

有限多重ゼータ値 $\bmod p$ と多重ゼータ値の関係式

金子 昌信 (九州大学数理学研究院)

多重ゼータ値, 等号付き多重ゼータ値はそれぞれ無限級数

$$\zeta(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \dots > m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}}$$

および

$$\zeta^*(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}}$$

で定義される実数であるが, 素数 p を固定して, この和を p の手前で打ち切った有限和

$$\zeta_{(p)}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{p-1 \geq m_1 > m_2 > \dots > m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}}$$

および

$$\zeta_{(p)}^*(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{p-1 \geq m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}}$$

を考える. これはすでに Hoffman [3] はじめ何人かの人が研究している対象であるが, 正直なところあまり関心を持っていなかった. ところが数年前ある人と話したのがきっかけで少し真面目に眺めてみると, 一つ面白いことに気がついた. それで興味を持って, しばらくして Hoffman のある定理から類推を働かせることによって等号付き多重ゼータ値の関係式に関するある予想を立てることができ, これはすぐに大野さんが証明した. 今回何か話さないと言うことで, これと言って新しい材料を持たなかった私は, もう少しこの手の類推がきかないかと思って有限多重ゼータに関する実験を行い, いくばくかの観察をすることが出来たのでそれをご報告したい.

まず, 別の所にも書いたことがあることではあるが, 重複を厭わず, このようなことを考えるきっかけとなった Hoffman の二つの命題を紹介する. 以下常に p は固定された一つの奇素数とする. 二つの整数 n と k (ただし $n \geq 0$) に対して決まる有理数 $C_n^{(k)}$ を

$$\frac{Li_k(1 - e^{-t})}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}$$

で定義する. これは

$$\frac{Li_k(1 - e^{-t})}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{B}_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}$$

で定義される「多重ベルヌーイ数」の別バージョンである. (ここに整数 k に対し $Li_k(t)$ は形式的べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^k}$ を表す.) $k=1$ とすると古典的なベルヌーイ数 B_n が得られる.

$B_1 = -1/2$ となる方の母関数 $t/(e^t - 1)$ を一般化したのが前者で, 後者は $te^t/(e^t - 1)$ の一般化である. ベルヌーイ数の一般化はこれまで様々なものが考えられてきている. 「多重化」としては, 母関数のべき乗を考える「高次ベルヌーイ数」(Carlitz) があるが, 私は $\mathbb{B}_n^{(k)}$ はそれよりは良い一般化であるとひそかに信じている.

定理 (Hoffman [3]) $p > k, n$ とする. このとき

1)

$$\zeta_{(p)}^*(k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}) \equiv (-1)^n C_{p-1-n}^{(k-1)} \pmod{p}.$$

2)

$$(-1)^n \zeta_{(p)}^*(k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}) \equiv (-1)^k \zeta_{(p)}^*(n, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}) \pmod{p}.$$

Hoffman は 1) の右辺を第二種スターリング数を含むある和の形で書いているのであるが, $C_n^{(k)}$ に関して以前証明した公式を使うとこのようにすっきりと書けるといのがさやかな発見であった.

1) の合同式は (これも何度も書くが) 故荒川恒男さんと [2] で導入したある種のゼータ関数 $\xi_k(s)$ を仲介させて眺めると大変面白い. $\xi_k(s)$ ($k \geq 1$) は $\Re(s) > 0$ に対して積分

$$\xi_k(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} Li_k(1 - e^{-t}) dt$$

で定義され, 全平面に解析接続される正則関数である. $\xi_1(s) = s\zeta(s+1)$ となっている. 大野さんの結果によれば ([6, Theorem 2]), この関数の正の整数点での値が

$$\xi_k(n) = \zeta^*(k+1, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で与えられる. 一方負整数点での値は

$$\xi_k(-n) = (-1)^n C_n^{(k)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と, 多重ベルヌーイ数になる. 従って Hoffman の定理 1) の左辺は $\xi_{k-1}(n)$ の有限類似, 右辺は $\xi_{k-1}(n-p+1)$ であり,

$$\xi_{k-1}(n) = \zeta^*(k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}) \xrightarrow{\text{打ち切り}} \zeta_{(p)}^*(k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}) \xrightarrow{\pmod{p}} \xi_{k-1}(n-(p-1))$$

