

Hadamard 有限部分積分に対する DE 公式

緒方秀教 (Hidenori Ogata)[†]
杉原正顯 (Masaaki Sugihara)[†]
森 正武 (Masatake Mori)[†]

Cauchy の主および Hadamard の有限部分に対して、高橋・森の DE 公式のタイプの数値積分公式を、Sinc 近似理論を用いて導出した。更に、函数解析的視点から我々の導出した Hadamard 有限部分に対する DE 公式の最適性を論ずる。

1 Hadamard の有限部分

$F(x)$ を実軸 R 内の区間 (a, b) 上で積分可能な函数とする。 $F(x)/(x-\lambda)^n$ ($n \in N$, $a < \lambda < b$) は一般に (λ, b) で積分可能でない。ところが任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\left(\int_a^{\lambda-\varepsilon} + \int_{\lambda+\varepsilon}^b\right) \frac{F(x)}{(x-\lambda)^n} dx$ は積分可能で、Taylor 展開

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F^{(k)}(\lambda)}{k!} (x-\lambda)^k + \varphi(x)(x-\lambda)^n$$

($\varphi(x)$ は (λ, b) で積分可能な函数) を用いることにより、

$$\begin{aligned} & \int_{\lambda+\varepsilon}^a \frac{F(x)}{(x-\lambda)^n} dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{F^{(k)}(\lambda)}{k!(n-k-1)} \frac{1}{\varepsilon^{n-k-1}} - \frac{F^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \log \varepsilon \\ &+ \left\{ - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{F^{(k)}(\lambda)}{k!(n-k-1)} \frac{1}{(b-\lambda)^{n-k-1}} + \frac{F^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \log(b-\lambda) + \int_{\lambda+\varepsilon}^a \varphi(x) dx \right\} \quad (1) \end{aligned}$$

と書ける。右辺は、 ε^{-1} のべき乗と $\log \varepsilon$ との線形結合と、極限 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ で有限な項 $\{\dots\}$ の和である。このうち有限な項 $\{\dots\}$ を取り出して、積分 $\int_{\lambda}^b F(x)/(x-\lambda)^n dx$ の Hadamard の有限部分 (積分) (finite part, partie finie) と称する。

$$\text{f.p.} \int_{\lambda}^b \frac{F(x)}{(x-\lambda)^n} dx, \quad \text{または} \quad \text{p.f.} \int_{\lambda}^b \frac{F(x)}{(x-\lambda)^n} dx$$

という記法を用いる。本論文では専ら前者の記法を用いる。

$$\text{f.p.} \int_{\lambda}^b \frac{F(x)}{(x-\lambda)^n} dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{\lambda+\varepsilon}^b \frac{F(x)}{(x-\lambda)^n} dx - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{F^{(k)}(\lambda)}{k!(n-k-1)} \frac{1}{\varepsilon^{n-k-1}} + \frac{F^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \log \varepsilon \right\}. \quad (2)$$

ただし、 $n=1$ のときは右辺第 2 項は存在しない。

[†] 東京大学工学部物理工学科

有限部分 f.p. $\int_a^\lambda \frac{F(x)}{(x-\lambda)^n} dx$ も同様に定義される。

さて、本論文で我々が考察するのは、次のタイプの有限部分である：

$$\begin{aligned} & \text{f.p.} \int_a^b \frac{F(x)}{(x-\lambda)^n} dx \\ &:= \text{f.p.} \int_a^\lambda \frac{F(x)}{(x-\lambda)^n} dx + \text{f.p.} \int_\lambda^b \frac{F(x)}{(x-\lambda)^n} dx \\ &= \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \left(\int_a^{\lambda-\epsilon} + \int_{\lambda+\epsilon}^b \right) \frac{F(x)}{(x-\lambda)^n} dx - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{F^{(k)}(\lambda)/k!}{n-k-1} \frac{1+(-1)^{n-k}}{\epsilon^{n-k-1}} \right\} & \dots \quad n \geq 2, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{\lambda-\epsilon} + \int_{\lambda+\epsilon}^b \right) \frac{F(x)}{x-\lambda} dx & \dots \quad n = 1. \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

$n = 1$ の場合は、いわゆる Cauchy の主値 (principal value, valeur principale)：

$$\text{p.v.} \int_a^b \frac{F(x)}{x-\lambda} dx \quad \text{or} \quad \text{v.p.} \int_a^b \frac{F(x)}{x-\lambda} dx$$

と一致する。

Hadamard の有限部分に対する数値積分法に関しては、Paget が Gauss 型の積分公式を得ている [8]。この公式は被積分関数 $F(x)$ が、端点を含めた積分区間 $[a, b]$ の近傍で正則な函数の場合に有効である。一方、Bialecki は Sinc 近似理論に基づく公式を得た [3]。これは、変数変換に基づく積分公式 [9], [12], [13] であり、積分区間の端点に特異性がある場合にも使える。

Bialecki は変数変換として $x = \tanh(t/2)$ を採用し、標本点数 N に対し $O(\exp(-\text{const } N^{1/2}))$ の誤差評価を得ている。一方我々は変数変換として二重指数型変数変換 (DE 変換) $x = \tanh((\pi/2) \sinh t)$ を用い、 $O(\exp(-\text{const } N/\log N))$ という評価を得た。

次節以降のため、Hadamard の有効部分 (3) を取り扱いやすい形に表現しておく。

補題 1 $F(z)$ が、开区間 (a, b) を含むある領域 U で解析的なとき、

$$(1) \quad \text{f.p.} \int_a^b \frac{F(x)}{(x-\lambda)^n} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\gamma_+} + \int_{\gamma_-} \right) \frac{F(z)}{(z-\lambda)^n} dz, \quad (4)$$

$\gamma_\pm$ は、2 点 a, b を結び $U_\pm = U \cap \{\pm \Im z \geq 0\}$ に含まれる積分路 (図 1 参照)、

$$(2) \quad \text{f.p.} \int_a^b \frac{F(x)}{(x-\lambda)^n} dx = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} \text{p.v.} \int_a^b \frac{F(x)}{x-\lambda} dx. \quad (5)$$

