

# Painlevé V 型方程式の解について

琉球大 理 毛織 泰子

1. Painlevé V 型方程式は、確定特異点 2 個、1 級不確定特異点 1 個をもつ線型常微分方程式 (1.1) の monodromy を保存する変形の方程式として得られる。

$$(1.1) \quad \frac{dY}{dx} = \left( \frac{B_1}{x-a_1} + \frac{B_2}{x-a_2} + C \right) Y ; B_1, B_2, C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} : 2 \times 2 \text{ 定数行列.}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \\ & a_2 \end{pmatrix}, K = \text{diag}(B_1 + B_2) \quad \text{とおく.}$$

(1.1) の  $x = \infty$  での形式解を次の形に書く。

$$(1.2) \quad Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n (x-A)^{K-n} e^{Cx}, \quad Y_0 = 1, \\ = \left\{ 1 + \frac{1}{x} (Y_1 - \binom{K}{1} A) + \frac{1}{x^2} (Y_2 - Y_1 \binom{K-1}{1} A + \binom{K}{2} A^2) + \dots \right\} x^K e^{Cx}.$$

解の係数  $Y_1, Y_2, \dots$  は方程式の係数  $B_1, B_2, C$  から順に決まる。例えば

$$(1.3) \quad B_1 + B_2 = K + [Y_1, C],$$

$$a_1 B_1 + a_2 B_2 = -(Y_1 - KA) + [Y_1, K] + [Y_2 + Y_1 A, C] - [Y_1, C] Y_1.$$

monodromy を保存する (1.1) の変形を考えよう。即ち、 $a_1, a_2, c_1, c_2$  を変形の parameters とし、monodromy 保存の条件のもとで、 $B_1, B_2$  の

parameters に関する dependence を定めるのが変形方程式である。

この場合、本質的な deformation parameter は  $t = (a_1 - a_2)(c_1 - c_2)$

である。  $B_1, B_2$  の固有値  $\lambda_{11}, \lambda_{12}; \lambda_{21}, \lambda_{22}$  及び  $K = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \end{pmatrix}$  は  $t$  に

依らない定数である。 Fuchs の関係式は  $\kappa_1 + \kappa_2 = \lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{22}$

で与えられる。

$$(1.4) \quad v_0: \text{任意}, \quad v_1 - v_0 = \kappa_1 - \lambda_{11} - \lambda_{22} = -\kappa_2 + \lambda_{12} + \lambda_{21}, \quad v_2 - v_0 = \lambda_{12} - \lambda_{11},$$

$$v_3 - v_0 = \kappa_1 - \lambda_{11} - \lambda_{21} = -\kappa_2 + \lambda_{12} + \lambda_{22}$$

とする。  $B_1, B_2$  は次のようにおける。

$$(1.5) \quad B_1 = \begin{pmatrix} z - v_0 + \lambda_{11} & -u(z - v_2) \\ u^T(z - v_0) & -(z - v_2 - \lambda_{11}) \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -(z - v_3 - \lambda_{21}) & v(z - v_1) \\ -v^T(z - v_3) & z - v_1 + \lambda_{21} \end{pmatrix}.$$

(1.3) から  $Y_1 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$  は次のように決まる。

$$(1.6) \quad y_1 = -(a_1 - a_2)(z - v_3 - \lambda_{21}) + (c_1 - c_2)y_2 y_3,$$

$$y_2 = \frac{1}{c_1 - c_2} (u(z - v_2) - v(z - v_1)), \quad y_3 = \frac{1}{c_1 - c_2} (u^T(z - v_0) - v^T(z - v_3)),$$

$$y_4 = (a_1 - a_2)(z - v_2 - \lambda_{11}) - (c_1 - c_2)y_2 y_3.$$

$y = u^T v$  とおくとき、  $B_1, B_2$  の満たすべき変形方程式から

$$(1.7) \quad t \frac{dy}{dt} = -ty - 2z(y-1)^2 + (y-1)(v_0 + v_1)y - (v_2 + v_3),$$

$$t \frac{dz}{dt} = y(z - v_0)(z - v_1) - y^T(z - v_2)(z - v_3)$$

を得る。或いは

$$(1.8) \quad z = \frac{1}{2(y-1)^2} \left\{ -t \frac{dy}{dt} - ty + (y-1)(v_0 + v_1)y - (v_2 + v_3) \right\}$$

を用いて  $z$  を消去すれば、  $y$  の満たすべき方程式として、次

の Painlevé V 型方程式を得る。

$$(1.9) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \left( \frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \frac{(y-1)^2}{t^2} (\alpha y + \frac{\beta}{y}) + \frac{\gamma}{t} y + \delta \frac{y(y+1)}{y-1}.$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (v_0 - v_1)^2, \quad \beta = -\frac{1}{2} (v_2 - v_3)^2, \quad \gamma = v_0 + v_1 - v_2 - v_3 - 1, \quad \delta = -\frac{1}{2}.$$

Hamiltonian  $z$

$$(1.10) \quad H(t, y, z) = z - v_0 + \frac{1}{t} (y(z-v_1) - (z-v_2))(z-v_0) - y^4(z-v_3)$$

と取り Poisson bracket  $\{, \}$   $z$

$$(1.11) \quad \{z, y\} = y$$

と定義すれば (1.7) は

$$(1.12) \quad \frac{dy}{dt} = \{y, H(t, y, z)\}, \quad \frac{dz}{dt} = \{z, H(t, y, z)\}$$

