

$SU(2,2)$ の Cohomological Hardy Space

東木理 松本 久義

(Hisayosi Matumoto)

G を connected real semisimple linear Lie group
とし、 $\mathfrak{g}$ をその Lie algebra とする。また

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

をその graded 分解 (i.e. $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$ となる) とする。すると $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ は $\mathfrak{g}$ の maximal parabolic subalgebra である。これに対応する G の maximal parabolic subgroup を P としたとき、 P の Levi 分解

$$P = LN$$

を L の Lie algebra が $\mathfrak{g}_0$, N の Lie algebra が $\mathfrak{g}_1$ となるようにしておく。すると L は $\mathfrak{g}_1$ に Adjoint action で作用するが、 $(L, \mathfrak{g}_1)$ は real な Prohomogeneous vector space となる。

ここで興味深いのは $(L, \mathfrak{g}_1)$ が 相対不変式を持つ場合である。

例としては、 K を G の maximal compact subgroup としたとき、 G/K が Hermitian symmetric space となり G/P がその $\check{S}$ ilov boundary と

なるような場合はそうなる。そこで以前から G の P_1 に対応する退化
 系列表現の分解と $(L, \mathfrak{g}_1)$ の $\mathfrak{o}$ の分解に対応して得るということが
 いくつかの例についてやられてきた。(例えば $[K-V]$, また $[Gr]$ など)
 類似の状況における結果である。) そこで先に述べた G/K が Hermite
 対称空間になる場合については $(L, \mathfrak{g}_1)$ は必ず proper な convex
 cone になるような open orbit を持つ。この orbit に対応する
 退化系列表現の部分表現は、実は G/K 上の正則関数からなる空間の
 表現として実現され、その $\mathfrak{sl}_2$ 境界への境界値を取ることで退化系列
 への埋め込みが定義できる。たとえば $SL(2, \mathbb{R})$ においては、open orbit
 は二つある。それが丁度、上半平面、下半平面上の正則関数の
 空間 (例えば Hardy space) に実現される表現に対応している。しか
 より複雑な群になると、それで退化系列のすべての既約成分が得られる
 わけではない。つまり $(L, \mathfrak{g}_1)$ に proper convex でないような
 open orbit が現れて、これに対応する表現を考えなければならなくなる。
 一方この話とは別の文脈から大島利雄先生は "Hermite 対称空間" の外
 側に現れる一般の semisimple symmetric space 上の cohomology
 を考えることを提唱していた。^{*} (この場合は Stein でないから section を考えても
 意味がないのである。) そこで、 $(L, \mathfrak{g}_1)$ の各 open orbit に対応する
 表現は "一般の semisimple symmetric space 上の cohomology の空間"
 に実現されるのではないかと期待されるのであるか。ここでは $SU(2, 2)$
 について得られた結果について述べてみたい。

^{*} これは Zuckermann が代数的に構成は表現とも関連している。 $[V]$, $[V \otimes \mathbb{Z}]$,
 $[R-S-W]$ などを参照のこと。

§1. Some representation in degenerate series of $SU(2,2)$

1.1. Y は 4×4 複素行列, 2×2 複素行列

A, B, C, D をつらて

$$Y = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

などとして書く記法を用いる。

★ $F_{\mathbb{C}}$ を complex Grassmann manifold $\mathbb{C}^4$ の 2 次元部分空間からなるものとする。また $e_0 \in F_{\mathbb{C}}$ を 2 つの vector

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で張られる $\mathbb{C}^4$ の部分空間とする。すると $G_{\mathbb{C}} = SL(4, \mathbb{C})$ は $F_{\mathbb{C}}$ に transitive に act する。その e_0 の stabilizer は

$$P_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{C}} \right\}$$

となる。よって $F_{\mathbb{C}}$ は homogeneous space $G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ と同一視される。

次に $G_{\mathbb{C}}$ の real form G を次のように定める。

$$G = SU(2,2) = \left\{ Y \in G_{\mathbb{C}} \mid Y^* \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(ただし $Y^* = {}^t \bar{Y}$, $-$ は複素共役)

よって 4×4 複素行列 $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ が G に含まれるための必要十分条件は $AB^* = BA^*, AD^* - BC^* = I, CD^* = DC^*$ となる。

★ 次に $F_{\mathbb{C}}$ の G -orbit structure を考察しよう。(例は [W] を見よ)

p, q を $0 \leq p+q \leq 2$ なる正の整数としたとき。

$$O^{(p,q)} = \{ \chi \in F_{\mathbb{C}} \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ に対応する Hermitian form の } \chi \text{ への制限の符号が } (p,q) \}$$

とおく.

$$F_{\mathbb{C}} = \bigcup_{\substack{p,q \\ 0 \leq p+q \leq 2 \\ 0 \leq p, 0 \leq q}} O^{(p,q)} \quad (\text{disjoint union})$$

が、 $F_{\mathbb{C}}$ の G -orbital decomposition を与える。このうち open orbit は $O^{(2,0)}, O^{(0,2)}, O^{(1,1)}$ の3つでこれらをそれぞれ $\Gamma_0^+, \Gamma_0^-, \tilde{D}$ と書く。すると $\Gamma_0^{\pm}$ は Hermitian symmetric space $(SU(2,2)/S(U(2) \times U(2)))$ の構造を持つ。次に $e_{1,1} \in F_{\mathbb{C}}$ を2つの vector

$$\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で張られる $\mathbb{C}^4$ の2次元部分空間とすると、明らかに $e_{1,1} \in \tilde{D}$ となる。そこで 2×2 matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を J と書くことにする。すると $e_{1,1}$ における G の stabilizer H は次のように書ける。

