

算数・数学におけるある教材の背景について

中部大学現代教育学部 金光三男 (Mitsuo Kanemitsu)
College of Contemporary Education
Chubu University

§1. はじめに

松沢要一 ([2]) に記載してある教材の一寸した補足及びそれと関連している数学の背景について考察する。

[3] によると、小学校 2 年生では、「4 位数までについて、十進位取り記数法による数の表し方及び数の大小や順序について理解すること」、「2 位数の加法及びその逆の減法の計算の仕方を考え、それらの計算が 1 位数などについての基本的な計算を基にしてできることを理解し、それらの計算が確実にできること。また、それらの筆算の仕方について理解すること」、「簡単な場合について、3 位数などの加法及び減法の計算の仕方を考えること」などが記載されている。

第 3 学年では、「3 位数や 4 位数の加法及び減法の計算の仕方を考え、それらの計算が 2 位数などについての基本的な計算を基にしてできることを理解すること。また、それらの筆算の仕方について理解すること」、「加法及び減法の計算が確実にでき、それらを適切に用いること」などと記載されている。1 位数の加減の計算を基本にして、2 位数の計算を、また 2 位数の計算を基本にして 3 位数や 4 位数の計算を行えばそれ以上の桁数の加減の計算が出来るようになる。一般的に言えば、ここまでやっておけば、それより後は自分一人でできることを目指してそこまでの内容について学習するようにしていると言えよう。

ここでは、松沢要一 ([2]) の教材：「1 から 9 までの数字の書いてあるカードから 2 枚選んで、並び方を変えて一番数字の並び方を大きくした数と一番小さくした数とを引き算し、これを繰り返して答が 1 桁になったところで終了する」。

これは上記の目標に合い、不思議さや発展性を持っている教材であることが分かる。先にも述べたように、この教材の補足と数学的な背景など考察することを目標としよう。整数の四則計算は第 1 学年から第 4 学年まで 4 年間に渡って指導されている。また、十進位取り記数法の理解が重要で色々な所で必要となる。

§2. 2桁の場合の松沢要一氏の教材の背景

さて、教材は、1から9までの9枚のカードが並べてあり、その中から異なる2枚を選び出す。それを並び替えて、一番大きい数と一番小さい数の差を取る。これを繰り返すと9にたどり着く。ここで、9枚のカードから異なる2枚のカードを選ぶ組み合わせの個数は、 ${}_9C_2$ の36通りある。高等学校の数学の内容である組み合わせにも繋がっていく。

例 1：上記のカードの問題で、8と6を選んだとする。並び替えて一番大きい数86と一番小さい数68を作る。この2数の差を取ると18、更に繰り返して81と18の差を取ると63。三度繰り返すと、 $63 - 36 = 27$ となるが、更に繰り返す。 $72 - 27 = 45$ 。更に $54 - 45 = 9$ で1桁になったので終了する。5回で9になった。どの引き算にも繰り下がりがあり、小学生の引き算の練習と数の大小の理解の指導に適している。

例 2：7と3のカードを選ぶ。 $73 - 37 = 36$ 、繰り返して $63 - 36 = 27$ 、更に $72 - 27 = 45$ 、更に $54 - 45 = 9$ となり4回で1桁の9に到達した。8と1のときも同様にすると4回で9に到達する。

実際の小学校での授業では、児童の人数は多いので、何回で9になったかを個々の児童に聞くと多くの結果が出てきて、各回数ごとにまとめて黒板に書いてみる。

何回目で9になるかは、予想できる。この理由を示そう。

2枚のカードの数字を a と b とする。 $a > b$ と仮定して良い。この2枚を並べた数は、 $10a + b$ ($a > b$)である。 $0 < a - b < 9$ である。

$a - b = 1$ のとき、 $(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b) = 9$ 。1回で9に到達する。