で回復される。この解  $(y(t), z(t))$  を使って

$$(1.13) \quad \sigma(t) = t H(t, y(t), z(t)) + v_0 v_2 + v_1 v_3$$

と定義すれば

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \sigma &= -2z^2 + (t + v_0 + v_1 + v_2 + v_3)z + y(z-v_0)(z-v_1) + y^4(z-v_2)(z-v_3) \\ &= \frac{1}{4y(y-1)^2} \left\{ \left( t \frac{dy}{dt} \right)^2 - \left( t y - (y-1)((v_0+v_1)y - (v_2+v_3)) \right)^2 \right\} + v_0 v_1 y + v_2 v_3 y^{-1}, \end{aligned}$$

$$(1.15) \quad \frac{d\sigma}{dt} = z, \quad t \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = y(z-v_0)(z-v_1) - y^4(z-v_2)(z-v_3)$$

となる。即ち

$$(1.9) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \left( \frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \frac{(y-1)^2}{2t^2} ((v_0-v_1)^2 y - (v_2-v_3)^2 y^{-1}) + \frac{v_0+v_1-v_2-v_3-1}{t} y - \frac{y(y+1)}{2(y-1)}$$

の解  $y(t; v_0, v_1, v_2, v_3)$  に対して

$$(1.14) \quad \sigma = \frac{1}{4y(y-1)^2} \left\{ \left( t \frac{dy}{dt} \right)^2 - \left( t y - (y-1)((v_0+v_1)y - (v_2+v_3)) \right)^2 \right\} + v_0 v_1 y + v_2 v_3 y^{-1}$$

とおけば  $\sigma$  は

$$(1.16) \quad \left( t \frac{d^2 \sigma}{dt^2} \right)^2 = \left( 2 \left( \frac{d\sigma}{dt} \right)^2 - (t + v_0 + v_1 + v_2 + v_3) \frac{d\sigma}{dt} + \sigma \right)^2 - 4 \left( \frac{d\sigma}{dt} - v_0 \right) \left( \frac{d\sigma}{dt} - v_1 \right) \left( \frac{d\sigma}{dt} - v_2 \right) \left( \frac{d\sigma}{dt} - v_3 \right)$$

を満す。逆に (1.16) の解  $\sigma(t; v_0, v_1, v_2, v_3)$  に対して

$$(1.17) \quad y = \frac{t \frac{d\sigma}{dt^2} + 2 \left( \frac{d\sigma}{dt} \right)^2 - (t + v_0 + v_1 + v_2 + v_3) \frac{d\sigma}{dt} + \sigma}{2 \left( \frac{d\sigma}{dt} - v_0 \right) \left( \frac{d\sigma}{dt} - v_1 \right)}$$

とおけば、 $y$  は (1.9) を満たす。更にこのとき

$$(1.18) \quad y^{-1} = \frac{-t \frac{d\sigma}{dt^2} + 2 \left( \frac{d\sigma}{dt} \right)^2 - (t + v_0 + v_1 + v_2 + v_3) \frac{d\sigma}{dt} + \sigma}{2 \left( \frac{d\sigma}{dt} - v_2 \right) \left( \frac{d\sigma}{dt} - v_3 \right)}$$

である。故に、 $y$  と  $\sigma$  とは同等であるが、 $y$  は  $\{v_0, v_1\}$  と  $\{v_2, v_3\}$  に関して対称であり、 $\sigma$  は  $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  に関して対称であることに注意する。

$$(1.19) \quad \frac{d}{dt} \log \tau(t) = H(t, y(t), z(t)) = \frac{1}{t} (\sigma - v_0 v_2 - v_1 v_3) - v_0$$

となる正則函数  $\tau(t)$  が存在する。この  $\tau$  は Painlevé V 型方程式

((1.7) or (1.9) or (1.12) or (1.16)) の  $\tau$ -函数 と呼ぶ。

$$\sigma = \sigma(t; v_0, v_1, v_2, v_3), \quad y = y(t; v_0, v_1, v_2, v_3) = y(-t; -v_1, -v_0, -1-v_3, -1-v_2)$$

と略記すれば、(1.17), (1.18) から

$$(1.20) \quad 1 - y = \frac{2 \left( t \frac{d\sigma}{dt} - \sigma + v_0 v_1 + v_2 v_3 \right)}{t \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + (t - v_0 - v_1 + v_2 + v_3) \frac{d\sigma}{dt} - \sigma + 2 v_0 v_1}$$

とも表わせる。又、(1.17), (1.18) から

$$(1.21) \quad \det(B_1 + B_2) = (1-y)(z-v_0)(z-v_1) + (1-y^{-1})(z-v_2)(z-v_3) + (\lambda_{11} + \lambda_{21})(\lambda_{12} + \lambda_{22}) \\ = t \frac{d\sigma}{dt} - \sigma + v_0 v_1 + v_2 v_3 + (\lambda_{11} + \lambda_{21})(\lambda_{12} + \lambda_{22})$$