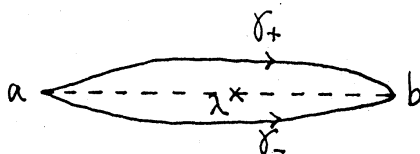


図 1: 積分路 $\gamma_\pm$

(証明) 積分路 $\gamma_\pm$ を図 2 のように変形する。

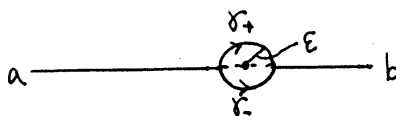


図 2:

$F(z)$ を $z = \lambda$ の周りで Taylor 展開して (4) の右辺に代入すれば、簡単な計算により (3) の右辺を得る。■

2 数値積分公式と誤差評価

実軸 R 上で実解析的な函数 $f(x)$ に対して、sinc 函数 $\text{sinc}(x) = \sin \pi x / (\pi x)$ を用いた函数近似

$$f(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \text{sinc} \left(\frac{x - kh}{h} \right) \quad (6)$$

を Sinc 近似と呼び、この近似に基づく数値計算法を総称して Sinc 近似則と呼ぶ [9]。例えば、式 (6) の両辺を無限区間 $R = (-\infty, +\infty)$ に渡って積分すれば、台形則

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \approx h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \quad (7)$$

を得る。

また、 $f(x)$ が複素平面 C 内の帯状領域 $D_d = \{z \in C \mid |\Im z| < d\}$ ($d > 0$) で解析的で、条件

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial D_d(\epsilon)} |f(z)| |dz| < +\infty \quad (8)$$

$$(D_d(\epsilon) = \{z \in C \mid |\Re z| < \epsilon^{-1}, |\Im z| < d(1 - \epsilon)\})$$

を満たすときは、台形則 (7) について誤差評価

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx - h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \right| \leq \frac{e^{-2\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial D_d(\epsilon)} |f(z)| |dz| \quad (9)$$

が成り立つことがわかっている [9]。

さて Sinc 近似理論は、実軸上の任意の区間 Γ で実解析的な函数に対しても適用できる。その基本的なアイデアは、 Γ から R への等角写像を用いて変数変換を行い、 Γ 上の実解析的な函数を全 R 上で実解析的な函数に焼き直すことである。議論を進める前に、いくつかの記号を定義しておく。

定義 1 Γ を実軸 R 内の开区間とする: $\Gamma = (a, b)$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$)

$\mathcal{D}$ を、 Γ の近傍であり端点 a, b をその境界 $\partial \mathcal{D}$ に含むような、複素平面 C 内の領域とする。 ϕ を $\mathcal{D}$ から帯状領域 D_d への上への等角写像で、

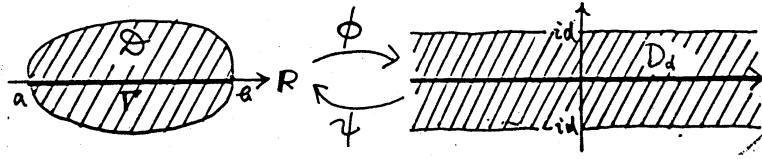
$$\phi(\Gamma) = R, \quad \phi(a) = -\infty, \quad \phi(b) = +\infty$$

であるものとする。また、 ϕ の逆写像を ψ と記す。(図 3 参照)

また、 $h > 0$ に対し、

$$x_k = x_k(h) = \psi(kh) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

という記号を度々用いる。

図 3: 単連結領域 $\mathcal{D}$ と、等角写像 ϕ, ψ

函数族 $H^1(\mathcal{D})$ を、 $\mathcal{D}$ における正則函数 F で

$$N_1(F, \mathcal{D}) := \int_{\partial \mathcal{D}} |F(z)| |dz| < +\infty \quad (10)$$

なるもの全体とする。

次の等式が一連の Sinc 近似公式の導出、及びその誤差評価の出発点になる。

補題 2 $F \in H^1(\mathcal{D})$ に対して、

$$\begin{aligned} \frac{F(z)}{\phi'(z)} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(x_k)}{\phi'(x_k)} S(k, h) \circ \phi(z) \\ = \frac{\sin(\pi \phi(z)/h)}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{F(\zeta) d\zeta}{(\phi(\zeta) - \phi(z)) \sin[\pi \phi(\zeta)/h]}. \end{aligned} \quad (11)$$

(証明) 留数定理を用いれば、右辺の積分が左辺に等しくなることがわかる。 ■

まず、Cauchy の主値の数値積分公式・誤差の評価は次の定理で与えられる [3]:

定理 1 $F \in H^1(\mathcal{D})$, $\lambda \in \Gamma - \{x_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ に対して、

$$Q^{PV}(F, \lambda) := h \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(x_k)/\phi'(x_k)}{x_k - \lambda} + \pi F(\lambda) \cot\left(\frac{\pi}{h} \phi(\lambda)\right) \quad (12)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} (a) \quad & \text{p.v.} \int_{\Gamma} \frac{F(x)}{x - \lambda} dx - Q^{PV}(F, \lambda) \\ & = \frac{i}{2} \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{F(\zeta) \exp[i(\pi/h)\phi(\zeta) \operatorname{sgn} \Im \phi(\zeta)]}{(\zeta - \lambda) \sin[\pi \phi(\zeta)/h]} d\zeta, \end{aligned} \quad (13)$$

$$(b) \quad \left| \text{p.v.} \int_{\Gamma} \frac{F(x)}{x - \lambda} dx - Q^{PV}(F, \lambda) \right| \leq \frac{e^{-2\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} \int_{\partial \mathcal{D}} \left| \frac{F(z)}{z - \lambda} \right| |dz|. \quad (14)$$

(証明) [3] には [4] を refer してあるのみで十分な証明はなく、また、[4] はいまだ to appear のままであるので、ここで念のために証明を与えておく。

(a) 式 (2) を用いれば、

$$\begin{aligned} & \text{p.v.} \int_{\Gamma} \frac{F(x)}{x - \lambda} dx - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(x_k)}{\phi'(x_k)} \text{p.v.} \int_{\Gamma} \frac{\sin[(\pi/h)(\phi(x) - kh)]}{(x - \lambda)(\pi/h)(\phi(x) - kh)} \phi'(x) dx \\ & = \text{p.v.} \int_{\Gamma} \frac{\sin[\pi \phi(x)/h] \phi'(x)}{x - \lambda} \left\{ \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{F(\zeta) d\zeta}{[\phi(\zeta) - \phi(x)] \sin[\pi \phi(\zeta)/h]} \right\} dx. \end{aligned}$$

