

Quotients of bounded operators and Lebesgue decomposition

富山大教育 泉野佐一 (Saichi Izumino)

1. 序. A, B を Hilbert 空間 H 上の有界 (線形) 作用素で核条件 $\ker A \subset \ker B$ を満たすとする. このとき quotient $[B/A]$ は $Ax \mapsto Bx, x \in H$ によって定義される. $[B/A]$ は勿論 AH を定義域とする必ずしも有界でない線形作用素である. AH が H で dense ならば adjoint が存在しこれは一つの quotient の形に表される [4]. また $[B/A]$ が closure をもつ, つまり closable なとき, それもまた一つの quotient で表される. いま $B^{*(1)}(A^*H) := \{x; B^*x \in A^*H\}$ とし, その (H での) closure への直交射影を $P = P_{A^*B^*}, P^\perp = 1 - P$ とする. このとき, Jorgensen の分解 [5] (Ôta [9]) を $[B/A]$ に適用すると, $[B/A] = [PB/A] + [P^\perp B/A]$ のように closable part $[PB/A]$ と singular part $[P^\perp B/A]$ の和に分解される. より一般の分解を考えるために, 直交射影 Q を用いて $[B/A] = [QB/A] + [Q^\perp B/A]$, $[QB/A]$ は closable,

$[Q^{\perp}B/A]$ が singular となったとき, この分解を Q による $[B/A]$ の J -分解と呼ぶことにする.

正值な(有界)作用素の Lebesgue-type 分解 (L -分解)の考えは Ando [2] によって導入されたもので, 正值作用素 S が与えられたとき, 任意の正值作用素 T は S に関して絶対連続な作用素 U と特異な作用素 V の和 $T = U + V$ として表されるということである. [2] によれば T が S -絶対連続となる必要十分条件は $T^{\frac{1}{2}(-1)}(S^{\frac{1}{2}}H)$ が dense であることであるが, この条件は実は, $\ker S \subset \ker T$ の場合に quotient $[T^{\frac{1}{2}}/S^{\frac{1}{2}}]$ が closable であることに同値でもある. このことは, J -分解と L -分解とが関連の深いことを示している.

本報告では, まず quotient の J -分解についてこれを起こす射影 Q の条件を調べ, また分解の一意性の条件などを求める. 次に J -分解と L -分解との関連について述べる. $[B/A]$ の一つの J -分解から $T = B^*B$ の $S = A^*A$ に関する一つの L -分解が生ずるか, 逆に正值作用素 T の S に関する一つの L -分解が適当な quotient $[B/A]$, $B^*B = T$, $A^*A = S$ の J -分解より得られることを示す.

2. quotient の J -分解. 2つの有界作用素 A, B に対して, $K = (A^*A + B^*B)^{\frac{1}{2}}$ とおく. 方程式

$$(2.1) \quad XR = A, \quad YR = B$$

を考えるとき, $A^*H \subset RH$, $B^*H \subset RH$ からこの解となる作用素 X, Y は Douglas の majorization 定理 [3] より存在は保証される. 特に $\ker X \supset \ker R$, $\ker Y \supset \ker R$ の仮定をすればこのような解は一意的に定まる. そこでこのとき, $X = A_e (= A_{B,e})$, $Y = B_e (= B_{A,e})$ と記すことにする. Fillmore - Williams [3] による 正值作用素の 並列和 parallel sum の定義を少し広げて

$$(2.2) \quad A^*A : B^*B = A^*A_e B_e^*B (= B^*B_e A_e^*A)$$

とにおいて, A^*A と B^*B の 並列和 と呼ぶ ($A^*A = C^*C$ のとき $A^*A_e = C^*C_e$ となるので 並列和 は (2.2) により well-defined).
このように定義を行ったところで, 本稿の議論で必要となる次の事実がいえる.

補題 2.1 (cf. [4]).

