張を示している (以下に記す主張は [BMM20, Theorem 4.1] よりも仮定が若干緩くなっている).

命題 7.3. 写像 $\varepsilon': (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \{\pm 1, 0\}$ は仮定 7.2 (i) (ii) を満たし, $\varepsilon'(\gamma) \neq 0$ なる $\gamma = {}^t(\alpha, \beta) \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)$ に対し $2M\alpha^2 \bmod \mathbb{Z}, 2N\beta^2 \bmod \mathbb{Z}$ は γ の取り方によらないと仮定する. このとき

$$\sum_{\gamma \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)/k\mathbb{Z}^2} \varepsilon'(\gamma) e\left(\frac{h}{k} 2Q(\gamma)\right) = 0.$$

命題 7.1 と命題 7.3 で指数関数内の二次形式の形が異なるのは, $\varepsilon(\gamma) \neq 0$ なる $\gamma \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)$ に対し, 仮定 7.2 の下では $Q(\gamma) \bmod \mathbb{Z}$ が γ の取り方によらない一方で, 命題 7.1 の仮定の下では $2Q(\gamma) \bmod \mathbb{Z}$ が γ の取り方によらないことに由来する.

命題 7.1 も命題 7.3 も証明の方針は同じである. 本稿では紙面の都合上命題 7.3 の証明のみを記す.

証明. 仮定 7.2 (i) より

$$\sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2/k\mathbb{Z}^2} e\left(\frac{h}{k} 2Q(\mu + \gamma)\right)$$

が $\varepsilon(\gamma) \neq 0$ なる $\gamma \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)$ の取り方によらないことを示せば良い.

$\gcd(2M, k) > 1$ のとき.

$$\sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2 / k\mathbb{Z}^2} e\left(\frac{h}{k} 2Q(\mu + \gamma)\right) = e\left(\frac{h}{k} 2Q(\gamma)\right) \sum_{n \in \mathbb{Z} / k\mathbb{Z}} e\left(\frac{h}{k} 2(Ncn^2 + 2Nn(M\alpha + c\beta))\right) G_n$$

と書ける. ただし

$$G_n := \sum_{m \in \mathbb{Z} / k\mathbb{Z}} e\left(\frac{h}{k} 2(Mam^2 + 2Mm(a\alpha + N(\beta + n)))\right)$$

とおいた. このとき $G_n = 0$ を示せばよい. ここで $r := 2M\alpha, s := 2N\beta \in \mathbb{Z}$ とおくと $\gcd(r, 2M) = 1$ である. $g := \gcd(2hMa, k)$ とおくと, 古典的に知られている一変数二次形式の Gauss 和の消滅性 ([MM21, Lemma 4.3]) より $g \nmid 2h(ar + M(s + 2Nn))$ なら $G_n = 0$ である. $g' := \gcd(2M, k)$ は g の約数なので $g' \nmid 2h(ar + M(s + 2Nn))$ を示せばよい. 仮定より $g' > 1$ であることに注意する.

k が奇数のとき, $g' = \gcd(M, k)$ は奇数なので $\gcd(g', 2) = 1$ である. また $ac - MN = 1$ より $\gcd(g', a) = 1$ であり, $\gcd(r, 2M) = 1$ より $\gcd(g', r) = 1$ である. 仮定より $\gcd(h, k) = 1$ なので $\gcd(g', h) = 1$ である. よって $\gcd(g', 2har) = 1$ である. ゆえに $2h(ar + M(s + 2Nn)) \equiv 2ar \not\equiv 0 \pmod{g'}$ を得る.

k が偶数のとき, $k' := k/2, g'' := \gcd(M, k) = g'/2$ とおくと

$$\frac{2h(ar + M(s + 2Nn))}{g'} = \frac{har}{g''} + \frac{M}{g''}(s + 2Nn) \equiv \frac{har}{g''} \not\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$$

を得る.

以上より, 全ての場合で $g' \nmid 2ar' + 2Msn$ が示された.

$\gcd(2N, k) > 1$ のときも $\gcd(2M, k) > 1$ の場合と同様に 0 に等しいことが示される.