補題 1 を用いれば、左辺第 2 項の積分は

$$\begin{aligned} & \text{p.v.} \int_{\Gamma} \frac{\sin[(\pi/h)(\phi(x) - kh)]}{(x - \lambda)(\pi/h)(\phi(x) - kh)} \phi'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\gamma_+} + \int_{\gamma_-} \right) \frac{\sin[(\pi/h)(\phi(z) - kh)]}{(z - \lambda)(\pi/h)(\phi(z) - kh)} \phi'(z) dz \end{aligned}$$

と書ける。いま

$$\gamma_{\pm} = \psi(L_{\pm d}), \quad L_{\pm d} = \{ u \pm id \mid u \in \mathbb{R} \}$$

と選ぶと、

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_{\pm}} \frac{\sin[(\pi/h)(\phi(z) - kh)]}{(z - \lambda)(\pi/h)(\phi(z) - kh)} \phi'(z) dz \\ &= \frac{h}{\pi} \int_{L_{\pm d}} \frac{\sin[(\pi/h)(w - kh)]}{(\psi(w) - \lambda)(w - kh)} dw \\ &= \frac{h}{\psi(kh) - \lambda} + \frac{h\phi'(\lambda)}{\phi(\lambda) - kh} \exp \left[\mp \frac{i\pi}{h} (\phi(\lambda) - kh) \right]. \end{aligned}$$

よって、

$$(15) = \frac{h}{x_k - \lambda} + \frac{h\phi'(\lambda)}{\phi(\lambda) - kh} \cos \left[\frac{\pi}{h} (\phi(\lambda) - kh) \right].$$

右辺については、積分順序の交換を行えばよい。

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{F(\zeta)}{\sin[\pi\phi(\zeta)/h]} \left\{ \frac{1}{2} \left(\int_{\gamma_+} + \int_{\gamma_-} \right) \frac{\sin[\pi\phi(\zeta)/h] \phi'(\zeta)}{(z - \lambda)[\phi(\zeta) - \phi(z)]} dz \right\} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{F(\zeta)}{\sin[\pi\phi(\zeta)/h]} \left\{ -\frac{\pi \exp[i(\pi/h)\phi(\zeta) \operatorname{sgn}(\Im \phi(\zeta))]}{\zeta - \lambda} + \pi \phi'(\lambda) \frac{\cos[\pi\phi(\zeta)/h]}{\phi(\zeta) - \phi(\lambda)} \right\} d\zeta \\ &= (14) \text{ の右辺} + h\phi'(\lambda) \cot \left[\frac{\pi}{h} \phi(\lambda) \right] \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{F(z_k)/\phi'(z_k)}{kh - \phi(\lambda)}. \end{aligned}$$

以上を整理すれば、題意の等式 (14) を得る。

(b) $\zeta \in \partial \mathcal{D}$ のとき、 $|\Im \zeta| = d$

$$\sin[\pi\phi(\zeta)/h] = (\sin^2[(\pi/h)\Re \phi(\zeta)] + \sinh^2[(\pi/h)\Im \phi(\zeta)])^{1/2} \geq \sinh(\pi d/h)$$

に気を付ければ、直ちに得られる。 ■

定理 1 と同様にして、前節の補題 1 を用いれば、Hadamard の有限部分に対する数値積分公式とその誤差評価も得られる [9] :

定理 2 $F \in H^1(\mathcal{D})$, $\lambda \in \Gamma - \{x_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$Q^{\text{fp}}(F, n, \lambda) := h \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(x_k)/\phi'(x_k)}{(x_k - \lambda)^n} + \frac{\pi}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} \left\{ F(\lambda) \cot \left[\frac{\pi}{h} \phi(\lambda) \right] \right\} \quad (15)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \text{f.p.} \int_{\Gamma} \frac{F(x)}{(x - \lambda)^n} dx - Q^{\text{fp}}(F, n, \lambda) \\ &= \frac{i}{2} \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{F(\zeta) \exp[i(\pi/h)\phi(\zeta) \operatorname{sgn}(\Im \phi(\zeta))]}{(\zeta - \lambda)^n \sin[\pi\phi(\zeta)/h]} d\zeta, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{(b)} \quad \left| \text{f.p.} \int_{\Gamma} \frac{F(x)}{(x - \lambda)^n} dx - Q^{\text{fp}}(F, n, \lambda) \right| \leq \frac{e^{-2\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} \int_{\partial \mathcal{D}} \left| \frac{F(z)}{(z - \lambda)^n} \right| |dz|. \quad (17)$$

注意 1 $\lambda = x_K$ ($K \in \mathbb{Z}$) となる場合は、すでに得られた公式において極限操作 $\lambda \rightarrow x_K$ を行えば、公式が得られる。 $n = 1, 2$ の場合を記すと、

$$\begin{aligned} \text{p.v.} \int_{\Gamma} \frac{F(x)}{x - \lambda} dx &\approx Q^{\text{pv}}(F, x_K) \\ &:= h \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq K}}^{\infty} \frac{F(x_k)}{x_k - x_K} - \frac{h \phi''(x_K)}{2[\phi'(x_K)]^2} F(x_K) + \frac{h}{\phi'(x_K)} F'(x_K). \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{f.p.} \int_{\Gamma} \frac{F(x)}{(x - \lambda)^2} dx &\approx Q^{\text{fp}}(F, 2, x_K) \\ &:= h \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq K}}^{\infty} \frac{F(x_k)}{(x_k - x_K)^2} + \left\{ -\frac{\pi^2}{3h} \phi'(z_K) + \frac{h}{4} \frac{[\phi''(z_K)]^2}{[\phi'(z_K)]^3} - \frac{h}{6} \frac{\phi'''(z_K)}{[\phi'(z_K)]^2} \right\} F(z_K) \\ &\quad - \frac{h \phi''(z_K)}{2 \phi'(z_K)} F'(z_K) + \frac{h}{2 \phi'(z_K)} F''(z_K) \end{aligned} \quad (19)$$

という結果を得る。

(12), (15) の無限和 $h \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dots$ は有限和 $h \sum_{k=-N}^N \dots$ で置き換える必要がある。このとき、定理 1 で与えた「離散化誤差」に加え、無限和を有限和で近似したときの「打ち切り誤差」も考慮しなければならない。そのために、 $|x|$ が無限大になるときの函数の減衰度に関し仮定をおく必要がある。次の定理は、函数が変数変換後指数函数的に減衰する場合の、有限和を用いた場合の誤差評価を与える。