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} AJ & -CJ \\ \hline JC & JA \end{array} \right) \mid AC^* = CA^*, AJA^* + CJC^* = I \right\}$$

そこで H は $S(U(1,1) \times U(1,1))$ と同型であり、 $\tilde{D}$ は symmetric space $SU(2,2)/S(U(1,1) \times U(1,1))$ に同視される。

次に $F_{\mathbb{C}}$ の G -closed orbit は $O^{(0,0)}$ の1つだけである。以下これを F と書く。そこで $e_0 \in F$ であり、 G の e_0 における stabilizer は

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \in G \right\}$$

なる G の maximal parabolic subgroup で F は G/P と同視される。

★ 次に $F_{\mathbb{C}}$ と F のある open cell を考察する。

$H(2) = \{2 \times 2 \text{ hermitian 行列}\}$ とする。また

$$\bar{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid X \in H(2) \right\} \subseteq G$$

$$\bar{N}_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{C}} \right\} \quad \text{ただし } X \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上の } 2 \times 2 \text{ hermitian 行列}$$

-orbit $\bar{N}_{\mathbb{C}} \cdot e_0$ は $F_{\mathbb{C}}$ の open dense set となり

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_1 + \bar{z}_2 & z_3 - i\bar{z}_4 \\ 0 & 1 & z_3 + i\bar{z}_4 & z_1 - \bar{z}_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot e_0 \hookrightarrow \begin{pmatrix} z_1 + \bar{z}_2 & z_3 - i\bar{z}_4 \\ z_3 + i\bar{z}_4 & z_1 - \bar{z}_2 \end{pmatrix} \hookrightarrow (z_1, \dots, z_4)$$

$\uparrow$
 $\bar{N}_{\mathbb{C}} \cdot e_0$

$\uparrow$
 $M_2(\mathbb{C})$

$\uparrow$
 $\mathbb{C}^4$

この対応を考えると、 $\bar{N}_{\mathbb{C}} \cdot e_0$ は複素 2×2 行列全体や $\mathbb{C}^4$ と同視される。また $\bar{N} \cdot e_0 \subseteq \bar{N}_{\mathbb{C}} \cdot e_0$ はこの対応により $H(2)$ あるいは $\mathbb{R}^4$ と同視される。また $\bar{N} \cdot e_0$ は F の open dense set となっている。

ここで以下 z_i を複素変数として、 $(i=1, \dots, 4)$

$$z_i = x_i + iy_i \quad (x_i, y_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, 4)$$

という記法を用いることにする。ここで open orbit $\Gamma_0^{\pm}$ については

実は $\Gamma_0^{\pm} \subseteq \bar{N}_{\mathbb{C}} \cdot e_0 \simeq \mathbb{C}^4$ が成り立つことに

$$\Gamma_0^+ = \{(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 > 0, y_1 > 0\}$$

$$\Gamma_0^- = \{(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 > 0, y_1 < 0\}$$

となる。これは Hermitian symmetric space の Tube domain となる。

実際には他ならない。また $\mathbb{R}^4 = H(2)$ は $\Gamma_0^{\pm}$ の Sier boundary と見られる。

一方, $D = \tilde{D} \cap \bar{N}_\mathbb{C} \cdot e_0$ とおくと, これは $\tilde{D}$ の open dense set で

$$D = \{(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 < 0\}$$

となる。

1.2

★ 以下 $[K-V]$ に従い, $\check{S}$ ilov boundary 上の関数空間に実現される G の表現を記述する。まず $L^2(H(\mathbb{Z}))$ を $H(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}^4$ と (たとひ Euclidean measure についての L^2 -space とする。 $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ とおき, $g \in G$ とし, $X \in H(\mathbb{Z})$ に対して

$$(T(g)f)(X) = (\det(CX+D))^{-2} f((AX+B)(CX+D)^{-1})$$

と定めると, $(AX+B)(CX+D)^{-1}$ は measure 0 を無視すれば well-defined で, $(T, L^2(H(\mathbb{Z})))$ は unitary 表現となる。

★ 実はこの表現は次のような line bundle の section の空間に実現される G の置換系列に属する表現に他ならない。

$$\text{まず } \gamma = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \in P_\mathbb{C} \text{ に対して}$$

$$\rho'(\gamma) = (\det D)^2$$

とおくと, ρ' は $P_\mathbb{C}$ の 1 次元正則表現となる。こゝで $L_{\rho'}$ を ρ' に同伴する $F_\mathbb{C} = G_\mathbb{C}/P_\mathbb{C}$ の homogeneous holomorphic line bundle とする。こゝで $L_{\rho'}$ の F の制限も $L_{\rho'}$ とおくと, $L_{\rho'}$ の hyperfunction global section の空間は次の集合と同一視される。

$$B(F, L_{p'}) =$$

$$\{f \in B(G) \mid f(gp) = p'(p)^{-1} f(g) \text{ for all } g \in G, p \in P\}$$

ここで $B(G)$ は G 上の hyperfunction 全体の集合

この $L_{p'}$ に対応する G の退化系表現は自然に unitary structure を与え、その open cell $N \cdot e_0$ 上の制限は実は

$$(T, L^2(H(\mathbb{Z})))$$

★ 次に $(T, L^2(H(\mathbb{Z})))$ の "Fourier 変換" を考えよう

まず $H(\mathbb{Z})$ の dual space / $\mathbb{R}$ $H(\mathbb{Z})^*$ を $H(\mathbb{Z})$ 上の 2次元形式

