

5次曲面の不正則数について

都立大理 梅津 裕美子

§ 0. 序.

標数0の代数閉体 k 上定義された d 次曲面 X を考える。すなわち X を $\mathbb{P}_k^3$ の d 次超曲面とする。 $d \leq 4$ のときには X 上の特異点や X の resolution $\tilde{X}$ の性質についてはかなり詳しい結果が知られている。例えば $\tilde{X}$ として現われる非特異曲面は次のもの(と双有理同値)である。

$d = 1, 2$ 有理曲面

$d = 3$ 有理曲面または楕円線織面。

$d = 4$ $K3$ 曲面, 有理曲面, 楕円線織面 または
種数3の曲線上の線織面。

これに対して $d \geq 5$ の場合についてはほとんど何も判っていない。本稿では次の定理の証明を目標にする。

定理. X を正規5次曲面, $\tilde{X}$ をその resolution とする。
もし $\tilde{X}$ が一般型曲面ならば その不正則数 $\delta(\tilde{X})$ は0である。

ただし、この定理は次の例に見るように $d \geq 6$ には拡張できない。

例. (Zariski) $(X_0: X_1: X_2: X_3)$ を $\mathbb{P}^3$ の斉次座標とし、

$$X = \left\{ X_3^6 - (F(X_0, X_1, X_2)^2 + G(X_0, X_1, X_2)^3) = 0 \right\}$$

とおく。ここで F, G はそれぞれ 3 次, 2 次の斉次多項式である。このとき X の resolution $\tilde{X}$ の不正則数は正となる。実際、 X を曲面 $S_t: G - tX_3^2 = 0$ で切ると、
 $(1-t^3)X_3^6 - F^2 = 0$ 。

これは X 上では次で定義される 2 つの曲線の族

$$\sqrt{1-t^3} X_3^3 - F = 0$$

$$\sqrt{1-t^3} X_3^3 + F = 0$$

に分かれる。よって X 上には楕円曲線 $u^2 = 1-t^3$ で parametrize される曲線の族が存在することになり、 $\tilde{X}$ は不正則な曲面である。

X の特異点は $C := \{F(X_0, X_1, X_2)^2 + G(X_0, X_1, X_2)^3 = 0\} \subseteq \{X_3 = 0\} \cong \mathbb{P}^2$ の特異点と対応しているが、 F, G を一般にとると C の特異点は $\{F(X_0, X_1, X_2) = 0\} \cap \{G(X_0, X_1, X_2) = 0\}$ の 6 点で、その各点で X の特異点は $z^6 = x^2 + y^3$ で定義される。この特異点は $\tilde{E}_8$ と呼ばれる特異点で resolution の例外集合は非特異楕円曲線

で自己交点数は -1 である。よって $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ を X の minimal resolution とすると

$$K_{\tilde{X}}^2 = (\pi^* \mathcal{O}_X(2))^2 - 6 = 18$$

よって $\tilde{X}$ は一般型曲面である。

§ 1. 準備.

この § では、2次元正規特異点の不変量について準備する。

(Y, y) を 2次元正規特異点, $\pi: \tilde{Y} \rightarrow Y$ を minimal resolution とする。例外集合を $A = \pi^{-1}(y)$ とおく。

定義. $P_g(Y, y) = \dim_k (R^1 \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}})_y$: (Y, y) の幾何種数

$P_a(Y, y) = \sup_{\substack{D \geq 0 \\ \text{supp } D \subset A}} P_a(D)$: (Y, y) の算術種数

定義より $P_g(Y, y) \geq P_a(Y, y) \geq 0$ が成り立つことかわかる。

定理. (Artin [A]) $P_a(Y, y) = 0 \iff P_g(Y, y) = 0$.

我々は幾何種数が正の特異点だけが問題になるので、上の定理より算術種数も正の特異点のみを考えればよい。

定義. A 上に support をもつ因子で $\tilde{Y}$ 上の標準因子と数値的同値であるものが存在するとき, (Y, y) を数値的 Gorenstein 特異点という. この因子を K' と書くことにする.

補題 1. (小山) (Y, y) を数値的 Gorenstein 特異点とすると,

$$P_a(Y, y) \leq -\frac{K'^2}{8} + 1$$
 とくに, $K'^2 \geq -7$ ならば $P_a(Y, y) \leq 1$.

証明. D を A に support をもつ任意の因子とすると,

$$P_a(D) = \frac{D^2 + DK'}{2} + 1 = \frac{(D + \frac{K'}{2})^2}{2} - \frac{K'^2}{8} + 1.$$

A の交点行列は負定値だから求める不等式が得られる.

定義. $P_a(Y, y) = 1$ のとき, (Y, y) を楕円特異点という.

