

境界層の方程式 $f''' + 2ff'' + 2\lambda(k^2 - f'^2) = 0$

東京都立大学

岩野 正宏

1. 境界層の方程式

流体かまて, 3階の方程式

$$(A) \quad f''' + 2ff'' + 2\lambda(k^2 - f'^2) = 0, \quad k > 0, \lambda < 0$$

を 境界条件

$$(A_0) \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0,$$

$$(A_\infty) \quad f'(\infty) = k$$

のもとに 解くことが要請されている。しかし この境界値問題は, P. Hartman, J. Serrin など著名な人々の努力にもかかわらず, まだ解決されていないように思う。境界条件 (A_0) のかわりに 境界条件

$$(A'_0) \quad f(0) = \alpha, \quad f'(0) = \beta$$

と (A_∞) とを満足する 解が存在するための必要十分条件

は すべて F. Kemnitz と R. Iglish によって求められている。P. Hartman の Ordinary Differential Equations に それの詳しい説明がある。すなわち、

解としては $0 < t < \infty$ で $\beta \leq f'(t) < k$ となるものだけを考える。 任意の $k > 0$, $\lambda < C$, $C \leq \beta < k$ に対して定まる定数 $A(\lambda, \beta, k)$ と $\alpha \geq A(\lambda, \beta, k)$ で定義された単調増加な連続関数 $\gamma(\alpha)$ ($\gamma(A(\lambda, \beta, k)) = 0$) が存在し、初期値問題

$$f''' + 2ff'' + 2\lambda(k^2 - f'^2) = 0,$$

$$f(0) = \alpha, \quad f'(0) = \beta, \quad f''(0) = \gamma$$

の解 $f(t)$ が、 $t = \infty$ まで接続可能で しかも

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) = k$$

を満足するための必要十分条件は α と γ とが

$$\alpha \geq A(\lambda, \beta, k), \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma(\alpha)$$

を満足することである。 このとき $f''(t) > C$.

定数 $A(\lambda, \beta, k)$ が、 $\beta = C$ かつ $k > C$, $\lambda < 0$ のとき、常に 非正 ということがわかれば上記の存在定理は流体力学の境界値問題に対して 解の存在を保証する。しかしながら、この定数の決め方は 解析的 (超越的) であるか

ら、 $A(\lambda, \beta, k)$ の符号が λ, β, k の値によつて どのようになるかは 全くわからない。かつて筆者が, Serrin さんに会つて、この結果は最終的なものであるかどうかを尋ねたとき、「いつかは 境界条件 $(A_0), (A_\infty)$ のもとでの解の存在がでるに違いない」と話された。

P. Hartman は 上記の解 $f(t)$ の、 $t \rightarrow \infty$ における、行動を詳しく調べている。簡単に説明すれば、 $f''(0) = \gamma(\alpha)$ の ときに限る、 $f'(t) - t$ は 指数関数の大きさで 0 に近づき、 $0 \leq f''(0) < \gamma(\alpha)$ のときは $f'(t) - t$ は t のべきの大きさで 0 に近づく ことが証明されている。

$\lambda > 0$ のときは、解の存在と一意性が H. Weyl により得られている。

一方方程式 (A) は独立変数 t を陽に含んでいないことから 2 階の方程式に変換される。2 階の方程式の境界値問題にかんしては、南雲の存在定理と呼ばれる極めて 有力な武器をもっている。或は、南雲、岡村、H. W. Knobloch の存在定理も、Kneser 族の立場から統一的に取り扱った 福原の(境界値問題にかんする)存在定理がある。これらの存在定理を応用して、境界値問題 $(A) - (A_0) - (A_\infty)$ の解の存在を証明することはできないであらうか。これが筆者の期待である。十年ばかり前に、福原先生と 協同研究をしたときのノートをもとにして 少しばかり書いてみたい。

2. 2階の方程式への変換

f' を f の関数と考えれば

$$f'' = f' \frac{df'}{df}, \quad f''' = f'^2 \frac{d^2 f'}{df^2} + f' \left(\frac{df'}{df} \right)^2$$

となるから、方程式 (A) は

$$(B) \quad f' \left\{ f' \frac{d^2 f'}{df^2} + \left(\frac{df'}{df} \right)^2 \right\} + 2ff' \frac{df'}{df} + 2\lambda(k^2 - f'^2) = 0$$

となる。

$$f_0 = f(0), \quad f'_0 = f'(0), \quad f''_0 = f''(0), \quad f'''_0 = f'''(0)$$

とおく。境界条件 (A₀) から、

$$f_0 = f'_0 = 0,$$

また (A) から

$$f'''_0 = -2\lambda k^2 > 0.$$

したがって、 f' を f の関数と考えれば $f'' = f' \frac{df'}{df}$ であるから、 $f' \sim cf^\delta$ とおいてみると

$$f'' \sim c^2 \delta f^{2\delta-1}$$

すなわち $f \rightarrow 0$ のとき、もし $f''_0 \neq 0$ であれば

$$f''_0 \sim c^2 \delta, \quad 2\delta - 1 = 0.$$

ゆえに

$$(B_0) \quad \lim_{f \rightarrow 0} \frac{f'}{\sqrt{f}} = \sqrt{2f_0''} \quad (\text{if } f_0'' \neq 0),$$