$\text{Tr}XY$ として $H(\mathbb{Z})$ と同一視できる

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & z_3 - iz_4 \\ z_3 + iz_4 & z_1 - z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 + v_2 & v_3 - iv_4 \\ v_3 + iv_4 & v_1 - v_2 \end{pmatrix}$$

$$= 2(z_1 v_1 + z_2 v_2 + z_3 v_3 + z_4 v_4)$$

となる。 $f \in L^2(H(\mathbb{Z}))$, $\xi \in H(\mathbb{Z})^*$ に対して

$$(\hat{f})(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int e^{-i \text{Tr} X \xi} f(X) dX$$

(dX は Euclidean measure)

なる Fourier 変換を考えよう $\hat{f}: L^2(H(\mathbb{Z})^*) \rightarrow L^2(H(\mathbb{Z}))$ と

この Fourier 変換である。ここで $g \in G, f \in L^2(H(\mathbb{Z})^*)$ に対して

$$\hat{T}(g)f = \hat{f}(T(g)X \hat{f})$$

とある。当然 $(\hat{T}, L^2(H(\mathbb{Z})^*))$ は $(T, L^2(H(\mathbb{Z})))$ と同型

な G の unitary 表現である。

★ ここで G の maximal parabolic subgroup

$$\bar{P} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}$$

と表わす。

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^*)^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in GL(2, \mathbb{C}), \det a \in \mathbb{R} \right\}$$

と表わす。 $\bar{P} = LN$ とかける。(これは $\bar{P}$ の Levi 分解である。)

==> $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^*)^{-1} \end{pmatrix} \in L$, $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$ に対して。

$$\left(\hat{T} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^*)^{-1} \end{pmatrix} f \right)(\xi) = (\det a)^2 f(a\xi a^*)$$

$$\left(\hat{T} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f \right)(\xi) = e^{i \operatorname{Tr} X \xi} f(\xi)$$

がわかるから。 $H(2)^*$ の π で Hermitian form としての '符号' が
それぞれ $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$ なるものの全体をそれぞれ
 V_+ , V , V_- とかく。

$$(2) \quad L^2(H(2)^*) = L^2(V_+) \oplus L^2(V) \oplus L^2(V_-)$$

は $\bar{P}$ の表現としての分解を与えていることがわかる。

Lemma 1.2.1 分解 (2) は $\bar{P}$ の表現としての既約分解になっている。

証明は容易

さらに $[K-V]$ ではより一般的な群 $(SU(n, n), Sp(2n+1, \mathbb{R}))$ に対して次を特別な場合として含むような結果が示されている。

Theorem 1.2.2 分解 (2) は G の表現としての既約分解になっている。

★ この場合 $L^2(V_{\pm})$ は Hermitian 対称空間上の Hardy space に実現される表現だから $L^2(V)$ をこれから問題にすることにする。

§2. Factorization of an Inverse Fourier Transformation

2.1

★ まず $H(z)^*$ に $\begin{pmatrix} v_1 + v_2 & v_3 - i v_4 \\ v_3 + i v_4 & v_1 - v_2 \end{pmatrix} \quad (v_1, \dots, v_4 \in \mathbb{R})$ と

座標を入れ $\mathbb{R}^4$ と同一視する。すると

$$V = \{(v_1, \dots, v_4) \in \mathbb{R}^4 \mid v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - v_4^2 < 0\}$$

となる。 $\Rightarrow$ $f \in L^2(V)$ の逆 Fourier 変換を与えるのであるが、

その前に f を proper (つまり全直線を含まない) な convex cone に

support をもつような関数の和に分解してそれぞれの逆 Fourier 変換

を考える ... ということをする。具体的には、以下のようにしていく。

$$S^2 = \{(v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^3 \mid v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = 1\}$$

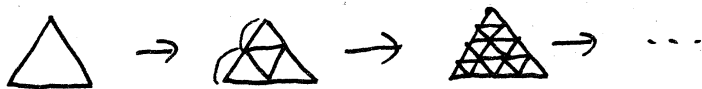
に $\mathbb{R}^3$ から induce した metric を入れ測地線 (つまり原点を通る $\mathbb{R}^3$ の Hypersurface と S^2 のまじわりの一部) による三角形分割で

すべての三角形が球面三角形 (つまり鋭角三角形 (但し直角は許す) で、

さらに同じ性質を持つような細分をいくらでもとれ。各三角形の diameter をいくらでも小さくしていくことができるもの考える。

Lemma 2.1.1 次のようにして作られた S^2 の三角形分割の系 $\{T_i\}$ 上の条件をみたす。

① S^2 に内接する正四面体を考え、その各面を



のように分割していく。その原点から S^2 への射影を考える。

証明は、鋭角三角形ということだけが問題だが直接計算すれば示せる。

★ さて どのような分割 (H) で十分細かいものを 1 つ 固定し、 Δ を、

$\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}$ を 頂点 とする その分割に現れる 1 つ の 3 角形 とする。

$$(\xi) = (\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \xi_4^{(1)}) \in \mathbb{R}^3, \sum_{j=2}^4 (\xi_j^{(1)})^2 = 1$$

また $\det \begin{pmatrix} \xi_2^{(1)} \\ \xi_3^{(2)} \\ \xi_4^{(3)} \end{pmatrix} > 0$ とするよう 111 順番を並べておく。

このとき $\mathbb{R}^4$ の 凸包も proper な cone を 次のように定める。

$$V_\Delta = \{ (v_1, \dots, v_4) \in V \mid \det \begin{pmatrix} \xi_2^{(1)} \\ \xi_3^{(2)} \\ v_1 \end{pmatrix} \geq 0 \text{ かつ } \det \begin{pmatrix} \xi_2^{(1)} \\ v_1 \\ \xi_3^{(2)} \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\text{かつ } \det \begin{pmatrix} v_1' \\ \xi_3^{(2)} \\ \xi_4^{(3)} \end{pmatrix} \geq 0 \text{ ならば } v' = (v_2, v_3, v_4) \}$$