楕円特異点に対しては, $P_a(D) = 1$ をみたす A に support をもつ正因子 D のうち最小のものが存在する. これを E と書く. 楕円列と呼ばれる正因子の列 $\{Z_1, \dots, Z_\ell\}$ が次の様に定義される (c.f. S.S.-T. Yau [Y], Tomari [T]): Z_1 としては A の基本サイクルを

とる。 Z_k まで定義されたとする。 $Z_k E < 0$ ならば $\{Z_1, \dots, Z_k\}$ を楕円列と定義する。 $Z_k E = 0$ のときは、 A の成分 A_i で $Z_k A_i = 0$ となるものの和の E を含む連結成分を B_{k+1} とする。そして B_{k+1} の基本サイクルを Z_{k+1} とおく。 $\text{supp } Z_k \not\supset \text{supp } Z_{k+1}$ なので有限回の操作で楕円列 $\{Z_1, \dots, Z_\ell\}$ が定まる。これに対して次の結果がある。

定理. (Yau [Y]) (Y, γ) を楕円特異点, $\{Z_1, \dots, Z_\ell\}$ をその楕円列とすると、

$$(1) \quad \rho_g(Y, \gamma) \leq \ell$$

$$(2) \quad (Y, \gamma) \text{ が数値的 Gorenstein ならば } K' = -\sum_{i=1}^{\ell} Z_i.$$

系 1. (Y, γ) を楕円特異点で数値的 Gorenstein とすると、

$$\rho_g(Y, \gamma) \leq -K'^2.$$

系 2. (Y, γ) 同上 とすると、 A に support をもつ正因子 E で次をみたすものが存在する。

$$\rho_a(E) = 1$$

$$\rho_g(Y, \gamma) E \leq -K'.$$

§ 2. 主定理の証明

記号. $X \subset \mathbb{P}^3$: 正規5次曲面

$\pi: \tilde{X} \rightarrow X$: minimal resolution

$$g = g(\tilde{X}) = \dim H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

$$p_g = p_g(\tilde{X}) = \dim H^2(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

$$p = \sum_{x \in X} p_g(X, x)$$

$H \subset X$: 一般の超平面切断. 種数6の非特異曲線
で, $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(H)$ となる.

$$\tilde{H} = \pi^{-1}(H) \cong H$$

$\tilde{D}$: $\tilde{X}$ 上の正因子で $K_{\tilde{X}} = \tilde{H} - \tilde{D}$ をみたすもの.

$$\text{supp } \tilde{D} = \bigcup_{p_g(X, x) > 0} \pi^{-1}(x) \quad \text{と} \quad \text{なる}.$$

仮定. $\tilde{X}$ は一般型曲面とする。

次の完全列を考える。

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \rightarrow R^1\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \rightarrow 0$$

$$\text{これより} \quad p_g = 4 - p + g \quad (*)$$

また $\tilde{X}$ は一般型であるから $0 < \chi = 1 - g + p_g$.

よって (*) とあわせて $g \leq p \leq 4$ を得る。

補題2. $g > 0$ とすると $0 < g < p-1 \leq 3$.

証明. $0 < g \leq p$, $p-1 \leq 3$ はよい。 $g = p$, $p-1$ として矛盾を導く。

$g = p$ とすると (*) より $P_g = 4$ であるから

$$H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}})) = H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{H} - \tilde{D})) \cong H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{H})).$$

$|\tilde{H}|$ は固定点をもたないから $\tilde{D} = 0$ ゆえに $p = 0$.

$g = p-1$ とすると $P_g = 3$. よって $P_g(X, X) > 0$ となる特異点 $x \in X$ は唯1つで

$$H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}})) \cong \{ \pi^* f \mid f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(H)), f(x) = 0 \}$$

となるので $|K_{\tilde{X}}|$ は $\pi^{-1}(x)$ の成分以外には固定成分をもたない。 よって $\tilde{X}$ 上に第1種例外曲線があればそれは $\pi^{-1}(x)$ に含まれなければならないが, $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ は minimal resolution であるので矛盾。 つまり $\tilde{X}$ は極小曲面である。 ところが

$$2P_g - 2 = 4 \geq \tilde{H}^2 + \tilde{D}^2 = K_{\tilde{X}}^2$$

であるから 極小曲面ならば $g = 0$ となってこれも矛盾である。 ($2P_g - 2 > K_{\tilde{X}}^2$ のときは Bombieri [B].

$2P_g - 2 = K_{\tilde{X}}^2$ のときは一般には Miyanishi-Nakamura [M-N] に依るが、今の場合は次のようにしても言える:

$4 = \tilde{H}^2 + \tilde{D}^2$ より $\tilde{D}^2 = -1$. よって, $K' = -\tilde{D}$ だから

補題1より π は楕円特異点である。系1を適用すると
 $p = p_g(X, \pi) = 1$ で $g = p - 1 = 0$ になってしまう。)