定理 3 $Q^{\text{pv}}(F, \lambda)$, $Q^{\text{fp}}(F, \lambda)$ の無限和 $h \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dots$ を有限和 $h \sum_{k=-N}^N \dots$ で置き換えた公式をそれぞれ $Q_N^{\text{pv}}(F, \lambda)$, $Q_N^{\text{fp}}(F, \lambda)$ とする。 $F \in H^1(\mathcal{D})$ かつ

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq C |\phi'(x)| e^{-\alpha |\phi(x)|} \quad (\forall x \in \Gamma) \\ (C, \alpha &\text{は正の定数}) \end{aligned} \quad (20)$$

のとき、 $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$h = \sqrt{\frac{2\pi d}{\alpha N}} \quad (21)$$

とおけば、

$$\left| \text{p.v.} \int_{\Gamma} \frac{F(x)}{x - \lambda} dx - Q_N^{\text{pv}}(F, \lambda) \right| \leq \text{const} \exp(-cN^{1/2}), \quad (22)$$

$$\left| \text{f.p.} \int_{\Gamma} \frac{F(x)}{(x - \lambda)^2} dx - Q_N^{\text{fp}}(F, n, \lambda) \right| \leq \text{const} \exp(-cN^{1/2}). \quad (23)$$

ここで、 $c = (2\pi d \alpha)^{1/2}$ 。const は F, d, α にのみ依存する正の定数。

(証明) 定理 1 より、

$$\text{離散化誤差} \sim \exp(-2\pi d/h) \quad (24)$$

である。打ち切り誤差は、(20) を用いれば

$$h \sum_{|k| > N} \left| \frac{F(x_k)/\phi'(x_k)}{x_k - \lambda} \right| \leq \frac{h}{x_N - \lambda} 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-\alpha k h} \quad (25)$$

$$= \frac{h}{x_N - \lambda} 2C \frac{e^{-(N+1)\alpha h}}{1 - e^{-\alpha h}} \leq \frac{2C/\alpha}{x_N - \lambda} e^{-N\alpha h} \quad (26)$$

$$\sim \exp(-N\alpha h). \quad (27)$$

h を N の関数として決定することを考える。 N を固定したまま h を動かしてみると、(24), (27) から、離散化誤差を小さくすると打ち切り誤差が大きくなり、逆に打ち切り誤差を小さくすると離散化誤差が大きくなる。両者が同程度の大きさになる辺りで、二つの誤差の和は最も小さくなると考えられるから、

$$\frac{2\pi d}{h} = N\alpha h, \quad h = \sqrt{\frac{2\pi d}{\alpha N}}.$$

よって、双方の誤差 $\sim \exp(-cN^{1/2})$ が得られ、定理の不等式 14 を得る。

有限部分に付いての証明も同様。 ■

例 1 (Bialecki[3])

$$\Gamma = (-1, 1) \in \mathbb{R}, \quad (28)$$

$$\phi_{SE}(z) = \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \iff \psi_{SE}(w) = \tanh(w/2), \quad (29)$$

$$\mathcal{D}_{SE} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \arg \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right| < d \}. \quad (30)$$

領域 $\mathcal{D}_{SE}$ は、図 4 のような “eye-shaped domain”。境界 $\partial\mathcal{D}_{SE}$ は、虚軸上に中心をもつ円弧からなる。

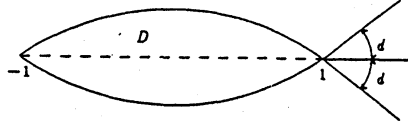


図 4: 領域 $\mathcal{D}_{SE}$

被積分関数は

$$\frac{F(x_k)}{\phi'(x_k)} = F\left(\tanh\left(\frac{kh}{2}\right)\right) \cdot \frac{1}{2} \left[\cosh\left(\frac{kh}{2}\right) \right]^{-2} \sim e^{-kh} \quad (31)$$

と、(一重) 指数函数的に減衰する。よって上の変換 (29) を以降 “SE 変換 (Single Exponential transformation)” と呼ぶことにする。

条件 (20) は、 $F \in H^1(\mathcal{D}_{SE})$ が

$$|F(x)| \leq \text{const} (1 - |x|)^{\alpha-1} \quad (\forall x \in (-1, 1)) \quad (32)$$

を満たすとき、成立する。

次は、関数が二重指数函数的に減衰する場合の誤差評価である。

定理 4 $F \in H^1(\mathcal{D})$ かつ

$$|F(x)| \leq C |\phi'(x)| \exp(-\alpha \cosh \beta \phi(x)) \quad (\forall x \in \Gamma) \quad (33)$$

(C, α, β は正の定数)

のとき、 $N \in \mathbb{N}$ に対し、

$$N = \frac{1}{\beta h} \log \left(\frac{4\pi d}{\alpha h} \right) \quad (34)$$

を満たすよう $h > 0$ を選べば、

$$\left| \text{p.v.} \int_{\Gamma} \frac{F(x)}{x - \lambda} dx - Q_N^{\text{pv}}(F, \lambda) \right| \leq \text{const} \exp \left(-\frac{c' N}{\log(2c' N / \alpha)} \right), \quad (35)$$

$$\left| \text{i.p.} \int_{\Gamma} \frac{F(x)}{(x - \lambda)^s} dx - Q_N^{\text{ip}}(F; n, \lambda) \right| \leq \text{const} \exp \left(-\frac{c' N}{\log(2c' N / \alpha)} \right). \quad (36)$$

ここで、 $c' = 2\pi d \alpha_0$ 。const は、 F, d, α, β のみに依存する正の定数。

(証明) 離散化誤差 $\sim \exp(-2\pi d/h)$ 。打ち切り誤差は、(33)を用いることにより、

$$\begin{aligned}
 h \sum_{|k|>N} \left| \frac{F(x_k)/\phi'(x_k)}{x_k - \lambda} \right| &\leq \frac{h}{x_N - \lambda} 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \exp(-\alpha \cosh(\beta k h)) \\
 &\leq \frac{2C}{x_k - \lambda} \sum_{k=N+1}^{\infty} h \sinh(\beta k h) \exp(-\alpha \sinh(\beta k h)) \\
 &\leq \frac{2C}{x_k - \lambda} \int_{Nh}^{+\infty} \sinh \beta x \exp(-\alpha \sinh \beta x) dx \\
 &= \frac{2C/(\alpha\beta)}{x_k - \lambda} \exp(-\alpha \cosh(\beta Nh)) \leq \frac{2C/(\alpha\beta)}{x_k - \lambda} \exp(-(\alpha/2)e^{\beta Nh}) \\
 &\sim \exp(-(\alpha/2)e^{\beta Nh}).
 \end{aligned}$$