を得る。他方、(1.19) から  $\sigma = t \frac{d}{dt} \log \tau + v_0 v_2 + v_1 v_3 + v_0 t$  であるから

$$(1.22) \quad t \frac{d\sigma}{dt} - \sigma + v_0 v_1 + v_2 v_3 = \frac{t^2}{\tau^2} \left| \tau \frac{d\sigma}{dt} \frac{d\tau}{dt^2} \right| + (k_1 - \lambda_{11} - \lambda_{21})(k_2 - \lambda_{11} - \lambda_{21})$$

である。故に、特に  $\lambda_{11} = 0, \lambda_{21} = 0$  のとき、(1.20), (1.21) より

$$\begin{aligned}
 (1.23) \quad \sigma(t; v_0, v_1, v_2+1, v_3+1) &= \sigma(-t; -v_1, -v_0, -1-v_3, -1-v_2) = \sigma + v_0 + v_1 + \frac{t}{1-y} \\
 &= \sigma + v_0 + v_1 + \frac{t}{2} \left( 1 + \frac{d}{dt} \log \det(B_1 + B_2) + \frac{(-v_0 - v_1 + v_2 + v_3) \frac{d\sigma}{dt} + v_0 v_1 - v_2 v_3}{\det(B_1 + B_2)} \right)
 \end{aligned}$$

を得る。特に,  $\sigma^{(n)} = \sigma(t; 0, 0, n, n)$  に対して  $\sigma$  の変換公式:

$$\begin{aligned}
 (1.24) \quad \sigma^{(n+1)} &= \sigma^{(n)} + \frac{t}{2} \left( 1 + \frac{d}{dt} \log \det(B_1^{(n)} + B_2^{(n)}) + \frac{2n \frac{d\sigma^{(n)}}{dt} - n^2}{\det(B_1^{(n)} + B_2^{(n)})} \right), \\
 \det(B_1^{(n)} + B_2^{(n)}) &= t \frac{d\sigma^{(n)}}{dt} - \sigma^{(n)} + n^2 = \frac{t^2}{(\tau^{(n)})^2} \left| \begin{array}{cc} \tau^{(n)} & \frac{d\tau^{(n)}}{dt} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d^2\tau^{(n)}}{dt^2} \end{array} \right| + n^2
 \end{aligned}$$

が得られる。

2. Lukashovich によれば Painlevé V 型方程式 (1.9) は

$$(2.1) \quad 1 \pm' (v_2 - v_3) \mp (v_0 - v_1) = \pm'' (v_0 + v_1 - v_2 - v_3 - 1)$$

即ち, (2.1)<sub>0</sub>  $v_0 = v_2$  or  $v_0 = v_3$  or  $v_1 = v_2$  or  $v_1 = v_3$  又は

$$(2.1)_1 \quad v_0 - v_2 = 1 \text{ or } v_0 - v_3 = 1 \text{ or } v_1 - v_2 = 1 \text{ or } v_1 - v_3 = 1 \quad \text{のとき,}$$

Riccati 方程式の解と特殊解にもつ。  $y$  の  $\{v_0, v_1\}, \{v_2, v_3\}$  に関する対称性により, (2.1)<sub>0</sub>  $v_0 - v_2 = 0$ , (2.1)<sub>1</sub>  $v_0 - v_2 = 1$  の 2 通りの場合を考えればよい。

(2.1)<sub>0</sub>  $v_0 = v_2$  のとき, Riccati 方程式は

$$(2.2)_0 \quad t \frac{dy}{dt} = -ty + (y-1)(v_1 - v_0)y - (v_3 - v_2)$$

であり, この特殊解  $y$  に対応する (1.14) の  $\sigma$ , (1.19) の  $\tau$  は

$$(2.3)_0 \quad \sigma = v_0(t + v_1 + v_3),$$

$$(2.4)_0 \quad \tau = \text{const. } t^{(v_1 - v_0)(v_2 - v_3)}$$

で与えられる。

(2.1)  $v_0 - v_2 = 1$  のとき Riccati 方程式は

$$(2.2) \quad t \frac{dy}{dt} = ty + (y-1)((v_0-v_1)y - (v_2-v_3))$$

であり、この特殊解  $y$  に対応する (1.14) の  $\sigma$  は

$$(2.3) \quad t \frac{d\sigma}{dt} = -(\sigma - v_0(t+v_1+v_3))(\sigma - v_2(t+v_1+v_3)) - v_1v_3$$

の解、(1.19) の  $\tau$  は合流超幾何函数

$$(2.4) \quad \tau = C \cdot t^{(v_3-\frac{1}{2})(v_0-v_1)} F(v_3-v_2, 1+v_3-v_1; t) + C' \cdot t^{-(v_2-v_1)(v_0-v_3)} F(1-(v_2-v_1), 1+v_1-v_3; t)$$

で与えられる。

例. IPB (impenetrable bose gas) の 1 粒子密度行列  $\rho(x)$  は

parameters の値  $\alpha$ :  $(v_0=0, v_1=1, v_2=0, v_3=1)$  又は  $(\alpha=\frac{1}{2}, \beta=-\frac{1}{2}, \gamma=-2i, \delta=2)$