ということになっている. すなわち, $\xi_{k-1}(n)$ を与える無限級数 $\zeta^*(k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1})$ を, 素数 p を決めて分母に p が出る手前で打ち切って得られる有限和を $\pmod{p}$ すると, $\xi_{k-1}(s)$ の n を $p-1$ だけ左にシフトした点 $n-p+1$ での値に p を法として合同になるというのである. $p-1$ シフトして合同, というのは Kummer の合同式など p -進 L 関数の連続性を思い起こさせるがここでの現象はそれとは異なる (と思う). これは一体何であろうか. 関数 $\xi_k(s)$ のまだ明らかになっていない数論的な性質の表れなのであろうか.

さてここで, $p > k+1$ であれば「有限リーマンゼータ値」は $\pmod{p}$ で 0 であること,

$$\zeta_{(p)}(k) = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{(p-1)^k} \equiv 0 \pmod{p}$$

に注意する. 従ってある量が有限リーマンゼータ値で書ければそれは 0 である. 例えば有限多重ゼータ値も「調和積」の規則は満たすから,

$$\zeta_{(p)}(k_1)\zeta_{(p)}(k_2) = \zeta_{(p)}(k_1, k_2) + \zeta_{(p)}(k_2, k_1) + \zeta_{(p)}(k_1 + k_2)$$

が成り立つ。これより

$$\zeta_{(p)}(k_2, k_1) \equiv -\zeta_{(p)}(k_1, k_2) \pmod{p}$$

である。このことと Hoffman の定理 2) から類推し数値実験を行い、次の結果を予想した。それは間もなく大野氏により証明され定理となった。

定理 (大野-金子 [5]) $n, k \geq 2$ とするとき

$$(-1)^n \zeta^*(k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}) - (-1)^k \zeta^*(n, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}) \in \mathbf{Q}[\zeta(2), \zeta(3), \zeta(5), \dots].$$

今回試みたことはもう少しこのような類推が効かないか調べようということで、いくつか得た知見を書き記すが、もとより組織的なものでもなく証明の試みも殆ど行っていない。興味を持たれた方が追求して下さいと思う。

まず証明できることから。

命題 すべての $n = 1, 2, \dots$ に対し

$$\zeta_{(p)}(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_n) \equiv 0 \pmod{p}$$

が成り立つ。

証明は、調和積だけを用いて

$$n \zeta_{(p)}(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_n) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \zeta_{(p)}(2m) \zeta_{(p)}(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n-m})$$

が成り立つことを使った帰納法による。この式自体も帰納法により証明される。同様のやり方で (p がしかるべき大きさ以上という条件の下で)

$$\zeta_{(p)}(\underbrace{k, k, \dots, k}_n) \equiv 0 \pmod{p}$$

も証明される。

$\zeta(2, 2, \dots, 2)$ と同様 $\zeta(3, 1, \dots, 3, 1)$ も π べきの有理数倍であることが知られているが、次は成り立つだろうか。

$$?? \quad \zeta_{(p)}(3, 1, \dots, 3, 1) \equiv 0 \pmod{p} \quad ??$$

また

$$?? \quad \zeta_{(p)}(3, 1, \dots, 3, 1, 3) \equiv 0 \pmod{p} \quad ??$$

はどうか。ちなみに

$$\zeta(\underbrace{3, 1, \dots, 3, 1, 3}_{2n}) = \frac{1}{4^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \zeta(4m+3) \zeta(\underbrace{4, \dots, 4}_{n-m})$$

である。左辺の双対をとった $\zeta(2, 1, 3, 1, \dots, 3, 1)$ の有限類似を考えるとこれは $\text{mod } p$ で 0 にはならない。例えば Zhao, Hoffman は

$$\zeta_{(p)}(2, 1) \equiv B_{p-3} \text{ mod } p$$

を示している（右辺はベルヌーイ数）。

リーマンゼータ値で書けるものといえは有名な和公式がある。つまり k, n を固定するとき

$$\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = k \\ k_1 \geq 2}} \zeta(k_1, \dots, k_n) = \zeta(k)$$

が成り立つ。そこでその有限類似として

$$S_p^0(k, n) := \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = k \\ k_1 \geq 2}} \zeta_{(p)}(k_1, \dots, k_n)$$