同様に $a - b = 2$ のとき、 $(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b) = 18$ 。2回目は $81 - 18 = 63$ である。3回目は $63 - 36 = 27$ 。4回目は $72 - 27 = 45$ 。5回目は $54 - 45 = 9$ 。よって $a - b = 2$ のときは5回目で9に達する。

$a - b = 3$ のときは、 $9(a - b) = 27$ 。2回目は、 $72 - 27 = 45$ 。3回目は、 $54 - 45 = 9$ 。よって3回で9になる。

$a - b = 4$ のときは、 $9(a - b) = 36$ 。2回目は、 $63 - 36 = 27$ 。3回目は $72 - 27 = 45$ 。4回目は、 $54 - 45 = 9$ 。よって4回で9になる。

$a - b = 5$ のときは、 $9(a - b) = 45$ 。2 回目は、 $54 - 45 = 9$ 。よって 2 回で 9 になる。

$a - b = 6$ のときは、 $9(a - b) = 54$ 。2 回目で $54 - 45 = 9$ 。

$a - b = 7$ のとき、 $9(a - b) = 63$ 。2 回目は、 $63 - 36 = 27$ 。3 回目は、 $72 - 27 = 45$ 。4 回目は、 $54 - 45 = 9$ 。よって 4 回目で 9 になる。

$a - b = 8$ のときは、 $9(a - b) = 72$ 。2 回目は、 $72 - 27 = 45$ 。3 回目は、 $54 - 45 = 9$ 。よって 3 回で 9 になる。

勿論、[2] にはこの計算は結果のみ記載してある。九九の復習も含まれた教材である。[1] にも述べてあるように、九九を指導するとき、日常生活で「に、し、ろ、は、とう、…」や「ご、じゅう、じゅうご、…」に関連した 2 の段や 5 の段から始めると理解し易い。九九は中国から伝来し、万葉集の頃使用されるようになったと言われている。「三五月」を「もちづき」と読み、もちづきは満月のことで「じゅうごや」とも呼ばれた。

先の問題で「9」になるまでの引き算の回数は次のようである。

引き算の回数：1 回（カードの差：1）、2 回（カードの差：5 と 6）、3 回（カードの差：3 と 8）、4 回（カードの差：4 と 7）、5 回（カードの差：2）。

§ 3. 桁数の多い場合の松沢要一氏の教材の背景

(3-1) 3 桁の場合

2 桁の場合は、5 回以内で「9」に到達した。3 桁の場合：6 回以内で「495」に到達。

[2] には、「4 桁の場合：7 回以内で「6174」に到達」と記載してある。

3 桁の数を、 $100a + 10b + c$ とする。ここで、 $a > b > c$ と仮定してよい。最小の並び方にすると、 $100c + 10b + a$ となる。この 2 数の差は、 $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100(a - c) - (a - c) = 99(a - c)$ 。 $2 \leq a - c < 9$ だからこれについて考察する。

1) $a - c = 2$ の場合。

$99 \times 2 = 198$ が第 1 回目。2 回目は、 $981 - 189 = 792$ 。3 回目は、 $972 - 279 = 693$ 。4 回目は、 $963 - 369 = 594$ 。5 回目は、 $954 - 459 = 495$ だから、5 回目で「495」になる。

2) $a - c = 3$ の場合。

1 回目は 2 9 7、2 回目は 6 9 3 で、 $a - c = 2$ の場合の 3 回目的一致し、以後は $a - c = 2$ のループと一致する。即ち、3 回目は 5 9 4、4 回目は「4 9 5」になる。