であるような Painlevé V 型超越函数  $y(x)$  ( $t=2ix$ ) により

$$(2.5) \quad \rho(x) = \frac{1}{\pi} \exp \int_0^x dx' \left( \frac{x'}{4y(y-1)^2} \left( \left( \frac{dy}{dx'} \right)^2 + 4y^2 \right) - \frac{(y+1)^2}{4x'y} \right) \\ = \frac{1}{\pi} \left( 1 + \frac{-1}{3!} x^2 + \frac{2C}{3^2} x^3 + \frac{1}{5!} x^4 + \frac{-11C}{3^2 5^2} x^5 + \frac{-1}{7!} x^6 + \frac{61C}{2^2 3^2 5^2 7^2} x^7 + \dots \right) \quad (C = \frac{1}{2\pi})$$

で与えられ、 $\rho(x) = e^{-ix} \tau(x)$  である。このとき、特殊解は

(i)  $v_0 = v_2$ , (ii)  $v_1 = v_3$ , (iii)  $v_1 - v_2 = 1$  に依り 7 次で与えられる。

$$(i) \quad v_0 = v_2 \quad \text{のとき,} \quad x \left( \frac{dy}{dx} + 2iy \right) = (y-1)^2;$$

$$(2.6) \quad z=0, \quad y = \frac{1}{1+2ix} - \frac{\frac{e^{-2ix}}{(1+2ix)^2}}{\int \frac{e^{-2ix}}{(1+2ix)^2} \frac{dx}{x} + \text{const.}}, \quad \sigma=0, \quad \rho = \text{const.} \cdot \frac{e^{-ix}}{x}.$$

$$(ii) \quad v_1 = v_3 \quad \text{のとき,} \quad x \left( \frac{dy}{dx} + 2iy \right) = -(y-1)^2;$$

$$(2.7) \quad z=1, \quad y = 1-2ix + \frac{e^{2ix}}{\int e^{2ix} \frac{dx}{x} + \text{const.}}, \quad \sigma=2ix, \quad \rho = \text{const.} \cdot \frac{e^{ix}}{x}.$$

(iii)  $v_1 - v_2 = 1$  のとき  $x \left( \frac{dy}{dx} - 2iy \right) = y^2 - 1$  ;

(2.8)  $z = \frac{1}{2i} (\cot x - x \operatorname{cosec}^2 x) + \frac{1}{2}$  ,  $y = \frac{x \cot x - 1 + ix}{x \cot x - 1 - ix}$  ,

$\sigma = x \cot x + ix = \sigma_0 + 1 + ix$  ( $\sigma_0 = x \cot x - 1 = x \frac{d}{dx} \log \rho$ ) ,

$\rho = \text{const.} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}$  .

この  $y$  は (2.5) のようにして FF (free fermion) の 1 粒子密度行列

$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\pi} \left( 1 + \frac{-1}{3!} x^2 + \frac{1}{5!} x^4 + \frac{-1}{7!} x^6 + \dots \right) \quad (C=0)$

を与える。

3. Painlevé V 型方程式の一般解を作ることを目標としている。

連立 1 階方程式 (1.7) の右辺を

(3.1)  $f(t, y, z) = -ty - 2z(y-1)^2 + (y-1)(v_0+v_1)y - (v_2+v_3)$

$g(t, y, z) = y(z-v_0)(z-v_1) - y^{-1}(z-v_2)(z-v_3)$

とおく。  $f(0, y_0, z_0) = 0$ ,  $g(0, y_0, z_0) = 0$  とする点  $(y_0, z_0)$  は次の 3 点である。

(3.2) (ii)  $\left( \frac{v_2-v_3}{-v_0+v_1}, \frac{-v_0v_2+v_1v_3}{-v_0+v_1-v_2+v_3} \right)$ , (iii)  $\left( \frac{-v_2+v_3}{-v_0+v_1}, \frac{-v_0v_3+v_1v_2}{-v_0+v_1+v_2-v_3} \right)$ , (i)  $\left( 1, \frac{-v_0v_1+v_2v_3}{-v_0-v_1+v_2+v_3} \right)$  .

(ii) の点  $(y_0, z_0)$  に対して (IPB:  $(y_0, z_0) = (-1, \frac{1}{2})$ )

(3.3)<sub>2</sub>  $\left( \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{array} \right) \bigg|_{(t,y,z)=(0,y_0,z_0)} = \left( \begin{array}{cc} -v_0-v_1+v_2+v_3 & \frac{-2(-v_0+v_1-v_2+v_3)^2}{(-v_0+v_1)^2} \\ \frac{-2(v_1-v_0)^2(v_3-v_0)(v_1-v_2)}{(-v_0+v_1-v_2+v_3)^2} & v_0+v_1-v_2-v_3 \end{array} \right)$

だから、固有値は  $\pm(-v_0+v_1-v_2+v_3)$  である。(iii), (i) の点に対しても、固有値は各々  $\pm(-v_0+v_1+v_2-v_3)$ ,  $\pm(-v_0-v_1+v_2+v_3)$  となっている。

parameters を特殊化すれば実際の model (IPB) を与えるという意味で (ii) の場合をやる (iii) は (ii) で  $v_2$  と  $v_3$  とを取りかえたもの) と。