以下 (H) の 3 角形の 集合 や 頂点の 集合 もすべて (H) で表すことにする。

Lemma 2.1.2 $V = \bigcup_{\Delta \in (H)} V_\Delta$ (measure 0 を 無視して disjoint)

証明 $V_\Delta = \{ (v_1, \dots, v_4) \in V \mid v_1 \text{ の 単位球面への projection が } \Delta \text{ の closure に } \lambda, 2 \text{ 通り} \}$

より明らか。

よって V_Δ の 定義 関数を χ_Δ とし $f \in L^2(V)$ に対して

$$f_\Delta = f \cdot \chi_\Delta \text{ とおく。}$$

$$f = \sum_{\Delta \in (H)} f_\Delta \quad (L^2\text{-function として})$$

2.2 再び 次の Lemma を示す。

Lemma 2.2.1 V_Δ は $S_\Delta = \bigcup_{\substack{i=1,2,3 \\ \varepsilon=\pm 1}} \{ (\varepsilon t, t h \xi_2^{(i)}, t h \xi_3^{(i)}, t h \xi_4^{(i)}) \in \mathbb{R}^4 \mid t \geq 0, h \geq 1 \}$

の 凸包 に 含まれる。

証明 $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in V_\Delta$ とする。もし $v_1 \neq 0$ ならば

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \bigcup_{i=1,2,3} \{(v_1, h|v_1\xi_2^{(i)}, h|v_1\xi_3^{(i)}, h|v_1\xi_4^{(i)}) \mid h \geq 1\}$$

の凸包に入ることは容易にわかる。 $v_1 = 0$ ならば十分小さな δ に対して

$$(\pm\delta, v_2, v_3, v_4) \in V_\Delta \quad \text{であることが明らか。}$$

そこで $\xi = (\xi_2, \xi_3, \xi_4)$ をある $\textcircled{H}$ の頂点として

$$W'_\xi = \{(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid |y_1| < \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 + \xi_4 y_4\}$$

$(z_i = x_i + iy_i, x_i, y_i \in \mathbb{R} \quad i=1, \dots, 4)$ であって、以下この記法は ~~使~~ 用する。

$$\text{よ、お、よ。} \quad \bigcup_{\xi \in \textcircled{H}} W'_\xi \text{ は } \{(y_1, \dots, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = 0\}$$

なる円錐に外接する多角錐 (ただし点対称でなく y_1 -軸の原点での折り返しで対称なもの) の外側についての Tube domain となる。以下これを $D_{\textcircled{H}}$ と書く。

Lemma 2.2.2 f'_Δ は $W'_{\xi^{(1)}} \cap W'_{\xi^{(2)}} \cap W'_{\xi^{(3)}}$ の上で正則である。
ただし Δ は $\textcircled{H}$ の三角形で $\xi^{(i)} \quad (i=1, 2, 3)$ は Δ の頂点とする。

証明 Lemma 2.2.1 より f'_Δ は

$$\begin{aligned} & \{(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid y_1 v_1 + \dots + y_4 v_4 > 0 \text{ for all } (v_1, \dots, v_4) \in \Delta\} \\ &= \bigcap_{i=1,2,3} \{(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid \varepsilon t y_1 + t h y_2 \xi_2^{(i)} + t h y_3 \xi_3^{(i)} + t h y_4 \xi_4^{(i)} > 0 \\ & \quad \text{for all } h \geq 1, t > 0, \varepsilon \neq \pm 1\} \\ &= \bigcap_{i=1,2,3} \{(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid y_2 \xi_2^{(i)} + y_3 \xi_3^{(i)} + y_4 \xi_4^{(i)} > |y_1|\} \\ &= \bigcap_{i=1,2,3} W_{\xi^{(i)}} \quad \text{正則} \end{aligned}$$

ここで ξ を $\mathbb{H}$ の任意の頂点と仮定す。

$$St(\xi) = (\cup \{ \xi \text{ と頂点を含む } \mathbb{H} \text{ の三角形の開包} \}) \text{ の閉核}$$

とおいたとき、

$$W_\xi = \left\{ (z_1, \dots, z_4) \in W_\xi \mid (y_2, y_3, y_4) \text{ の単位球への projection } \gamma \text{ が } St(\xi) \text{ に属する} \right\}$$

と置く。 W_ξ は凸集合になることが容易に分かるから Stein である。

また次が $\mathbb{H}$ の三角形がすべて鋭角三角形であることからわかる。

Lemma 2.2.3 $D_{\mathbb{H}} = \bigcup_{\xi \in \mathbb{H}} W_\xi$

$\mathcal{O}$ を正則関数の束の層とする。 $\Delta \in \mathbb{H}$ とし $\xi_\Delta^{(i)}$ ($i=1,2,3$) を

その頂点とする。

$f \in L^2(V)$ に対して $\bar{f}_\Delta \in \mathcal{O}(W_{\xi_\Delta^{(1)}} \cap W_{\xi_\Delta^{(2)}} \cap W_{\xi_\Delta^{(3)}})$ あり。

$$\varphi_{\mathbb{H}}(f) = \sum_{\Delta \in \mathbb{H}} \bar{f}_\Delta W_{\xi_\Delta^{(1)}} \wedge W_{\xi_\Delta^{(2)}} \wedge W_{\xi_\Delta^{(3)}}$$

と置く。
(ただし $\det \begin{pmatrix} \xi_\Delta^{(1)} \\ \xi_\Delta^{(2)} \\ \xi_\Delta^{(3)} \end{pmatrix} > 0$ となるように置く)