$\gcd(2M, k) = \gcd(2N, k) = 1$ のとき. 仮定より $2MM^* \equiv 2NN^* \equiv 1 \pmod{k}$ を満たす整数 $M^*, N^* \in \mathbb{Z}$ が取れる. 任意の $\gamma \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)$ に対し $\gamma^* := (2MM^*\alpha, 2NN^*\beta) \in \mathbb{Z}^2$ とおくと

$$2S(\gamma - \gamma^*) = 2 \begin{pmatrix} Ma & MN \\ MN & Nc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 - 2MM^*)\alpha \\ (1 - 2NN^*)\beta \end{pmatrix} \in k\mathbb{Z}^2$$

であるので

$$Q(\mu + \gamma) - Q(\mu + \gamma^*) = Q(\gamma) - Q(\gamma^*) + 2^t \mu S(\gamma - \gamma^*) \equiv Q(\gamma) - Q(\gamma^*) \pmod{k\mathbb{Z}}$$

を得る. よって

$$\sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2 / k\mathbb{Z}^2} e\left(\frac{h}{k} 2Q(\mu + \gamma)\right) = e\left(\frac{h}{k} 2(Q(\gamma) - Q(\gamma^*))\right) \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2 / k\mathbb{Z}^2} e\left(\frac{h}{k} 2Q(\mu)\right)$$

が成り立つ. 従って $2(Q(\gamma) - Q(\gamma^*)) \pmod{k\mathbb{Z}}$ が γ によらないことを示せばよい. ここで

$$2Q(\gamma^*) \equiv 2Ma\alpha^2 \cdot 2MM^* + 4MN\alpha\beta + 2Nc\beta^2 \cdot 2NN^* \pmod{k\mathbb{Z}}$$

なので

$$2(Q(\gamma) - Q(\gamma^*)) \equiv 2Ma\alpha^2(1 - 2MM^*) + 2Nc\beta^2(1 - 2NN^*) \pmod{k\mathbb{Z}}$$

であり, 仮定より $2M\alpha^2, 2N\beta^2$ は $\varepsilon(\gamma) \neq 0$ なる $\gamma = (\alpha, \beta) \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)$ の取り方によらないので, $2(Q(\gamma) - Q(\gamma^*)) \pmod{k\mathbb{Z}}$ も γ によらない. $\square$

謝辞

指導教員である山内卓也先生には私の研究生生活を通して懇切丁寧にご指導頂きました。東北大学の寺嶋郁二先生には様々なご助言を頂きました。九州大学の樋上和弘先生には研究へのアドバイスを頂きました。名古屋大学の松坂俊輝さんには多くのコメントを頂きました。神戸大学の森本和輝先生と北里大学の宮崎直先生には2022年1月の研究集会「RIMS 共同研究 (公開型) 保型形式, 保型 L 関数とその周辺」にて大変お世話になりました。共同研究者の森祥仁くんには本研究のお誘いを頂き、トポロジーに関する知識を教えて頂きました。また本研究はJSPS 科研費 JP20J20308 の助成を受けたものです。ここに感謝いたします。

本稿および [MM21]	[BMM20]
$w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$	$-b_3, -b_4, -b_1, -b_2, -b_5, -b_6$
$\mu = {}^t(m, n)$	$\mathbf{n} = {}^t(n_1, n_2)$
$\begin{pmatrix} Ma & MN \\ MN & Nc \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} l_{33} & l_{34} \\ l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} N_1\mu_1 & N_1N_2/2 \\ N_1N_2/2 & N_2\mu_3 \end{pmatrix} = \frac{L}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_3 \end{pmatrix}$
$M = w_3w_4$	$N_1/2 = b_1b_2$
$N = w_5w_6$	$N_2/2 = b_5b_6$
$a = -w_2w_5w_6 + w_5 + w_6$	$l_{33}/b_1b_2 = \mu_1 = b_5b_6(b_4 - 1/b_5 - 1/b_6)$
$c = -w_1w_3w_4 + w_3 + w_4$	$l_{44}/b_5b_6 = \mu_3 = b_1b_2(b_3 - 1/b_1 - 1/b_2)$
$\gcd(M, N)$	$L/2 = \gcd(b_1b_2, b_5b_6)$
$Q_-(\mu) = Mam^2 + 2MNMn + Ncn^2$	$Q_1(\mathbf{n})/2 = {}^t\mathbf{n}A\mathbf{n} = LQ(\mathbf{n})/2 = L(\sigma_1n_1^2 + 2\sigma_2n_1n_2 + \sigma_3n_2^2)/2$
$\gamma = {}^t(\alpha, \beta) \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)$	$\boldsymbol{\alpha} = {}^t(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{S}$
$\varepsilon(\gamma)$	$\varepsilon(\boldsymbol{\alpha})$
$F_{Q_-, \varepsilon}(\tau)$	$F_{\mathcal{S}, Q, \varepsilon}(\tau)$
$\{\gamma \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2) \mid \varepsilon(\gamma) \neq 0\}$	$\mathcal{S}$
$\{\gamma \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2) \mid \varepsilon(\gamma) = 1\}$	$\mathcal{S}_1$
$\{\gamma \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2) \mid \varepsilon(\gamma) = -1\}$	$\mathcal{S}_2$