$\nu = -\nu_0 + \nu_1 - \nu_2 + \nu_3$  (IPB:  $\nu=2$ ) に対して 1-parameter 含む解

$$(3.4)_2 \quad y(t) = y_0 (1 + y_{10}t + y_{01}u + y_{20}t^2 + y_{11}tu + y_{02}u^2 + \dots) \quad (y_0 = \frac{\nu_2 - \nu_3}{-\nu_0 + \nu_1})$$

$$z(t) = z_0 (1 + z_{10}t + z_{01}u + z_{20}t^2 + z_{11}tu + z_{02}u^2 + \dots) \quad (z_0 = \frac{-\nu_0\nu_2 + \nu_1\nu_3}{\nu})$$

$$u = Ct^\nu \quad (C: \text{積分定数})$$

が存在する。実際  $y_{01}$  は任意定数で  $y_{01} = (\nu_3 - \nu_0)\nu$  と取れば

$$z_{01} = (\nu_1 - \nu_2)(\nu_3 - \nu_2) \quad \text{となり}$$

$$(3.5)_2 \quad y(t) = \frac{\nu_2 - \nu_3}{-\nu_0 + \nu_1} \left( 1 + \frac{1 - \nu_0 - \nu_1 + \nu_2 + \nu_3}{(\nu+1)(\nu-1)} t + (\nu_3 - \nu_0)\nu u + \dots \right)$$

$$z(t) - \nu_0 = \frac{(\nu_1 - \nu_0)(\nu_3 - \nu_0)}{\nu} \left( 1 + \frac{2(\nu_1 - \nu_2)(\nu_3 - \nu_2)}{\nu(\nu+1)(\nu-1)} t + (\nu_1 - \nu_2)(\nu_3 - \nu_2) u + \dots \right)$$

という展開をもつ。 $\nu$  が整数のとき、この展開の形から一般

には  $\log t$  の項があるが、例えば IPB ( $\nu=2$ ) のときのように parameters

の特別な値に対しては  $\log$  terms が消えている。(3.5)<sub>2</sub> の  $y, z$  を

(1.14) に代入して

$$(3.6)_2 \quad \sigma(t) = (\nu_1 - \nu_0)(\nu_3 - \nu_0) \left( 1 + \frac{1}{\nu} t + \frac{(\nu_1 - \nu_2)(\nu_3 - \nu_2)}{\nu^2(\nu+1)(\nu-1)} t^2 + \dots \right)$$

を得る。定数項以外は (1.15) から  $z$  を積分するのが最も簡単で

ある。(IPB のとき  $\sigma_0(x) = \sigma(x) - 1 - ix = \frac{-1}{3}x^2 + \dots, t=2ix$ )

parameters の値が ( $\nu_0=0, \nu_1=1, \nu_2=0, \nu_3=1$ ) である Painlevé V 型方程式

の一般解については、次の結果がある。

(I)  $|x_0| \ll |x|$  で  $\zeta(x, x_0, C), \xi(x, x_0, C)$  を求めること。

$y, z$  から

$$(3.7) \quad i\zeta = \frac{1+y}{1-y}, \quad i\xi = -2(z - \frac{1}{2})$$

と変換すると (1.7) は次の方程式となる。  $t=2ix$  としている。



$$(3.8) \quad x \frac{d\zeta}{dx} = 2\xi + x(1 + \zeta^2),$$

$$(1 + \zeta^2) x \frac{d\xi}{dx} = 2\zeta(1 + \xi^2).$$

既に得られている  $\zeta, \xi$  の 1-parameter  $C$  を含む正則な解  $\zeta(x, x_0=0, C)$ ,  $\xi(x, x_0=0, C)$  を利用する。

$$\zeta = \zeta^{(0)} + x_0 \zeta^{(1)} + x_0^2 \zeta^{(2)} + \dots, \quad \xi = \xi^{(0)} + x_0 \xi^{(1)} + x_0^2 \xi^{(2)} + \dots$$

とすれば (3.8) は次と同値である。

$$(3.8-0) \quad x \frac{d\zeta^{(0)}}{dx} = 2\xi^{(0)} + x(1 + (\zeta^{(0)})^2), \quad (1 + (\zeta^{(0)})^2) x \frac{d\xi^{(0)}}{dx} = 2\zeta^{(0)}(1 + (\xi^{(0)})^2),$$

$$(3.8-1) \quad x \frac{d\zeta^{(1)}}{dx} = 2\xi^{(1)} + x \cdot 2\zeta^{(0)}\zeta^{(1)},$$

$$2\zeta^{(0)}\zeta^{(1)} \cdot x \frac{d\xi^{(0)}}{dx} + (1 + (\zeta^{(0)})^2) \cdot x \frac{d\xi^{(1)}}{dx} = 2\zeta^{(1)}(1 + (\xi^{(0)})^2) + 2\zeta^{(0)} \cdot 2\xi^{(0)}\xi^{(1)},$$

$$(3.8-2) \quad x \frac{d\zeta^{(2)}}{dx} = 2\xi^{(2)} + x(2\zeta^{(0)}\zeta^{(2)} + (\zeta^{(1)})^2).$$

$$\begin{aligned} & (2\zeta^{(0)}\zeta^{(2)} + (\zeta^{(1)})^2) \cdot x \frac{d\xi^{(0)}}{dx} + 2\zeta^{(0)}\zeta^{(1)} \cdot x \frac{d\xi^{(1)}}{dx} + (1 + (\zeta^{(0)})^2) \cdot x \frac{d\xi^{(2)}}{dx} \\ & = 2\zeta^{(2)}(1 + (\xi^{(0)})^2) + 2\zeta^{(1)} \cdot 2\xi^{(0)}\xi^{(1)} + 2\zeta^{(0)}(2\xi^{(0)}\xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^2), \end{aligned}$$

.....