両者の誤差を同程度におくと、

$$\frac{2\pi d}{h} = \frac{\alpha}{2} e^{\beta Nh},$$

$$\begin{aligned}
 \frac{2\pi d}{h} &= \frac{c'N}{\log(4\pi d/(\alpha h))} \\
 &= \frac{c'N}{\log(2c'N/\alpha) - \log \log(4\pi d/(\alpha h))} \\
 &\leq \frac{c'N}{\log(2c'N/\alpha)}.
 \end{aligned}$$

これより、双方の誤差 $\sim \exp(-c'N/\log(2c'N/\alpha))$ を得、定理の不等式を得る。 ■

高橋・森による変数変換 [12],[13] を用いる場合を考える。

$$\Gamma = (-1, 1), \quad (37)$$

$$\psi_{DE}(w) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh w\right) \iff \phi_{DE}(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\pi} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right). \quad (38)$$

領域 $\mathcal{D}_{DE} = \psi_{DE}(D_d)$ は $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ にカットを入れた Riemann 面 $\mathcal{R}$ 内の領域となる (図 5)。

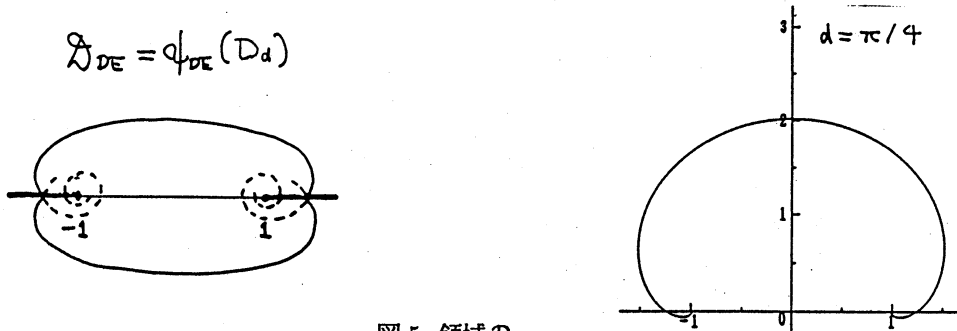


図 5: 領域 $\mathcal{D}_{DE}$

定理 4 の前提が成立するための条件を考える。まず、 $F \in H^1(\mathcal{D}_{DE})$ 。

Riemann 面 $\mathcal{R}$ から通常の複素平面 $\mathbb{C}$ への自然な写像による、 $\mathcal{D}_{DE}$ の境界 $\partial\mathcal{D}_{DE}$ の像は、図 5 のように $z = \pm 1$ の近くで渦巻を巻いている。この渦巻と実軸 $\mathcal{R}$ との交点で原点に一番近いものを $\pm\Lambda(d)$ とすると、

$$\Lambda(d) = \frac{\sinh\left(\pi \cot d \sqrt{4 - \sin^2 d}\right)}{\cosh\left(\pi \cot d \sqrt{4 - \sin^2 d}\right) + 1}. \quad (39)$$

定理 4 が成立するには、

$$|\lambda| < \Lambda(d) \iff 0 < d < \Delta(|\lambda|) \quad (40)$$

でなければならない。ここで $\Delta(\cdot)$ は $\Lambda(\cdot)$ の逆関数 (右図参照)。 λ を given とすると、変数変換後の関数が正則であるべき帯状領域の幅 (の $1/2$) d の値が、(40) によって制限される。

次に条件 (33) は、(33) を ψ_{DE} の定義式に代入して計算すれば、

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq \text{const} \frac{\exp\left(-\alpha \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\pi} \log \left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)^2}\right)}{(1-x^2) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\pi} \log \left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)^2}} \\ &\sim \text{const} \frac{(1-|x|)^{\alpha/\pi-1}}{|\log(1-|x|)|} \quad \text{as } |x| \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (41)$$

以上の結果を定理の形にまとめておく：

定理 5 (a) $F \in H^1(\mathcal{D}_{DE})$, $\lambda \in (-1, 1) - \{\psi_{DE}(kh) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ に対して、

$$\left| \text{f.p.} \int_{-1}^1 \frac{F(x)}{(x-\lambda)^\alpha} dx - Q^{tp}(F, \lambda) \right| \leq \frac{e^{-2\pi d_\lambda^*/h}}{1 - e^{-2\pi d_\lambda^*/h}} \int_{\partial\mathcal{D}_{DE}^*} \left| \frac{F(z)}{(z-\lambda)^\alpha} \right| |dz|. \quad (42)$$

ここで、 d_λ^* は

$$0 < d_\lambda^* < \min\{d, \Delta(|\lambda|)\} \quad (43)$$

を満たす任意の実数。

$$\mathcal{D}_{DE}^* = \{\psi_{DE}(w) \mid |\Im w| < d_\lambda^*\}. \quad (44)$$

(b) $F \in H^1(\mathcal{D}_{DE})$ かつ (41) のとき、

$$\left| \text{f.p.} \int_{-1}^1 \frac{F(x)}{(x-\lambda)^\alpha} dx - Q^{tp}(F, \lambda) \right| \leq \text{const}(\lambda) \exp\left(-\frac{c_\lambda^* N}{\log(2c_\lambda^* N/\alpha)}\right). \quad (45)$$

ここで $c_\lambda^* = 2\pi d_\lambda^*$ 。 $\text{const}(\lambda)$ は F, d_λ^*, α にのみ依存する正の定数。

Hadamard の有限部分に対する DE 公式の誤差も、通常の定積分と同様の $O(\exp(-\text{const } N/\log N))$ の精度が得られる。ところが有限部分の場合、(45) からわかるように、係数 const が λ に依存する数であり、 λ が積分区間の端点 ± 1 に近づくにつれて 0 に近づく。よって、特異点 λ が端点に近づく、DE 公式の精度は急速に悪くなる。