ただし、ここで Čech Cohomology の chain を外微分形式の記法で書いた。(c.f. [Ka] 第5章 §5 または [Pa])

ここで、 $\{W_\xi\}$ なる $D_{\mathbb{H}}$ の被覆は Stein 被覆で、(しかもその4つの共通部分はすべて空集合となるようにとてあるから、 $\varphi_{\mathbb{H}}(f)$ は cocycle となり

$$\varphi_{\mathbb{H}} : L^2(V) \longrightarrow H^2(D_{\mathbb{H}}, \mathcal{O}_{D_{\mathbb{H}}})$$

が定義される。

2.3

$$\text{次に } \Gamma_{\Theta}^+ = \{(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid (z_1, \dots, z_4) \notin D_{\Theta} \text{ かつ } y_1 \geq 0\}$$

$$\Gamma_{\Theta}^- = \{(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid (z_1, \dots, z_4) \notin D_{\Theta} \text{ かつ } y_1 \leq 0\}$$

なる $\mathbb{C}^4$ の閉集合を考える。

$$\text{すなわち } (\mathbb{C}^4 - \Gamma_{\Theta}^+) \cup (\mathbb{C}^4 - \Gamma_{\Theta}^-) = \mathbb{C}^4 - \mathbb{R}^4$$

$$(\mathbb{C}^4 - \Gamma_{\Theta}^+) \cap (\mathbb{C}^4 - \Gamma_{\Theta}^-) = D_{\Theta}$$

に注意すると次の Mayer-Vietoris 完全系列が得られる。

$$(2\frac{1}{2}) \dots \leftarrow H^{\ell+1}(\mathbb{C}^4 - \mathbb{R}^4, \mathcal{O}) \xleftarrow{\delta_{\Theta}} H^{\ell}(D_{\Theta}, \mathcal{O}) \leftarrow H^{\ell}(\mathbb{C}^4 - \Gamma_{\Theta}^+, \mathcal{O}) \oplus H^{\ell}(\mathbb{C}^4 - \Gamma_{\Theta}^-, \mathcal{O})$$

$\leftarrow \dots$

$$\text{すなわち } H^{\ell}(\mathbb{C}^4 - \Gamma_{\Theta}^{\pm}, \mathcal{O}) = H_{\Gamma_{\Theta}^{\pm}}^{\ell+1}(\mathbb{C}^4, \mathcal{O}) \quad \ell \geq 1$$

$$H^{\ell}(\mathbb{C}^4 - \mathbb{R}^4, \mathcal{O}) = H_{\mathbb{R}^4}^{\ell+1}(\mathbb{C}^4, \mathcal{O}) \quad \ell \geq 1$$

が $\mathbb{C}^4$ が Stein なることからいえる。

さらによく知られた結果より (たとえば [K-L] Théorème 1.2)

$$H_{\Gamma_{\Theta}^{\pm}}^{\ell}(\mathbb{C}^4, \mathcal{O}) = 0 \quad \text{for } \ell \neq 4.$$

また hyperfunction の 基本的な結果として

$$H_{\mathbb{R}^4}^{\ell}(\mathbb{C}^4) = \begin{cases} B(\mathbb{R}^4) & \ell = 4 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とある ($B(\mathbb{R}^4)$ は $\mathbb{R}^4$ 上の hyperfunction 全体)

18.

よって今まで述べたことは直ちに次を得る。

Lemma 2.3.1

$$H^g(D_{\oplus}, \theta) = 0 \quad g \neq 2, 0$$

また

$$0 \leftarrow H_{\oplus}^4(\mathbb{C}^4, \theta) \oplus H_{\oplus}^4(\mathbb{C}^4, \theta) \leftarrow B(\mathbb{R}^4) \xleftarrow{\delta_{\oplus}} H^2(D_{\oplus}, \theta) \leftarrow 0$$

は完全系列になる。

証明 $H^3(D_{\oplus}, \theta) = 0$ については $\{W_{\xi}\}$ なる Stein covering の 4) の intersection が空なことを示せばよい。

★ $\mathcal{U}^0 = \{W_{\xi}\}$ とおき、 $\Sigma^2(\mathcal{U}^0, \theta)$ を $\mathcal{U}^0$ なる

Stein covering についての $\mathbb{R}^4$ 上の cocycle の空間と置く。すると、

$$\Sigma^2(\mathcal{U}^0, \theta) \xrightarrow{b} B(\mathbb{R}^4)$$

なる boundary value を与える map が定まる。

($\{W_{\xi}\}$ の 3 つの intersection は proper convex open cone であるから)

一方 p を $H^2(D_{\oplus}, \theta)$ への自然な projection とする。

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} \Sigma^2(\mathcal{U}^0, \theta) & \xrightarrow{b} & B(\mathbb{R}^4) \\ \downarrow p & & \parallel \\ H^2(D_{\oplus}, \theta) & \xrightarrow{\delta_{\oplus}} & H^2(\mathbb{C}^4 - \mathbb{R}^4, \theta) \end{array}$$

なる図式が得られる。そして具体的に Covering をとって計算すると、次の Lemma が得られる。

Lemma 2.3.2 図式 (3) は可換である。

次に $(H)'$ を (H) の系部分とするとき $D_{(H)'} \supseteq D_{(H)}$ は明らかより

$$(4) \quad L^2(V) \begin{array}{l} \xrightarrow{\varphi_{(H)}} H^2(D_{(H)}, \mathcal{O}) \\ \searrow \varphi_{(H)'} \quad \downarrow \text{restriction} \\ H^2(D_{(H)'}, \mathcal{O}) \end{array}$$