各 order でこれらの方程式を満たすように  $\xi^{(n)}, \zeta^{(n)}$  ( $n=0$  (既知),  $1, 2, \dots$ ) の展開の係数を決める。

$$(3.9) \quad \zeta(x, x_0, C) = \frac{-1}{3}x + 2Cx^2 + \frac{-1}{3^2 \cdot 5}x^3 + \frac{-2C}{3^3}x^4 + \dots + x_0\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{-76C}{3^2}x + \dots\right) + x_0^2\left(\frac{1}{x^3} + \dots\right) + \dots,$$

$$\xi(x, x_0, C) = \frac{-2}{3}x + 2Cx^2 + \frac{-4}{3^2 \cdot 5}x^3 + \frac{14C}{3^3}x^4 + \dots + x_0\left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{-56C}{3^2}x + \dots\right) + x_0^2\left(\frac{-2}{x^3} + \dots\right) + \dots$$

$$(|x_0| \ll |x|, \quad C \text{ は任意. 特に } C=0: \text{FF}, \quad C=\frac{1}{24}: \text{IPB})$$

を得る。

ここで  $\zeta(x, x_0, C=0), \xi(x, x_0, C=0)$  を得るには FF のときの

$$\sigma_0 = x \cot(x - x_0) - 1 \quad \text{を利用する。}$$

$$\gamma^{(0)} = \cot(x-x_0) \quad \text{とおく} \quad \frac{d\gamma^{(0)}}{dx} = -(1+\gamma^{(0)2}) = \frac{-1}{\sin^2(x-x_0)} \quad \text{である。}$$

$$\xi = \frac{d\sigma_0}{dx} \quad \text{及び (3.8) から}$$

$$(3.10) \quad \xi = \gamma^{(0)} - x(1+\gamma^{(0)})^2, \quad \zeta = \gamma^{(0)} - \frac{1}{x}$$

$$\text{と なる。} \quad \cot x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{45}x^3 + \dots \quad \text{である。}$$

$$\gamma^{(0)} = \cot x - x_0 \frac{d}{dx} \cot x + \frac{1}{2} x_0^2 \frac{d^2}{dx^2} \cot x - \dots$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{45}x^3 + \dots + x_0 \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}x^2 + \dots \right) + x_0^2 \left( \frac{1}{x^3} + \frac{1}{15}x + \dots \right) + \dots \quad (|x_0| \ll |x|)$$

従って (3.10) から

$$(3.9)_{\zeta=0} \quad \zeta(x, x_0) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3 \cdot 5}x^3 + \dots + x_0 \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}x^2 + \dots \right) + x_0^2 \left( \frac{1}{x^3} + \frac{1}{15}x + \dots \right) + \dots,$$

$$\xi(x, x_0) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3 \cdot 5}x^3 + \dots + x_0 \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}x^2 + \dots \right) + x_0^2 \left( \frac{2}{x^3} + \frac{2}{3 \cdot 5}x + \dots \right) + \dots$$

( $|x_0| \ll |x|$ ) が得られる。

(II)  $|C| \ll |x| \ll |x_0|$  で  $\sigma_0(x, x_0, C)$ ,  $\xi(x, x_0, C)$ ,  $\rho(x, x_0, C)$  を求めること。

$$(1.16) \quad z'' \quad (v_0=0, v_1=1, v_2=0, v_3=1) \quad \text{とし、更に、} \quad x = \frac{1}{2i}t \quad \text{と} \quad \sigma_0 = \sigma - 1 - ix \quad \text{と 1 に つ$$

いて方程式を書き直せば

$$(3.11) \quad \left( x \frac{d^2 \sigma_0}{dx^2} \right)^2 = -4 \left( \left( \frac{d\sigma_0}{dx} \right)^2 + x \frac{d\sigma_0}{dx} - \sigma_0 \right) \left( x \frac{d\sigma_0}{dx} - \sigma_0 - 1 \right)$$

$$\text{と なる。} \quad \sigma_0 = x\gamma - 1 \quad \text{とおき}$$

$$(3.12) \quad \sigma_0 = \sigma^{(0)} + \lambda \sigma^{(1)} + \lambda^2 \sigma^{(2)} + \dots, \quad \gamma = \gamma^{(0)} + \lambda \gamma^{(1)} + \lambda^2 \gamma^{(2)} + \dots, \quad \gamma^{(0)} = \cot(x-x_0)$$

と展開する。このとき  $\sigma^{(0)} = x\gamma^{(0)} - 1$ ,  $\sigma^{(n)} = x\gamma^{(n)}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) である。