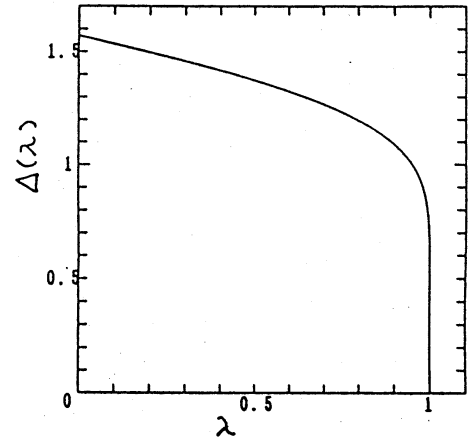


図 6: 函数 $\Delta(\lambda)$

3 数値実験

$$\text{f.p.} \int_{-1}^1 \frac{F(x)}{(x-\lambda)^2} dx, \quad F(z) = (1-z)^{1/4}(1+z)^{-1/4}, \quad (46)$$

$$\left(\text{厳密値} = -\frac{\pi}{2}(1+\lambda)^{-5/4}(1-\lambda)^{-3/4} \right) \quad (47)$$

に、公式

$$Q_{N_1, N_2}^{\text{fp}}(F, 2, \lambda) := h \sum_{k=-N_1}^{N_2} \frac{F(x_k)/\phi'(x_k)}{(x_k - \lambda)^2} + \pi \left\{ \cot \left[\frac{\pi}{h} \phi(\lambda) \right] F'(\lambda) - \frac{\pi}{h} \frac{\phi'(\lambda)}{\sin^2[\pi \phi(\lambda)/h]} F(\lambda) \right\} \quad (48)$$

(ϕ : SE 変換 (29), DE 変換 (38)) を適用した。結果を図 7 に示す。

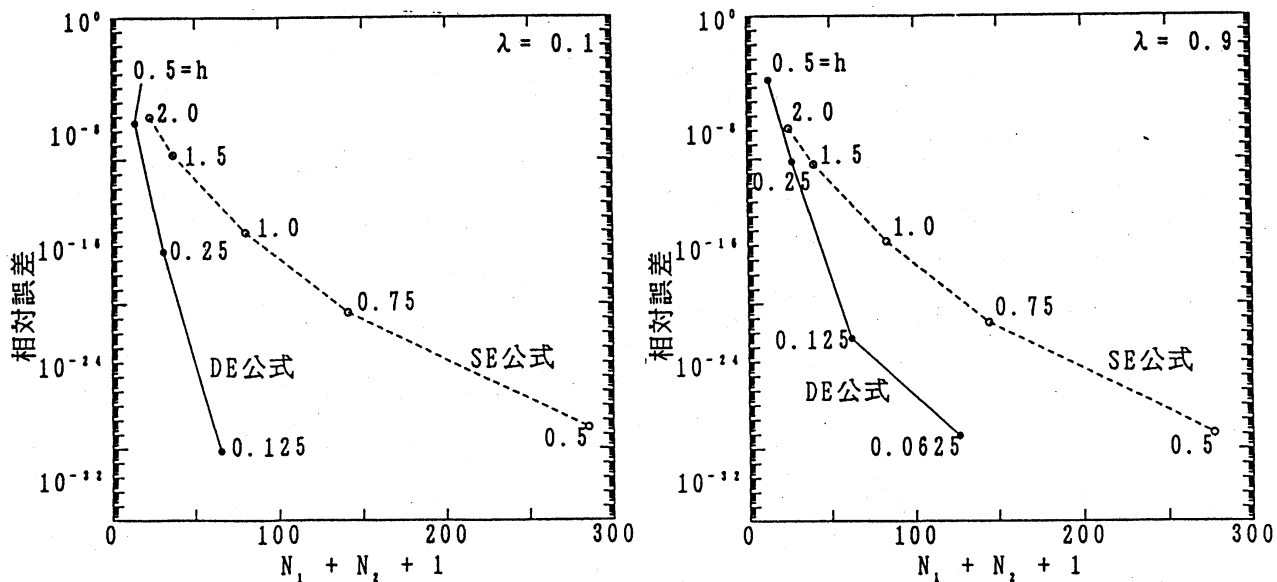


図 7: 有限部分 (46) に対する Sinc 求積法 (SE 変換、DE 変換) の誤差

DE 変換の方が SE 変換に比べて、誤差の減衰がきわめて速い。だが、一方で DE 変換の場合 $\lambda = 0.1$ よりも積分区間の端点に近い $\lambda = 0.9$ の方が精度が悪い。これは、DE 変換の誤差の評価式 (42) の右辺の係数 $\int_{\partial D_{\text{DE}}} |F(z)/(z-\lambda)^2| |dz|$ が大きくなり、さらに誤差 $\sim \exp(-\text{const } N/\log N)$ の係数 const が、 λ が ± 1 に近づくに連れて小さくなるためである。標本点数 N に対し誤差の $\log$ をプロットすると、誤差曲線の傾きも緩やかになっていることに注意。

ところで、DE 変換で有限部分を計算する場合、 h を小さくすると、(48) の右辺第 1 項で標本点 x_k が λ に近くなるところで桁落ちの心配があるように見える。数値実験の結果を見ると、DE 公式の相対誤差は

$\lambda = 0.1$ のとき $h = 0.125$ で計算機イブシロン程度に落ちている。 $\lambda = 0.9$ のときでも $h = 0.0625$ で計算機イブシロン程度に落ちている。一方、 $h = 0.125$ のとき標本点の間隔は、標本点がきわめて端点 ± 1 に近くない限り、 $10^{-2} \sim 10^{-3}$ 程度の大きさであるから、実際の計算で桁落ちが起こる心配はないと考えられる。

4 有限部分の数値積分公式の最適性

通常の数積分について、関数空間上の数値積分公式の最適性に関する研究が多くなされている。とくに H^p 空間 (Hardy 空間) 上の数値積分則の最適性について、Andersson, Bojanov[2] らにより多くの結果が出された。以下にその概要を挙げておく。

まず、 $1 < p \leq +\infty$ なる実数 p に対して、(単位円盤 $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ における) Hardy 空間 $H^p(U)$ は、次のように定義される: U における正則関数で、

$$\|F\|_{H^p} := \lim_{r \rightarrow 1-0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} < +\infty \quad (49)$$

なるもの全体の集合に、 $\|\cdot\|_{H^p}$ でノルムを入れたものを $H^p(U)$ と記す。 $H^p(U)$ は、Banach 空間をなすことが分かっている [5], [6]。