なる図式が得られる。

Lemma 2.3.3 図式 (4) は可換である。

証明

$$L^2(V) \begin{array}{l} \xrightarrow{\varphi_{(H)}} H^2(D_{(H)}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\delta_{(H)}} B(\mathbb{R}^4) \\ \searrow \varphi_{(H)'} \quad \downarrow \text{restriction} \quad \nearrow \delta_{(H)'} \\ H^2(D_{(H)'}, \mathcal{O}) \end{array}$$

と書く。Mayer-Vietoris 完全系列の Functoriality より
右の三角形は可換。また $\delta_{(H)} \circ \varphi_{(H)} = \delta_{(H)'} \circ \varphi_{(H)'} = \tau^{-1}$ が
Lemma 2.3.2 よりいえる。さらに $\delta_{(H)'}$ は 1-1 であるから
Lemma が従う。

Lemma 2.3.3 により (H) についての inverse limit の map

$$\varprojlim_{(H)} H^2(D_{(H)}, \mathcal{O}) \xleftarrow{\varphi'} L^2(V)$$

が定まる。一方 $D = \bigcup_{(H)} D_{(H)}$ より

$$\varprojlim_{\mathbb{H}} H^2(D_{\mathbb{H}}, \mathcal{O}) \xleftarrow{\varphi} H^2(D, \mathcal{O})$$

なる canonical map φ が存在する。こゝで Lemma を引用する。(同様なことは [K] 4.21 にのっている)

Lemma 2.3.4 ([K-I] Lemme 1.1.6)

X を位相空間, $\mathcal{F}$ を X の sheaf とする。

U_n を X の open set の増加列で $\bigcup_n U_n = X$ とするものとする。このとき canonical map

$$H^{p-1}(U_{n+1}, \mathcal{F}) \rightarrow H^{p-1}(U_n, \mathcal{F})$$

がすべて surjective なる

$$\varprojlim_n H^p(U_n, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^p(X, \mathcal{F})$$

↑
canonical map

こゝでは $H^1(D_{\mathbb{H}}, \mathcal{O}) = 0$ が Lemma 2.3.1 よりいえたから, Lemma 2.3.4 がつかえて φ が実は同型であることがわかる。
よって map

$$\varphi: L^2(V) \rightarrow H^2(D, \mathcal{O})$$

が定義できて $\Gamma^{\pm}$ を $\mathbb{R}_0^{\pm}$ の $\mathbb{C}^4$ における閉包とする。

$$\begin{aligned} \text{こゝで} \quad (\mathbb{C}^4 - \Gamma^+) \cup (\mathbb{C}^4 - \Gamma^-) &= \mathbb{C}^4 - \mathbb{R}^4 \\ (\mathbb{C}^4 - \Gamma^+) \cap (\mathbb{C}^4 - \Gamma^-) &= D \end{aligned}$$

より

$$(5) \quad \underbrace{H^3(\mathbb{C}^4 - \mathbb{R}^4, \mathcal{O})}_{B(\mathbb{R}^4)} \xleftarrow{\delta} H^2(D, \mathcal{O}) \leftarrow H^2(\mathbb{C}^4 - \Gamma^+, \mathcal{O}) \oplus H^2(\mathbb{C}^4 - \Gamma^-, \mathcal{O})$$

← ...

16.

なる Mayer-Vietris 完全系列を得る。前と同様の議論で、

$$H^q(\mathbb{C}^4 \cap^*, \mathcal{O}) = 0 \quad q \neq 0, 3$$

がいえる。 δ は 1-1 となる。

そこで Mayer-Vietris 完全系列 (2.1) の (4) についての inverse limit を考えると、再び Lemma 2.3.4 より

$$\begin{array}{ccccc} B(\mathbb{C}^4) & \xleftarrow{\varprojlim \delta_\Theta} & \varprojlim H^2(D_\Theta, \mathcal{O}) & \xleftarrow{\varphi'} & L^2(V) \\ \parallel & & \downarrow \beta_\Theta & & \swarrow \varphi \\ B(\mathbb{C}^4) & \xleftarrow{\delta} & H^2(D, \mathcal{O}) & & \end{array}$$

は可換になる。よって $\gamma^{-1} = \delta \circ \varphi$ となる。

また Mayer-Vietris 完全系列 (5) は $\bar{P}$ -action が well-defined に定まりこれについて各 map が equivariant さらに

$U(\mathfrak{g})$ は正則な微分作用素として act するから、これがいえる。 $(U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra)

Theorem 2.3.5

$$L^2(V) \xrightarrow{\gamma^{-1}} L^2(H(\mathbb{C}^2))$$

なる逆 Fourier 変換は、

$$\begin{array}{ccccc} L^2(V) & \xrightarrow{\varphi} & H^2(D, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\delta} & B(H(\mathbb{C}^2)) \\ & & & & \uparrow \\ & & & & L^2(H(\mathbb{C}^2)) \end{array}$$

γ^{-1}

と factor される。 δ は Mayer-Vietris 完全系列 (5) より与えられる。

また、これらの map はみな $\bar{P}$ -equivariant から $U(\mathfrak{g})$ -hom.

となり δ は単射である。

§3 G/H は line bundle の cohomology の表現の実現

3.1

[Kos] Theorem 6.4 の generalized Borel-Weil-Bott の Theorem を用いると. 次のとおり.