(3.12) の  $\sigma_0$  を (3.11) に代入して 7 次を得る。

$$(3.11-0) \quad x^2 \left( \frac{d^2 \sigma^{(0)}}{dx^2} \right)^2 = 4 \left( 1 + \sigma^{(0)} - x \frac{d\sigma^{(0)}}{dx} \right) \left( \left( \frac{d\sigma^{(0)}}{dx} \right)^2 + x \frac{d\sigma^{(0)}}{dx} - \sigma^{(0)} \right),$$

$$(3.11-1) \quad 2x^2 \frac{d^2 \sigma^{(0)}}{dx^2} \frac{d^2 \sigma^{(1)}}{dx^2} = 4 \left\{ \left( 1 + \sigma^{(0)} - x \frac{d\sigma^{(0)}}{dx} \right) \left( 2 \frac{d\sigma^{(0)}}{dx} \frac{d\sigma^{(1)}}{dx} + x \frac{d\sigma^{(0)}}{dx} - \sigma^{(1)} \right) \right. \\ \left. + \left( \sigma^{(1)} - x \frac{d\sigma^{(1)}}{dx} \right) \left( \left( \frac{d\sigma^{(0)}}{dx} \right)^2 + x \frac{d\sigma^{(0)}}{dx} - \sigma^{(0)} \right) \right\},$$

$$\begin{aligned}
 (3.11-2) \quad & x^2 \left( 2 \frac{d^2 \sigma^{(0)}}{dx^2} \frac{d^2 \sigma^{(2)}}{dx^2} + \left( \frac{d^2 \sigma^{(0)}}{dx^2} \right)^2 \right) \\
 &= 4 \left\{ (1 + \sigma^{(0)} - x \frac{d\sigma^{(0)}}{dx}) \left( 2 \frac{d\sigma^{(0)}}{dx} \frac{d\sigma^{(2)}}{dx} + \left( \frac{d\sigma^{(0)}}{dx} \right)^2 + x \frac{d\sigma^{(2)}}{dx} - \sigma^{(2)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \sigma^{(1)} - x \frac{d\sigma^{(0)}}{dx} \right) \left( 2 \frac{d\sigma^{(0)}}{dx} \frac{d\sigma^{(1)}}{dx} + x \frac{d\sigma^{(1)}}{dx} - \sigma^{(1)} \right) + \left( \sigma^{(2)} - x \frac{d\sigma^{(1)}}{dx} \right) \left( \left( \frac{d\sigma^{(1)}}{dx} \right)^2 + x \frac{d\sigma^{(1)}}{dx} - \sigma^{(1)} \right) \right\},
 \end{aligned}$$

$\sigma^{(0)} = x\gamma^{(0)} - 1$  は (3.11-0) の一つの特解である。  $\sigma^{(1)} = x(1 + (\gamma^{(0)})^2)$  が

(3.11-1) の特解であることは  $\gamma^{(0)} = 1 + (\gamma^{(0)})^2$  によって

$$x(x\gamma^{(0)} - 1) \frac{d^2 \gamma^{(0)}}{dx^2} + ((1 + 3(\gamma^{(0)})^2)x^2 - 2x\gamma^{(0)} - 1) \frac{d\gamma^{(0)}}{dx} + 2((1 + (\gamma^{(0)})^2)x - \gamma^{(0)})\gamma^{(0)} = 0$$

の特解であることと同値である。後者から

$$\gamma^{(0)} = k_1 (1 + (\gamma^{(0)})^2) \left( \frac{1}{4} \frac{1 - (\gamma^{(0)})^2}{1 + (\gamma^{(0)})^2} - \int \frac{1}{1 + (\gamma^{(0)})^2} \frac{dx}{x} \right) + k_2 \quad \text{を得る。故に、積}$$

分定数を取り直し、  $x, \lambda k_1 = -8C$  とし、

$$\sigma_0 = x\gamma^{(0)} - 1 - 4Cx \left( 1 - (1 + (\gamma^{(0)})^2) \int \frac{2}{1 + (\gamma^{(0)})^2} \frac{dx}{x} \right) + O(C^2)$$

$$\text{となる。} \quad \int \frac{2}{1 + (\gamma^{(0)})^2} \frac{dx}{x} \Big|_{x_0=0} = \int (1 - \cos 2x) \frac{dx}{x} = \int (2x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{45}x^5 - \dots) dx \quad \text{より}$$

$$\sigma_0 \Big|_{x_0=0} = \frac{-1}{3}x^2 + \frac{-1}{3 \cdot 5}x^4 + \dots + C \left( \frac{2}{3}x^3 + \frac{14}{3 \cdot 5}x^5 + \dots \right) + O(C^2)$$

となる。これは、既に得られている  $x_0=0$  のときの 1-parameter  $C$  を含む正則な解と一致する。以上から、

$$(3.13) \quad \sigma_0(x, x_0, C) = x \cot(x - x_0) - 1 - 4Cx \left( 1 - \frac{1}{\sin^2(x - x_0)} \int_{x_0}^x (1 - \cos 2(x - x_0)) \frac{dx}{x} \right) + O(C^2)$$

を得る。

この結果を利用して、 $\sigma_0$  と  $\xi$  の  $|C| \ll |x| \ll |x_0|$  での展開を求めて

$$\text{みよう。} \quad \xi = \frac{d\sigma_0}{dx} \quad \text{より} \quad \sigma_0 = \sigma^{(0)} + 4C\sigma^{(1)} + \dots \quad \text{のとき}$$

$$\xi = \xi^{(0)} + 4C\xi^{(1)} + \dots \quad \text{と展開される。上の議論から}$$

$$(3.14-0) \quad \sigma^{(0)} = x\gamma^{(0)} - 1, \quad \xi^{(0)} = \gamma^{(0)} - x(1 + (\gamma^{(0)})^2), \quad \frac{d\xi^{(0)}}{dx} = 2(1 + (\gamma^{(0)})^2)\sigma^{(0)}$$