および

$$S_p^1(k, n) := \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = k \\ \forall k_i \geq 1}} \zeta_{(p)}(k_1, \dots, k_n)$$

を考える。（多重ゼータ値は $k_1 > 1$ が収束条件として必要であるが、有限和はもちろんその条件がなくとも考え得る。）数値実験が示唆するのは次の合同式である：

$$?? \quad S_p^0(k, n) \equiv \left(1 + (-1)^n \binom{k-1}{n-1} \right) \frac{B_{p-k}}{k} \text{ mod } p \quad ??$$

$$?? \quad S_p^1(k, n) \equiv 0 \text{ mod } p \quad ??$$

また

$$?? \quad \text{定義で } \zeta_{(p)} \text{ を } \zeta_{(p)}^* \text{ に変えても } (-1)^n \text{ 倍されるだけ } ??$$

B_{p-k} はベルヌーイ数であり、 $S_p^0(k, n)$ の合同式をリーマンゼータ値を用いて書くならば

$$?? \quad S_p^0(k, n) \equiv \left(1 + (-1)^n \binom{k-1}{n-1} \right) \zeta(k+1-p) \text{ mod } p \quad ??$$

となる。ちなみに ζ^* の和公式は

$$\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = k \\ k_1 \geq 2}} \zeta^*(k_1, \dots, k_n) = \binom{k-1}{n-1} \zeta(k)$$

である。なかなか示唆的ではないか。

通常の高重ゼータ値で発散するようなインデックスを扱うのに正規化という方法がある。 ζ_{reg} で「シャッフル正規化」([4], [1] を参照) を表すとする。このとき

$$?? \quad \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = k \\ \forall k_i \geq 1}} \zeta_{reg}(k_1, \dots, k_n) = (-1)^{n-1} \zeta(k-n+1, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}) \quad ??$$

(これは証明可能であろう。)

重さ, 深さ, および「高さ」(2以上のインデックスの個数)を固定したとき, それらをもつ多重ゼータ値すべての和がリーマンゼータ値の有理係数多項式で書けるという大野-Zagier の定理 [7] というものがある. これの ζ^* 版はそのままではどうやら成り立たないようであるが, $X_0(k, n, s)$ で重さ k , 深さ n , 高さ s の ζ^* 値全体の和を表すとき

予想 (大野) $k, n \geq s \geq 1$ とするとき,

$$(-1)^n X_0(k+n+1, n+1, s) - (-1)^k X_0(k+n+1, k+1, s) \in \mathbf{Q}[\zeta(2), \zeta(3), \zeta(5), \dots].$$

$s=1$ の場合が先の定理 (大野-金子) である. これの有限和版を考える. ζ^* を $\zeta_{(p)}^*$ に変えたものを $X_0^{(p)}$ と書く. このとき, $p > k, n \geq s \geq 1$ ただし $s \geq 2$ ならば $p-1 \nmid k+n+1$ と仮定すれば,

$$?? \quad (-1)^n X_0^{(p)}(k+n+1, n+1, s) \equiv (-1)^k X_0^{(p)}(k+n+1, k+1, s) \pmod{p} \quad ??$$

$$?? \quad \zeta_{(p)}^* \text{ を } \zeta_{(p)} \text{ に変えたものは前に掛かる } (-1)^n, (-1)^k \text{ を落として成立} \quad ??$$

以上, ちょっとしたお遊びのようなものであるが, 有限類似からもとの多重ゼータ値の関係式を他にも発見できることがあれば面白いであろう.

文献リスト

- [1] 荒川恒男, 金子昌信, 「多重ゼータ値入門」, 九州大学 MI レクチャーノート, vol. 23, (2010).
- [2] T. Arakawa and M. Kaneko, *Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions*, Nagoya Math. J. **153** (1999), 1–21.
- [3] M. Hoffman, *Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums*, preprint, arXiv:math/0401319v2 [math.NT] 17 Aug 2007.
- [4] K. Ihara, M. Kaneko, and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. vol. 142-02, 307–338, (2006).
- [5] M. Kaneko and Y. Ohno, *On a kind of duality of multiple zeta-star values*, to appear in International Journal of Number Theory.
- [6] Y. Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Th. **74** (1999), 39–43.
- [7] Y. Ohno and D. Zagier, *Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height*, Indag. Math. (N. S.) **12** (2001), 483–487.