$\bar{X}$ を $\tilde{X}$ の極小 model とし, $\mu: \tilde{X} \rightarrow \bar{X}$ を blow-down とする。Bombieri [B] より $g > 0$ ならば $2\chi \leq K_{\bar{X}}^2$ が成立する。よって補題2より, $g > 0$ とすると次のいずれかである。

	g	p	χ	$K_{\bar{X}}^2$
I {	2	4	1	2以上
	1	4	1	2以上
II	1	3	2	4以上

補題3. ($g \geq 0$)

$$K_{\bar{X}}^2 \geq 2 \quad [\text{resp.} \geq 3]$$

$$\tilde{D}^2 \leq -4 \quad [\text{resp.} \leq -3]$$

と仮定すると $\tilde{X}$ 上の第1種例外曲線は唯1つで、それを E とおくと $\bar{X}$ は E の blow-down として得られる。更に

$$K_{\bar{X}}^2 = 2 \quad [\text{resp.} 3]$$

$$\tilde{D}^2 = -4 \quad [\text{resp.} -3]$$

$$\tilde{D} \mu^* K_{\bar{X}} = 2 \quad [\text{resp.} 1]$$

$$\tilde{D} E = 2$$

が成り立つ。

証明. $\tilde{H} \mu^* K_{\bar{X}} = d$, $\mu^* K_{\bar{X}}^2 = a$ において $(\tilde{H}, \mu^* K_{\bar{X}})$ の交点行列を考えると, Hodge 指数定理より

$$\begin{vmatrix} 5 & d \\ d & a \end{vmatrix} = 5a - d^2 < 0.$$

ここで $a \geq 2$ だから $d \geq 4$ となる。

$$\tilde{H} - \tilde{D} = K_{\tilde{X}} = \mu^* K_{\bar{X}} + E$$

とおくと

$$5 = \tilde{H} K_{\tilde{X}} = d + \tilde{H} E, \quad \tilde{H} E \geq 0.$$

$d = 5$ とすると $\tilde{H} E = 0$, これは $E = 0$ すなわち $\tilde{X} = \bar{X}$ を意味する。ところが仮定より

$$2 \text{ [resp. } 3] \leq K_{\bar{X}}^2$$

$$K_{\tilde{X}}^2 = 5 + \tilde{D}^2 \leq 1 \text{ [resp. } 2]$$

であるから矛盾である。よって $d = 4$. $\tilde{H} E = 1$ より E は既約かつ被約な第1種例外曲線で、 E の contraction が $\bar{X}$ である。 $K_{\tilde{X}}^2 = K_{\bar{X}}^2 - 1$ より、仮定の不等式が全て等式になることが導かれる。また

$$-1 = K_{\tilde{X}} E = \tilde{H} E - \tilde{D} E \text{ より } \tilde{D} E = 2,$$

$$4 \text{ [resp. } 3] = K_{\tilde{X}} \tilde{D} = \mu^* K_{\bar{X}} \cdot \tilde{D} + \tilde{D} E \text{ より } \mu^* K_{\bar{X}} \cdot \tilde{D} = 2 \text{ [resp. } 1] \text{ を得る。}$$

主定理の証明. II の場合: $\tilde{D}^2 \geq -2$ とすると補題 1, 系 1 より $\rho \leq 2$ となって矛盾, $\tilde{D}^2 \leq -3$ とすると補題 3 より $K_{\bar{X}}^2 = 3$ となって矛盾する.

I の場合: $\tilde{D}^2 \geq -3$ とすると補題 1, 系 1 より $\rho \leq 3$ で矛盾となるので $\tilde{D}^2 \leq 4$. 補題 3 を適用すると, $\tilde{X}$ 上に第 1 種例外曲線 E が存在して $\mu: \tilde{X} \rightarrow \bar{X}$ は E の contraction, $\tilde{D}^2 = -4$ である. 補題 1 より X の特異点は全て算術種数が 1 以下となるので系 2 より $\tilde{X}$ 上の正因子 $E_1, \dots, E_4$ で

$$(1) \rho_a(E_i) = 1 \quad (\forall i) \quad (2) \sum_{i=1}^4 E_i \leq \tilde{D}$$

をみたすものが存在する. (1) より $0 > E_i^2 = E_i \tilde{D}$, (2) より $\sum_{i=1}^4 E_i \tilde{D} \geq \tilde{D}^2 = -4$ であるから, $E_i \tilde{D} = -1$ ($\forall i$). よって

$$1 = -E_i \tilde{D} = E_i K_{\tilde{X}} = E_i \mu^* K_{\bar{X}} + E_i E.$$

一方補題 3 より $\tilde{D} \mu^* K_{\bar{X}} = 2$, $\tilde{D} E = 2$ であるから $E_i E = 1$, $E_i \mu^* K_{\bar{X}} = 0$ となる i が存在する. この i に対して

$$(E_i + E)^2 = 0, (E_i + E) \mu^* K_{\bar{X}} = 0, \mu^* K_{\bar{X}}^2 = 2$$

となり, Hodge 指数定理に反する. これで定理は証明された.

参考文献

- [A] M. Artin, On isolated rational singularities of surfaces, Amer. J. Math. 88 (1966), 129-136.
- [B] E. Bombieri, Canonical models of surfaces of general type, I.H.E.S. 42 (1973), 447-495.
- [M-N] N. Miyanishi and K. Nakamura: On the structure of minimal surfaces of general type with $2p_g = (K^2) + 2$, J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 139-171.
- [T] M. Tomari, A p_g -formula and elliptic singularities, RIMS 1983.
- [Y] S.S.-T. Yau, On maximally elliptic singularities, Trans. Amer. Math. Soc. 257 (1980), 269-329.