もし $f_0'' = 0$ のときは $f_0''' \neq 0$ であることを注意して $f''' = f'^2 \frac{d^2 f'}{df^2} + f' \left(\frac{df'}{df} \right)^2$ を用いれば

$$(B_0') \quad \lim_{f \rightarrow 0} \frac{f'}{\sqrt[3]{f^2}} = \sqrt[3]{-9\lambda k^2} \quad (\text{if } f_0'' = 0).$$

条件 (A_∞) から $f \sim kt$, $k > 0$ として $t \rightarrow \infty$ のとき $f \rightarrow \infty$. ゆえに

$$(B_\infty) \quad f' \rightarrow k \quad \text{as } f \rightarrow \infty.$$

新しい従属変数として

$$g = f'^2$$

をとれば,

$$\dot{g} = \frac{dg}{df} = 2f' \frac{df'}{df}, \quad \ddot{g} = \frac{d^2 g}{df^2} = 2 \left\{ f' \frac{d^2 f'}{df^2} + \left(\frac{df'}{df} \right)^2 \right\}$$

であるから 方程式 (B) は

$$(C) \quad \sqrt{g} \ddot{g} + 2f \dot{g} + 4\lambda(k^2 - g) = 0$$

κ 変換され, 条件 (B_0) , $(B_0)'$, (B_∞) に対応して それぞれ 次の条件を得る:

$$(C_0) \quad \lim_{f \rightarrow 0} \frac{g}{f} = 2y_0''$$

$$(C_0)' \quad \lim_{f \rightarrow 0} \frac{g}{f^{4/3}} = 3k \sqrt{3\lambda^2 k}$$

$$(C_\infty) \quad g \rightarrow k^2 \quad \text{as } f \rightarrow \infty$$

もっとも簡単に

$$g(0) = 0, \quad g(\infty) = k^2.$$

3. 南雲の存在定理.

南雲氏の存在定理と一意性の定理を証明なしに述べる。

$f(x, y, z)$ は 領域

$$D: a \leq x \leq b, \quad \underline{\omega}(x) \leq y \leq \bar{\omega}(x), \quad \underline{\Omega}(x, y) \leq z \leq \bar{\Omega}(x, y)$$

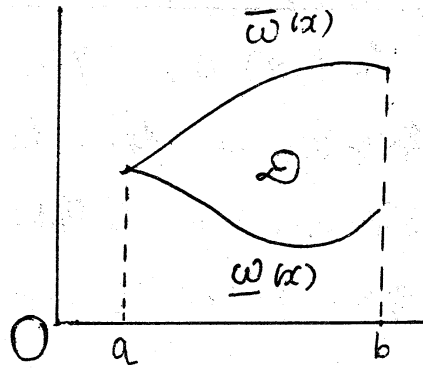
κ において (x, y, z) の連続な関数; $\underline{\omega}(x)$, $\bar{\omega}(x)$ は

$a \leq x \leq b$ κ において 2回微分可能; $\underline{\Omega}(x, y)$, $\bar{\Omega}(x, y)$ は 領域

②: $a \leq x \leq b, \underline{\omega}(x) \leq y \leq \bar{\omega}(x)$

κ について 微分可能である; しかも
次の不等式が成り立つ:

$$\underline{\omega}(a) = \bar{\omega}(a) = A,$$



$$\underline{\Omega}(x, \underline{\omega}) \leq \underline{\omega} \leq \bar{\Omega}(x, \underline{\omega}), \quad \underline{\Omega}(x, \bar{\omega}) \leq \bar{\omega} \leq \bar{\Omega}(x, \bar{\omega}),$$

$$(*) \begin{cases} \underline{\omega}''(x) \geq f(x, \underline{\omega}(x), \underline{\omega}'(x)), \\ \bar{\omega}''(x) \leq f(x, \bar{\omega}(x), \bar{\omega}'(x)), \end{cases}$$

$$(\#) \begin{cases} f(x, y, \underline{\Omega}(x, y)) - \underline{\Omega}_x(x, y) - \underline{\Omega}_y(x, y) \underline{\Omega}(x, y) > 0, \\ f(x, y, \bar{\Omega}(x, y)) - \bar{\Omega}_x(x, y) - \bar{\Omega}_y(x, y) \bar{\Omega}(x, y) < 0. \end{cases}$$