表 1: 本稿および [MM21] と [BMM20, Section 4 and 5] の記号の対応

参考文献

- [AM20] J. Andersen and W. Mistegård. Resurgence analysis of quantum invariants of Seifert fibered homology spheres. September 2020. arXiv:1811.05376v3.
- [BFOR17] Kathrin Bringmann, Amanda Folsom, Ken Ono, and Larry Rolin. *Harmonic Maass forms and mock modular forms: theory and applications*, volume 64 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.
- [BKM19a] Kathrin Bringmann, Jonas Kaszian, and Antun Milas. Higher depth quantum modular forms, multiple Eichler integrals, and $\mathfrak{sl}_3$ false theta functions. *Res. Math. Sci.*, 6(2):Paper No. 20,

- 41, 2019.
- [BKM19b] Kathrin Bringmann, Jonas Kaszian, and Antun Milas. Vector-valued higher depth quantum modular forms and higher Mordell integrals. *J. Math. Anal. Appl.*, 480(2):123397, 22, 2019.
- [BM15] Kathrin Bringmann and Antun Milas. $\mathcal{W}$ -algebras, false theta functions and quantum modular forms, I. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (21):11351–11387, 2015.
- [BMM20] Kathrin Bringmann, Karl Mahlburg, and Antun Milas. Higher depth quantum modular forms and plumbed 3-manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 110(10):2675–2702, 2020.
- [DT07] Florian Deloup and Vladimir Turaev. On reciprocity. *J. Pure Appl. Algebra*, 208(1):153–158, 2007.
- [FIMT21] Hiroyuki Fuji, Kohei Iwaki, Hitoshi Murakami, and Yuji Terashima. Witten – reshetikhin – turaev function for a knot in seifert manifolds. *Communications in Mathematical Physics*, 2021.
- [GPPV20] Sergei Gukov, Du Pei, Pavel Putrov, and Cumrun Vafa. BPS spectra and 3-manifold invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 29(2):2040003, 85, 2020.
- [Hik05] Kazuhiro Hikami. On the quantum invariant for the Brieskorn homology spheres. *Internat. J. Math.*, 16(6):661–685, 2005.
- [Hik06] Kazuhiro Hikami. On the quantum invariants for the spherical Seifert manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 268(2):285–319, 2006.
- [LZ99] Ruth Lawrence and Don Zagier. Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds. volume 3, pages 93–107. 1999. Sir Michael Atiyah: a great mathematician of the twentieth century.
- [MM21] Akihito Mori and Yuya Murakami. Witten-reshetikhin-turaev invariants, homological blocks, and quantum modular forms. *arXiv:2110.10958*, 2021.
- [MT21] Toshiki Matsusaka and Yuji Terashima. Modular transformations of homological blocks for Seifert fibered homology 3-spheres. *arXiv:2112.06210*, 2021.
- [Neu80] Walter D. Neumann. An invariant of plumbed homology spheres. In *Topology Symposium, Siegen 1979 (Proc. Sympos., Univ. Siegen, Siegen, 1979)*, volume 788 of *Lecture Notes in Math.*, pages 125–144. Springer, Berlin, 1980.
- [Neu81] Walter D. Neumann. A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 268(2):299–344, 1981.
- [Ono04] Ken Ono. *The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q -series*, volume 102 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [RT91] N. Reshetikhin and V. G. Turaev. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent. Math.*, 103(3):547–597, 1991.
- [Sil21] Andrew Sills. 魅惑のロジャーズ・ラマヌジャン恒等式. 共立出版, 2021. 高瀬幸一 (翻訳) .
- [Zag06] D. Zagier. *The Mellin transform and other useful analytic techniques*, pages 305–323. Springer, Berlin, 2006.
- [Zag10] Don Zagier. Quantum modular forms. In *Quanta of maths*, volume 11 of *Clay Math. Proc.*, pages 659–675. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.