3) $a - c = 4$ の場合。

1 回目は 3 9 6。2 回目から $a - c = 2$ のループに入る。3 回で「4 9 5」になる。

4) $a - c = 5$ のとき。

1 回目で 4 9 5 になる。

5) $a - c = 6$ のとき。

1 回目で 5 9 4。即ち、1 回目で $a - c = 2$ のループに入る。2 回で「4 9 5」になる。

6) $a - c = 7$ のとき。

1 回目は 6 9 3 になり、 $a - c = 2$ のループに入る。3 回で「4 9 5」になる。

7) $a - c = 8$ のとき。

1 回目は 7 9 2 で $a - c = 2$ のループに入る。4 回で「4 9 5」になる。

8) $a - c = 9$ の場合、

1 回目は 8 9 1、2 回目に $a - c = 2$ のループに入り、7 9 2 となる。このループを進んで行き、5 回で「4 9 5」になる。

(3-2) 4 桁の場合

[2] によれば、「7 回以内」に「6 1 7 4」になる。これを検証しよう。

4 桁の数は、 $1000a + 100b + 10c + d$ ($a > b > c > d$) とできる。この数字を並び替えて最小の数字を作ると、 $1000d + 100c + 10b + a$ となる。

この2数の差を取ると、 $1000(a-d) + 100(b-c) + 10(c-b) + (d-a) = 1000(a-d) + 100(b-c) - 10(b-c) - (a-d) = 999(a-d) + 90(b-c)$ ($a-d > b-c$, $a-d \geq 3$) ($\cdots \diamond$) と記載できる。

(i) $a-d=3$ のとき、 $b-c=1$ 。

$a-d=3, b-c=1$ の場合、この値を $\diamond$ に代入すると、 $999 \times 3 + 90 \times 1 = 2997 + 90 = 3087$ 。2回目は、 $8730 - 378 = 8352$ 、3回目は、 $8532 - 2358 = 6174$ となり、3回で「6174」に到達した。

(ii) $a-d=4, b-c=2, 1$ の場合。

$a-d=4, b-c=2$ のとき、1回目は4176、2回で「6174」に到達する。

$a-d=4, b-c=1$ のとき、 $999 \times 4 + 90 \times 1 = 4086$ 。2回目は、 $8640 - 468 = 8172$ 、3回目は、 $8721 - 1278 = 7443$ 、4回目は、 $7443 - 3447 = 3996$ 、5回目は、 $9963 - 3699 = 6264$ 、6回目は、 $6642 - 2466 = 4176$ ($a-d=4, b-c=2$ の場合)、7回目は、 $7641 - 1467 = 6174$ となる。よって、7回で「6174」に到達する。

(iii) $a-d=5, b-c=3, 2, 1$ の場合。

$a-d=5, b-c=3$ のとき、1回目は5265、2回目は3996で、 $a-d=4, b-c=1$ のループに入る。5回で「6174」に到達する。

$a-d=5, b-c=2$ のとき、1回目は5175、第2回目で、5994、第3回目は5355で $a-d=5, b-c=4$ のループに入る。7回で「6174」に到達する。

$a-d=5, b-c=1$ のとき、1回目は5085、第2回目は7992、第3回目は7173で $a-d=7, b-c=2$ のループに入る。7回で「6174」に到達する。

(iv) $a-d=6, b-c=4, 3, 2, 1$ の場合。

$a-d=6, b-c=4$ のとき、1回目は6354、第2回目は3087、第3回目は3087で $a-d=3, b-c=1$ のループに入る。以後、8352を経て、第4回で「6174」。

$a-d=6, b-c=3$ のとき、1回目は6 2 6 4、第2回目は4 1 7 6。
3回で「6 1 7 4」に到達する。

$a-d=6, b-c=2$ のとき、1回で「6 1 7 4」に到達する。

$a-d=6, b-c=1$ のとき、1回目は6 0 8 4、第2回目は8 1 7 2。第3回目は7 4 4 3。第4回目は3 9 9 6。第5回目は6 2 6 4で
 $a-d=6, b-c=3$ のループにに入る。第6回目で4 1 7 6。7回で「6 1 7 4」に到達する。

(v) $a-d=7, b-c=5, 4, 3, 2, 1$ の場合。

$a-d=7, b-c=5$ のとき、第1回目は7 4 4 3、第2回目は3 9 9 6、第3回目は6 2 6 4である。第4回目で4 1 7 6。5回で「6 1 7 4」に到達する。