Lemma 3.1.1 $L_{\rho'}$ を 1.2 で定められた F_G は line bundle とする.

$$H^q(F_G, L_{\rho'}) = 0 \quad \text{for all } q = 0, 1, 2, \dots$$

3.2 $\Rightarrow$ $\bar{\Gamma}^{\pm}$ を $\Gamma_0^{\pm}$ の F_G における閉包とする.

$$(F_G - \bar{\Gamma}^+) \cup (F_G - \bar{\Gamma}^-) = F_G - F$$

$$(F_G - \bar{\Gamma}^+) \cap (F_G - \bar{\Gamma}^-) = \tilde{D}$$

に注意すると. 次のような Mayer-Vietoris 完全系列を得る.

$$(6) \leftarrow H^q(F_G - \bar{\Gamma}^+, L_{\rho'}) \oplus H^q(F_G - \bar{\Gamma}^-, L_{\rho'}) \leftarrow H^q(F_G - F, L_{\rho'}) \\ \leftarrow \tilde{\delta} H^{q-1}(\tilde{D}, L_{\rho'}) \leftarrow H^{q-1}(F_G - \bar{\Gamma}^+, L_{\rho'}) \oplus H^{q-1}(F_G - \bar{\Gamma}^-, L_{\rho'}) \leftarrow$$

$\Rightarrow$ Lemma 3.1.1 により

$$H^q(F_G - \bar{\Gamma}^{\pm}, L_{\rho'}) = H_{\bar{\Gamma}^{\pm}}^{q+1}(F_G, L_{\rho'})$$

$$H^q(F_G - F, L_{\rho'}) = H_F^{q+1}(F_G, L_{\rho'})$$

となる. 一方 Γ の有界対称領域としての実現を考えると.

$\mathbb{C}^4$ の有界凸集合となるから (c.f. [W] 3. Harish-Chandra Realization)

その閉包に台をもつ cohomology はよく知られた結果により (たとえば [Ka] 定理 6.5.5' など)

$$H_{\overline{n} \pm}^{q+1}(\overline{F}_C, L_{p'}) = 0 \quad q \neq 3$$

となる。一方 $\overline{F}_C$ は F の複素近傍より F は $\overline{F}_C$ において系 $\mathbb{C}^4$ 的 ($\dim F = 4$ より) よって

$$H_{\overline{n} \pm}^{q+1}(\overline{F}_C, L_{p'}) = 0 \quad q \neq 3$$

となりさらに $H_{\overline{n} \pm}^4(\overline{F}_C, L_{p'})$ は $L_{p'}$ の hyperfunction section 全体の集合。 $BC(F, L_{p'})$ のこととなる。

$$\text{よって} \quad H^q(\tilde{D}, L_{p'}) = 0 \quad (q \neq 2, 3)$$

および

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow H^3(\tilde{D}, L_{p'}) \leftarrow H_{\overline{n}+}^4(\overline{F}_C, L_{p'}) \oplus H_{\overline{n}-}^4(\overline{F}_C, L_{p'}) \\ \leftarrow BC(\overline{F}_C, L_{p'}) \xleftarrow{\hat{\Sigma}} H^2(\tilde{D}, L_{p'}) \leftarrow 0 \end{aligned}$$

なる完全系列を得る。ここで上の完全系列における各写像は G -equivariant となる。ここで $\overline{N}_C \cdot e_0 = U_0$ $\overline{F}_C - U_0 = S$ とおくと。

$$H_{\overline{n} \mp U_0}^3(U_0, L_{p'}) \xrightarrow{\hat{\Sigma}} H_{\overline{n} \mp S}^4(\overline{F}_C, L_{p'}) \rightarrow H_{\overline{n} \pm}^4(\overline{F}_C, L_{p'}) \rightarrow H_{\overline{n} \pm U_0}^4(U_0, L_{p'})$$

なる完全系列があるが、 $\overline{n} \mp U_0$ は、 $\Gamma_0^\pm$ の U_0 での閉包 $\Gamma^\pm$ に

他ならない。よってここでは $L_{p'}/U_0 = \mathcal{O}_{U_0}$ と考えるから。

$$H_{\overline{n} \pm}^q(\mathbb{C}^4, \mathcal{O}) = 0 \quad (q \neq 4)$$

であったから、結局次の各行列が完全な図式で、可換となるものを得る。

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 \downarrow \\
 (7) \quad H_{\overline{\pi}^+ S}^4(F\mathbb{C}, L_{p'}) \oplus H_{\overline{\pi}^- S}^4(F\mathbb{C}, L_{p'}) \\
 \downarrow p \\
 H_{\overline{\pi}^+}^4(F\mathbb{C}, L_{p'}) \oplus H_{\overline{\pi}^-}^4(F\mathbb{C}, L_{p'}) \xleftarrow{j^*} B(F, L_{p'}) \xleftarrow{\tilde{\delta}} H^2(\tilde{D}, L_{p'}) \leftarrow 0 \\
 \downarrow r' \qquad \qquad \qquad \downarrow r \qquad \qquad \qquad \downarrow r'' \\
 H_{\overline{\pi}^+}^4(\mathbb{C}^4, \theta) \oplus H_{\overline{\pi}^-}^4(\mathbb{C}^4, \theta) \xleftarrow{j^*} B(H(\mathbb{C})) \xleftarrow{\delta} H^2(D, \theta) \leftarrow 0 \\
 \qquad \qquad \qquad \mathbb{C}^4 = \mathbb{V}_0 \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0
 \end{array}$$

==> 第3列の完全系列は(5)より得られる。

$$\text{==> } K = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \mid (A+iB, A-iB) \in S(U(\mathbb{C}) \times U(\mathbb{C})) \right\}$$

とすると, これは G の maximal compact subgroup であり, その Lie algebra を $\mathfrak{k}$ とおく。

==> (7) に 与える $\mathfrak{g}$ の cohomology の空間には $U(\mathfrak{g})$ および $U(\mathfrak{k})$ が act している。