このとき

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad \underline{\omega}(b) \leq B \leq \bar{\omega}(b)$$

となる方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

の積分曲線が領域 Ω 内に存在する。

条件(*) は, $y(x)$ が $\underline{\omega}(x) \leq y \leq \bar{\omega}(x)$ を満足し,
 条件(#) は $dy(x)/dx$ が $\underline{\Omega}(x, y(x)) \leq y'(x) \leq \bar{\Omega}(x, y(x))$
 を満足することとを保証するための条件である。解があれば
 $y(x)$ および $z(x) = dy(x)/dx$ は 積分方程式

$$y(x) = \frac{A(b-x) + B(x-a)}{b-a} - \int_a^b G(x, t) f(t, y(t), z(t)) dt,$$

$$z(x) = \frac{B-A}{b-a} - \int_a^b G_x(x, t) f(t, y(t), z(t)) dt,$$

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{(b-x)(t-a)}{b-a}, & a \leq t \leq x \leq b \\ \frac{(b-t)(x-a)}{b-a}, & a \leq x \leq t \leq b \end{cases}$$

を満足することがわかる。この積分方程式が、 Ω 内に属する
 ような解をもつことが言えれば 定理は証明されたこと
 なる。

つまり、 $y'' = f(x, y, y')$ を

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = f(x, y, z)$$

の形に書き、 $z = Z(x, y, \xi)$ とおいて y, ξ 内に

る方程式をつくり、この方程式についての条件によって
 2 定点を通る $y'' = f(x, y, y')$ の解の一意性を得られる。

$$\frac{dy}{dx} = Z(x, y, \xi),$$

$$\frac{d\xi}{dx} = F(x, y, \xi) = \frac{1}{Z_\xi} \{ f(x, y, Z) - Z_x - Z_y Z \}$$

の右辺の関数が

$$Z_\xi > 0, \quad F_y \geq 0$$

を満足するならば、2 定点を通る $y'' = f(x, y, y')$ の解
曲線 は ただ一つに限る。

4. 無限区間における南雲型の存在定理についての福原の予想

南雲の存在定理の証明をみれば、わかることであるが、
 積分方程式の解の存在を証明するとき、区間が有限である
 ことはおめで都合のよい条件になっている。対応する積分方
 程式を、無限区間の場合につくれば、

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\xi}{(1+x)(1+\xi)} & 0 \leq \xi \leq x < \infty \\ \frac{x}{(1+\xi)(1+x)} & 0 \leq x \leq \xi < \infty \end{cases}$$

$$H(\xi, y(\xi), z(\xi)) \\ = (1+\xi)^4 h(\xi, y(\xi), z(\xi)) + z(1+\xi)^3 z(\xi),$$

$$y(x) = \frac{A+Bx}{1+x} - \int_0^\infty G(x, \xi) H(\xi, y(\xi), z(\xi)) \frac{d\xi}{(1+\xi)^2},$$

$$z(x) = \frac{B-A}{(1+x)^2} - \int_0^\infty G_x(x, \xi) H(\xi, y(\xi), z(\xi)) \frac{d\xi}{(1+\xi)^2}$$

で与えられる。この積分方程式が 解 $\{y(x), z(x)\}$ をも
 ば、 $y(x)$ は

$$y(0)=A, \quad y(\infty)=B,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = h(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx})$$

を満足することは 初等的計算で確かめることができる。

さて境界層の方程式 (C) を、 $y'' = f(x, y, y')$ の形に
 かけば

$$\ddot{g} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ 2 f \dot{g} + 4 \lambda (k^2 - g) \right\} \\ \equiv h(f, g, \dot{g})$$

となし、したがって g は $g=0$ において特異性をもつ。積分方程式に転換して解の存在を証明することは、たとえ可能であったとしても、有限区間でしかも特異性のない南雲氏の場合のように簡単にはできようもない。

福原先生は最近“Kneser 族の理論と境界値問題の位相的取扱”という論文を發表された。この理論を応用すれば、積分方程式を解かなくても「不等式(*) および(##) を満足する 関数 $\omega(f)$, $\bar{\omega}(f)$, $\Omega(f, g)$, $\bar{\Omega}(f, g)$ が方程式(C)に対してもしつくれるならば境界条件 $g(0)=0$, $g(\infty)=k^2$ を満足する (C) の解が存在かどうかである」と予想しておられる。

F. Kemnitz と R. Iglish が取り扱った場合の (C) に対する境界条件は

$$g(\alpha) = \beta^2, \quad g(\infty) = k^2$$

となっている。この境界条件に対して不等式(*) と (##) とを満足する 関数 $\omega(f)$, $\bar{\omega}(f)$, $\Omega(f, g)$, $\bar{\Omega}(f, g)$ をつくることはそれほどむづかしくはない。しかし問題の境界条件に対するこれらの関数をつくることは大へんむづかしい!