さて、 $F \in H^p(U)$ として、数値積分則

$$\int_{-1}^1 F(x) dx \approx \sum_{k=1}^N a_k F(a_k) \quad (a_1, \dots, a_N \in U) \quad (50)$$

に対する誤差生成作用素 $E_N(a_k, a_k)$ を、

$$E_N(a_k, a_k)(F) := \int_{-1}^1 F(x) dx - \sum_{k=1}^N a_k F(a_k) \quad (51)$$

で定義する。 $E_N(a_k, a_k)$ は有界作用素となり、その作用素ノルム

$$\|E_N(a_k, a_k)\| := \sup_{F \in H^p(U)} \frac{E_N(a_k, a_k)(F)}{\|F\|_{H^p}} \quad (52)$$

は次のように評価される。

定理 6

$$C_1 N^{1/2q} \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{N}{q}}\right) \leq \inf_{\{a_k, a_k\}} \|E_N(a_k, a_k)\| \leq C_2 N^{1/2q} \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{N}{q}}\right). \quad (53)$$

但し、 q は p の共役指数 ($q = p/(p-1)$ すなわち $p^{-1} + q^{-1} = 1$ を満たす数) であり、 C_1, C_2 はある正の定数である。

次に、Hadamard の有限部分の数値積分則に対しても、同様の評価を与える。有限部分の数値積分公式として、次のようなものを考える。

$$\text{f.p.} \int_{-1}^1 \frac{F(x)}{(x-\lambda)^\alpha} dx \approx \sum_{k=1}^K \sum_{l=0}^{\nu_k-1} A_{k,l}(\lambda) F^{(l)}(a_k), \quad F \in H^p(U), \quad a_1, \dots, a_K \in U \quad (54)$$

ここで、 λ は $-1 < \lambda < 1$ なる実数、 $K, \nu_1, \dots, \nu_K$ は正の整数で、標本点の総数 N は、

$$N = \nu_1 + \dots + \nu_K \quad (55)$$

で与えられる。 $F^{(l)}(z)$ は $F(z)$ の l 階導関数である。但し、 $F^{(0)}(z) = F(z)$ とする。

上の公式に対する誤差生成作用素 $E_N(A_{k,l}, a_k, \lambda)$ を、

$$E_N(A_{k,l}, a_k, n, \lambda)(F) := \text{f.p.} \int_{-1}^1 \frac{F(x)}{(x-\lambda)^n} dx - \sum_{k=1}^K \sum_{l=0}^{n_k-1} A_{k,l}(\lambda) F^{(l)}(a_k) \quad (56)$$

で定義する。この作用素のノルムに対して次の評価が成り立つ：

定理 7

$$C_1 N^{1/2q} \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{N}{q}}\right) \leq \inf_{\{A_{k,l}, a_k\}} \|E_N(A_{k,l}, a_k, n, \lambda)\| \quad (57)$$

$$\leq E_N(\text{SE 公式}, n, \lambda) \leq \frac{C_2}{(1-|\lambda|)^n} \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{N-n-1}{2q}}\right). \quad (58)$$

ここで、 C_1, C_2 はある正の定数である。

(証明) 次の函数を考える：

$$F_1(z) = (z-\lambda)^n B_N(z) \overline{B_N(\bar{z})} (1-z^2)^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1/p.$$

ここで $B_N(z)$ は Blaschke の積： $B_N(z) = \prod_{k=1}^K \left(\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}\right)^{n_k}$.

まず、 F_1 の H^p ノルムを見積もる。

$$\begin{aligned} \|F_1\|_{H^p} &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \\ & \quad (B_N(re^{i\theta}) \rightarrow 1 \ (r \rightarrow 1-0), |z-\lambda| \leq 2 \ (z \in U) \text{ より}) \\ &\leq 2^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1-e^{i2\theta}|^{-\alpha p} d\theta \right)^{1/p} = 2^{n-\alpha} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin \theta|^{-\alpha p} d\theta \right)^{1/p} \\ & \quad (\sin \theta \geq (2/\pi)\theta \ (0 \leq \theta \leq \pi/2) \text{ を用いると}) \\ &\leq 2^{n-\alpha} (1-\alpha p). \end{aligned}$$

誤差 $E(A_{k,l}, a_k, n, \lambda)(F_1)$ の値は、 F_1 の零点が $\{a_k\}$ であることから、

$$\text{f.p.} \int_{-1}^1 \frac{F_1(x)}{(x-\lambda)^n} dx = \int_{-1}^1 |B_N(x)|^2 (1-x^2)^{-\alpha} dx$$

となる。右辺は通常の定積分であり、[1] により

$$\text{右辺} \geq \text{const } N^{1/2} (1-\alpha)^{-1/2} \exp(-\pi \sqrt{N(1-\alpha)})$$

と評価されている。

以上から、

$$\begin{aligned} \|E(A_{k,l}, a_k, n, \lambda)\| &\leq |E(A_{k,l}, a_k, n, \lambda)(F_1)| / \|F_1\|_{H^p} \\ &\geq \text{const } N^{1/2} (1-\alpha)^{-1/2} \exp(-\pi \sqrt{N(1-\alpha)}). \end{aligned}$$

$\alpha = p^{-1}(1 - (Nq)^{-1/2} - N^{-1})$ とおくと、

$$\text{右辺} \geq N^{1/2q} \exp(-\pi \sqrt{N/q}).$$

これで不等式 (57) が証明できた。

(58) の証明は、定理 3 と同じ論法で証明できる。打ち切り誤差の見積もりで、

$$|F(z)| \leq 2^{1/p} \|F\|_{H^p} \leq (1 - |z|)^{-1/p} \quad (F \in H^p(U))$$

([5] p36) を用いる。

[10], [11] でも指摘されているように、 H^p 空間は大ざっぱに言って SE 変換が最適な函数空間であり、数値積分の精度は $O(\exp(-\text{const } N^{1/2}))$ で与えられる。一方、DE 公式の精度は $\sim \exp(-\text{const } N/\log N)$ であり、DE 変換が最適な函数空間は H^p とは別物であることがわかる。ここで DE 変換が最適な函数空間を新たに設定する。