Lemma 3.2.1 $H_{\overline{\pi}^{\pm} S}^4(F\mathbb{C}, L_{p'})$ の $\mathbb{F}$ -finite element は 0 だけである。

証明は, S を (generalized) Schubert cell に分割し, $\overline{\pi}^{\pm} S$ の 各から得られる stratification を詳しく調べることにより, 最後は Cauchy-Kowalevsky の定理を使う手法を用いて行う。

この Lemma を使うと次がわかる。

Lemma 3.2.2 $B(F, L_{p'})$ の Σ -finite element f に対して $r(f)$ が $H^2(D, \mathcal{O})$ に含まれるものは $H^2(\tilde{D}, L_{p'})$ に含まれる。

~~証明~~ $r^* \tilde{v}^*(f) = \tilde{v}^* r(f) = 0$ より, $\tilde{v}^*(f)$ は,

$H^4_{\tilde{p}+\delta}(F, L_{p'}) \oplus H^4_{\tilde{p}-\delta}(F, L_{p'})$ のある元 g から $p(g) = \tilde{v}^*(f)$ と表わされる。ただし p は 1-1 より g は Σ -finite かつ $g=0$ かつ $\tilde{v}^*(f)=0$ であるより f は $H^2(\tilde{D}, L_{p'})$ に含まれる。

$H^2(\tilde{D}, L_{p'})$ 中の f に対して $r\tilde{\delta}(f)$ の L^2 -内積をとる。ということにおいて内積をとり、これに対応する L^2 が有限なものの全体を $H^2(\tilde{D}, L_{p'})_{L^2}$ とかくことにする。

また $H^2(\tilde{D}, L_{p'})$ の元で Σ - $(\tilde{k})$ -finite な元全体を $H^2(\tilde{D}, L_{p'})_{\Sigma}$ とかく。

すると $\tilde{\delta}$ をとった後で考えれば, $B(F, L_{p'})$ の中では Σ -finite なる L^2 は明らかより,

$$H^2(\tilde{D}, L_{p'})_{\Sigma} \subseteq H^2(\tilde{D}, L_{p'})_{L^2}$$

がわかる。また Lemma 3.2.2 より,

$$H^2(\tilde{D}, L_{p'})_{\Sigma} \xrightarrow{\sim} \{H^2(D, \mathcal{O}) \text{ の } \Sigma\text{-finite element}\}$$

より次の主要結果を得る。

Theorem 3.2.3

(1) $H^2(\tilde{D}, L_{\rho})_E$ は $L^2(V)$ の E -finite vector に対応する元をすべて含む

(2) $H^2(\tilde{D}, L_{\rho})_E \subseteq H^2(\tilde{D}, L_{\rho})_{L^2}$ かつ $H^2(\tilde{D}, L_{\rho})_{L^2}$ は non-trivial

Remark [R-S-W] 4.28 の一般的な結果より 実は $H^2(\tilde{D}, L_{\rho})_E$ の E -既約表現の分解は完全にわかる。よって (1) と合わせると、 $H^2(\tilde{D}, L_{\rho})_E$ は $L^2(V)$ の E -finite vector に対応する元だけを丁度含んでいることもわかる (SU(2,2) の表現はいろいろと分類されているようなので、そのようなことと合わせれば [R-S-W] の結果だけから、上の (1) も出てくるかもしれない。) また、

$H^2(\tilde{D}, L_{\rho})_{L^2}$ はかなり広い空間で、実は $\hat{\sigma}(H^2(\tilde{D}, L_{\rho})_{L^2})$ の $L^2(H(2))$ における (Hilbert space の位相の意味での) 閉包は $L^2(H(2))$ 全体に一致する。また $\rho(L^2(V)) \subseteq \hat{\sigma}(H^2(\tilde{D}, L_{\rho})_{L^2})$ である。

★ なお 7 月に開かれた短期共同研究会のとき話した内容 ($G = \text{SU}(2,2)$ でなく $G = \text{Mp}(2, \mathbb{R})$ としたこと) には誤りがあるためこの場を借りてお詫びをさせていただきます。

References

[K-V] M. Kashiwara, M. Vergne: Functions on the Shilov boundary of the generalized half plane, Springer-Verlag Lecture Notes in Math. 728 (1979) 136-176

[K-L] M. Kashiwara, Y. Laurant: Theoremes d'annulation et deuxieme microlocalisation Université de Paris-Sud (1983)

[K] M. Kashiwara "Systems of Microdifferential Equations" Birkhäuser (1983)

- [Ka] 金子晃 "超函数入門下" 東京学出版会 (1982)
- [Kos] B. Kostant : Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem Ann. of Math. 74 (1961) 329-387
- [W] J. Wolf : Fine structure of hermitian symmetric spaces in: Symmetric Space, Bothby and Weiss (eds.), New York: M. Dekker (1972)
- [Pa] V.P. Palamodov : 定数係数線型微分作用素上, 下 吉岡書店 1973
- [Gr] K.I. Gross : The dual of a parabolic subgroup and a degenerate principal series of $Sp(n, \mathbb{C})$ Amer. J. Math. 93 (1971), 398-428
- [Vo] D.A. Vogan Jr. : "Representations of Real Reductive Lie group" Birkhäuser 1981
- [Vo-Z] D.A. Vogan Jr. , G.J. Zuckerman : Unitary representations with non-zero cohomology , Compo. Math. 53 (1984) 51-90
- [R-S-W] J. Rawnsley , W. Schmid , and J. Wolf : Singular unitary representations and indefinite harmonic theory J. Funct. Anal. 51 (1983) 1-114
- [J-V] H.P. Jakobsen , M. Vergne : Wave and Dirac Operators, and Representations of the Conformal Group J. Funct. Anal. 24 (1977) 52-106