1) (3.11-0) ( $\frac{d\sigma^{(0)}}{dx} = \xi^{(0)}$ )  $\xi$  満  $T = L$ .

$$(3.14-1) \quad \sigma^{(1)} = -x + 2x(1 + (\gamma^{(0)})^2) \int \frac{1}{1 + (\gamma^{(0)})^2} \frac{dx}{x}, \quad \xi^{(1)} = 1 + 2(1 - 2x\gamma^{(0)})(1 + (\gamma^{(0)})^2) \int \frac{1}{1 + (\gamma^{(0)})^2} \frac{dx}{x},$$

$$\frac{d\xi^{(1)}}{dx} = \frac{2}{x}(1 - 2x\gamma^{(0)}) + 4(x(1 + 3(\gamma^{(0)})^2) - 2\gamma^{(0)})(1 + (\gamma^{(0)})^2) \int \frac{1}{1 + (\gamma^{(0)})^2} \frac{dx}{x}$$

1) (3.11-1) ( $\frac{d\sigma^{(1)}}{dx} = \xi^{(1)}$ )  $\xi$  満  $T = \overline{T}$ .

$$\gamma^{(0)} = \cot(x - x_0) = i \frac{\varepsilon^{-1} e^{ix} + \varepsilon e^{-ix}}{\varepsilon^{-1} e^{ix} - \varepsilon e^{-ix}} \quad (\varepsilon = e^{ix_0})$$

$$= -a - (1+a^2)x - a(1+a^2)x^2 - \frac{1}{3}(1+3a^2)(1+a^2)x^3 - \frac{1}{5}a(2+3a^2)(1+a^2)x^4 - \dots \quad (a = \cot x_0, |x| \ll |x_0|)$$

2) (3.14-0), (3.14-1)  $\xi$  使,  $T$ .

$$(3.15) \quad \sigma_0(x, x_0, C) = -1 - (a+4C)x - (1+a^2+16aC)x^2 - (a(1+a^2)+4C(1+7a^2))x^3 - \dots$$

$$+ 8Cx(1+2ax + (1+3a^2)x^2 + \dots) \log x + O(C^2),$$

$$\xi(x, x_0, C) = -a + 4C - 2(1+a^2+8aC)x - (3a(1+a^2)+4C(1+15a^2))x^2 - \dots$$

$$+ 8C(1+4ax + 3(1+3a^2)x^2 + \dots) \log x + O(C^2), \quad (|C| \ll |x| \ll |x_0|)$$

$\xi$  得る。

$$\text{又} \quad (3.13) \quad \rho = \frac{1}{\pi} \exp \int \frac{\sigma_0}{x} dx \quad \text{f} \quad \uparrow$$

$$(3.16) \quad \pi \rho(x, x_0, C) = \frac{\sin(x-x_0)}{x} - 4C \left( \sin(x-x_0) + \frac{\cos(x-x_0)}{x} \int_{x_0}^x (1 - \cos 2(x-x_0)) \frac{dx}{x} \right. \\ \left. - \frac{\sin(x-x_0)}{x} \int_{x_0}^x \sin 2(x-x_0) \frac{dx}{x} \right) + O(C^2)$$

を得る。IPB の 1 粒子 密度行列  $\pi \rho(x, x_0=0, C=\frac{1}{2\pi})$  は Schlutz, Lenard

により、核  $K(t, t') = \frac{\sin(t-t')}{t-t'}$  に属する Fredholm 1 次小行列式:

$$\frac{1}{(-\lambda)} \Delta_{[0, \pi]} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}; \lambda \Big|_{\lambda = \frac{2}{\pi}} \quad \text{で計算されるが、他方、摂動計算で得ら$$

れた (3.16) 2)  $x_0=0$  とおいたものは、丁度、この Fredholm 小行列

式の展開式:

$$\begin{aligned}
 (3.17) \quad \frac{\Delta_{[0,x]} \left( \begin{smallmatrix} 0 \\ x \end{smallmatrix}; \lambda \right)}{(-\lambda)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_0^x \cdots \int_0^x \det \begin{pmatrix} K(0,x) & K(0,t_1) & \cdots & K(0,t_n) \\ K(t_1,x) & K(t_1,t_1) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ K(t_n,x) & & & K(t_n,t_n) \end{pmatrix} dt_1 \cdots dt_n \\
 &= \frac{\sin x}{x} - \lambda \left( \sin x - \int_0^x \frac{\sin t}{t} \frac{\sin(x-t)}{x-t} dt \right) + \cdots \\
 &\quad \left( \text{但し, } \lambda = 4C = \frac{2}{\pi} \right)
 \end{aligned}$$

になつてゐることに注意する。

### 参考文献

- [1] K. Ueno, Monodromy preserving deformation of linear differential equations with irregular singular points, preprint, RIMS 301, Kyoto Univ. (1979).
- [2] K. Okamoto, Polynomial Hamiltonians associated to the Painlevé equations, preprint, Tokyo Univ. (1979).
- [3] N.A. Lukashovich, Solutions of the fifth equation of Painlevé, *Differentsial'nye Uravneniya*, 4, 1413-1420 (1968) (*Differential Equations*, 4, 732-735 (1968)).
- [4] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Mōri, M. Sato, Density matrix of impenetrable bose gas and the fifth Painlevé transcendent, preprint, RIMS 303, Kyoto Univ. (1979).