$a-d=7, b-c=4$ のとき、1回目は7 3 5 3。第2回目は4 1 7 6。第3回目で「6 1 7 4」。

$a-d=7, b-c=3$ のとき、1回目は7 2 6 3で、第2回は5 2 6 5、これは $a-d=5, b-c=3$ 。以下、3 9 9 6、6 2 6 4、4 1 7 6、最後に第6回で「6 1 7 4」になる。

$a-d=7, b-c=2$ のとき、第1回目は、7 1 7 3、以下6 3 5 4、3 0 8 7、8 3 5 2、最後は5回目で「6 1 7 4」になる。

$a-d=7, b-c=1$ のとき、1回目は7 0 8 3、以後8 3 5 2、最後に3回目で「6 1 7 4」になる。

(vi) $a-d=8, b-c=6, 5, 4, 3, 2, 1$ の場合。

$a-d=8, b-c=5$ のとき (途中、 $a-d=8, b-c=1$ が出てくる)、1回目は8 4 4 2で、以下、5 9 9 4、5 3 5 5、1 9 9 8、8 0 8 2 ($a-d=8, b-c=1$ の場合)、8 5 3 2 ($a-d=8, b-c=6, 4$ の場合)、最後の第7回目は6 1 7 4である。

$a-d=8, b-c=2$ の場合。第1回目は8 1 7 2。以後、7 4 4 3、3 9 9 6、6 2 6 4、4 1 7 6、第6回目の6 1 7 4。

$a-d=8, b-c=3$ の場合。第1回目は8 2 6 2、6 3 5 4、3 0 8 7、8 3 5 2、最後は5回目の6 1 7 4である。

まとめ

a) 6084 ($a-d=6, b-c=1$), 8172 ($a-d=8, b-c=2$), 7443 ($a-d=7, b-c=5$), 3996, 6264 ($a-d=6, b-c=3$), 4176, 6174。

b) 4086 ($a - d = 4, b - c = 1$), 8172 で、a) の 2 番目に入る。

c) 5085 ($a - d = 5, b - c = 1$), 7992, 7173 ($a - d = 7, b - c = 2$), 6354 ($a - d = 6, b - c = 4$), 3087 ($a - d = 3, b - c = 1$), 8352 ($a - d = 8, b - c = 4$), 6174。

d) 7263 ($a - d = 7, b - c = 3$), 5265 ($a - d = 5, b - c = 3$), 3996, 6264 ($a - d = 6, b - c = 3$), 4176, 6174。

e) 8262 ($a - d = 8, b - c = 3$), 6354 (c) のループの 4 番目に入る。

f) 7353 ($a - d = 7, b - c = 4$), 4176 ($a - d = 4, b - c = 2$), 6174。

g) 7083 ($a - d = 7, b - c = 1$), 8352 ($a - d = 8, b - c = 4$), 6174。

h) 8442 ($a - d = 8, b - c = 5$), 5994, 5355, 1998, 8082 ($a - d = 8, b - c = 1$), 8532 ($a - d = 8, b - c = 6$), 6174。

i) 5275 ($a - d = 5, b - c = 2$), 5994 (h) の 2 番目のループに入る。

5桁以上の場合：決まった数に到達することはない。これは、5桁の数は $10000a + 1000b + 100c + 10d + e$ ($a > b > c > d > e$) とすると、 $9999(a - e) + 990(b - d) = 99(101(a - e) + 10(b - d))$ が複雑であることによると思われる。詳しくは課題とする。

参考文献

- [1] 黒木哲徳、入門 算数学 [第2版]、日本評論社、2009年
- [2] 松沢要一、こんな教材が算数・数学好きにした、東洋館出版社、2006年
- [3] 文部科学省、小学校学習指導要領解説 算数編、東洋館出版、2008年