函数族 $H_{DE}(\mathcal{D}_{DE}, \alpha)$ を次のように定義する：領域 $\mathcal{D}_{DE}$ で正則な函数 F で

$$\|F\|_{DE} = \sup_{z \in \mathcal{D}_{DE}} \left| \frac{F(z)}{\phi'_{DE}(z)} \exp(\alpha \cosh \phi_{DE}(z)) \right| < +\infty \quad (59)$$

を満たすもの全体 (にノルムを $\|\cdot\|_{DE}$ で入れたもの) を $H_{DE}(\mathcal{D}_{DE}, \alpha)$ とする。 $H_{DE}(\mathcal{D}_{DE}, \alpha)$ は Banach 空間をなす。 $H_{DE}(\mathcal{D}_{DE}, \alpha)$ においても、有限部分の誤差生成作用素を H^p 空間と同様に定義する。

次の公式は、DE 公式が $H_{DE}(\mathcal{D}_{DE}, \alpha)$ では最適であることを示している。

定理 8 $H_{DE}(\mathcal{D}_{DE}, \alpha)$ 空間において、

$$\text{const} \log \left(\frac{c}{\alpha} N \right) \exp \left(-\frac{cN}{\log(cN/\alpha)} \right) \leq \inf_{\{A_{k,l}, a_k\}} \|E_N(A_{k,l}, a_k, n, \lambda)\| \quad (60)$$

$$\leq \|E_N(\text{DE 公式}, n, \lambda)\| \leq \frac{\text{const}}{[\text{dist}(\lambda, \partial \mathcal{D}_{DE}^*)]^n} \exp \left(-\frac{(c_\lambda^*/2)(N - n - 1)}{\log((c_\lambda^*/\alpha)(N - n - 1))} \right). \quad (61)$$

ここで $c = 2\pi d, c_\lambda^* = 2\pi d_\lambda^*$

$$\text{dist}(\lambda, \partial \mathcal{D}_{DE}^*) = \inf_{z \in \partial \mathcal{D}_{DE}^*} |z^* - \lambda|. \quad (62)$$

z^* は自然な写像 $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$ による $z \in \mathcal{R}$ の像。

(証明) 次の函数を考える：

$$F_1(z) = (z - \lambda)^n \phi'_{DE}(z) \exp(-\alpha \cosh \phi_{DE}(z)) \prod_{k=1}^K \tanh^{2\nu_k} \left(\frac{\pi}{4d} (\phi_{DE}(z) - \phi_{DE}(a_k)) \right).$$

$|\tanh z| \leq 1$ ($|\Im z| < \pi/4$) に注意すると、

$$\|F_1\|_{DE} \leq \sup_{z \in \mathcal{D}_{DE}} |z - \lambda|^n \leq \text{const}.$$

一方、 $F_1(z)$ に対する誤差の値は次のように評価される。

$$E_N(A_{k,l}, a_k, n, \lambda)(F_1) = \int_{-1}^1 \phi'_{DE}(x) \exp(-\alpha \cosh \phi_{DE}(x)) \prod_{k=1}^K \tanh^{2\nu_k} \left(\frac{\pi}{4d} (\phi_{DE}(x) - \phi_{DE}(a_k)) \right)$$

$$\geq 2\rho \int_{-\rho}^{+\rho} \exp(-\alpha \cosh y) \prod_{k=1}^K \tanh^{2\nu_k} \left(\frac{\pi}{4d} (y - \phi_{DE}(a_k)) \right) \frac{dy}{2\rho} \quad (\forall \rho > 0)$$

(Jensen の不等式を用いると)

$$\geq 2\rho \exp \left[-\frac{\alpha}{2\rho} \int_{-\rho}^{\rho} \cosh y dy + \sum_{k=1}^K \frac{2\nu_k}{2\rho} \int_{-\rho}^{\rho} \log \tanh \left| \frac{\pi}{4d} (y - \phi_{DE}(a_k)) \right| dy \right].$$

ここで、

$$\int_{-\rho}^{\rho} \log \tanh \left| \frac{\pi}{4d} (y - \phi_{DE}(a_k)) \right| dy \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \log \tanh \left| \frac{\pi}{4d} (y - \phi_{DE}(a_k)) \right| dy = -\pi d$$

であるから、

$$\text{上式} \geq 2\rho \exp \left(-\frac{N\pi d}{\rho} - \frac{\alpha}{2\rho} e^{\rho} \right).$$

この式で

$$\frac{N\pi d}{\alpha} = \frac{\alpha}{2\rho} e^{\rho}, \text{ i.e. } \rho = \log \left(\frac{2\pi d}{\alpha} N \right)$$

とおいて、(60)を得る。 ■

参考文献

- [1] Andersson, J.-E. : Optimal quadrature of H^p functions, Math. Z., Vol. 172, 55-62, 1980.
- [2] Andersson, J.-E., Bojanov, B.D. : A note on the optimal quadrature in H^p , Numer. Math., Vol. 44, 301-308, 1984.
- [3] Bialecki, B. : A Sinc quadrature rule for Hadamard finite-part integral, Numer. Math., Vol. 57, 263-269, 1990.
- [4] Bialecki, B. : A Sinc-Hunter quadrature rule for Cauchy principal part integrals, Math. Comp. (To appear).
- [5] Duren, P.L. : *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York, 1958.
- [6] 河田龍夫 : Fourier 解析, 産業図書, 1975.
- [7] 緒方秀教, 杉原正顯, 森正武 : 変数変換による Hadamard 積分の有限部分の数値計算, 日本応用数学会平成3年度年会研究発表予稿集, 95-96, 1991.
- [8] Paget, D.F. : The numerical evaluation of Hadamard finite-part integrals, Numer. Math., Vol. 36, 447-453, 1981.
- [9] Stenger, F. : Numerical methods based on Whittaker Cardinal, or Sinc functions, SIAM Rev., Vol. 23, 165-224, 1981.
- [10] Stenger, F. : Optimal convergence of minimum norm approximation on H^p , Numer. Math., Vol. 29, 345-362, 1978.
- [11] 杉原正顯 : DE 変換公式の最適性について, 京都大学数理解析研究所講究録, No. 585, 150-175, 1986.
- [12] 高橋秀俊, 森正武 : 変数変換によって得られる積分公式(2), 京都大学数理解析研究所講究録, No. 172, 88-104, 1973.
- [13] Takahasi, H., Mori, M. : Double exponential formula for numerical integration, Publ. RIMS, Kyoto Univ., vol. 9, 121-141, 1974.