(1) $A_e^*A_e + B_e^*B_e = P_R$, ここに P_R は RH の closure $(RH)^-$ への直交射影.

$$(2) \quad A^*A : B^*B = A^*(1 - A_e A_e^*)A = B^*(1 - B_e B_e^*)B.$$

$$(3) \quad A^*H \cap B^*H = (A^*A : B^*B)^{\frac{1}{2}} H.$$

$$(4) \quad B^{*(-1)}(A^*H) = (1 - B_e B_e^*)^{\frac{1}{2}} H.$$

いま, A_e の極分解を $A_e = U_e(A_e^*A_e)^{\frac{1}{2}}$ とする. $P = P_{A^*, B^*}$ は先

に定義したように $\{B^{*(-1)}(A^*H)\}^-$ の上への直交射影とする。このとき、次のことが成り立つ。

補題 2.2.

$$(1) \quad P = 1 - B_e B_e^* + B_e V_e^* V_e B_e^*.$$

$$(2) \quad PB = B_e V_e^* V_e R.$$

quotient $[B/A]$ (A, B は $\ker A \subset \ker B$ を満たす作用素) は AH が dense のとき adjoint $[B/A]^*$ をもち、これは $[B/A]^* = [V_e B_e^* / (1 - B_e B_e^*)^{\frac{1}{2}}]$ と表される [4]。したがって、もし $(1 - B_e B_e^*)^{\frac{1}{2}} H$ が dense ならば $[B/A]^{**}$ が考えられ、これは $[B/A]$ の closure となる。 AH の dense なることの仮定がなくてもこのことは正しい。そこで、 $[B/A]$ が closable となることを

(2.3) 点列 $\{x_n\} \subset H$ で $Ax_n \rightarrow 0, Bx_n \rightarrow y$ のとき, $y = 0$

によって定義する [6, p.165]。このとき次の補題を得る。

補題 2.3. quotient $[B/A]$ について、次の各条件は同値である。 ($[B/A]^-$ は $[B/A]$ の closure を表す。)

(1) $[B/A]$ は closable.

(2) $\ker A_e \subset \ker B_e$.

(3) $(1 - B_e B_e^*)^{\frac{1}{2}} H (= B^{*(-1)}(A^*H))$ は dense.

もし、(1) - (3) のいずれかが成り立つとき、 $[B/A]^- = [B_e/A_e]$.

作用素 L (必ずしも有界でない) の定義を $D(L)$ とする.

$D(L)$ が dense かつ $L(D(L)) \subset D(L^*)^\perp$ のとき, L は *singular* [5][9] であると呼ばれる. L が *quotient* $[B/A]$ の場合にこの条件を考えると, $BH \subset \{(1 - B_e B_e^*)^{\frac{1}{2}} H\}^\perp$ となる. そこで ($[B/A]$ の定義域 AH の dense なることを仮定しないで)

$$(2.4) \quad BH \subset P^\perp H$$

によつて, $[B/A]$ は *singular* であると定義する. このとき, 次のことがいえる.

補題 2.4. *quotient* $[B/A]$ について, 次の各条件は同値である.

- (1) $[B/A]$ は *singular*.
- (2) $A_e B_e^* = 0$.
- (3) $A^* A : B^* B = 0$.
- (4) $A^* H \cap B^* H = \{0\}$.

quotient の closable 及び *singular* となる条件が出そろったところで 直交射影による J -分解に戻りたい.

定理 2.5. Q を直交射影とする.

$$(2.5) \quad [B/A] = [QB/A] + [Q^\perp B/A]$$

が $[B/A]$ の Q による J -分解となる必要十分条件は, 次の (1), (2) が成り立つことである.

(1) $Q^{-1}(B^{*(t)}(A^*H))$ が H で dense.

(2) $Q^\perp H \cap B^{*(t)}(A^*H) \subset \ker B^*$.

略証. $[QB/A]$ が closable となることは補題 2.3 より

$(QB)^{*(t)}(A^*H) = Q^{-1}(B^{*(t)}(A^*H))$ が dense ということと同値.

また $[Q^\perp B/A]$ が singular であることは補題 2.4 から

$(Q^\perp B)^*H \cap A^*H = \{0\}$ と同値で, これはまた $Q^\perp H \cap B^{*(t)}(A^*H)$

$\subset \ker B^*$ に同値なることは容易にわかる.

$Q = P (= P_{A^*, B^*})$ のとき, (1), (2) が成り立つことは容易にわかる. したがって

$$(2.6) \quad [B/A] = [PB/A] + [P^\perp B/A]$$

は, 一つの J -分解となる [5, Theorem 5.5]. これと定理から

系 2.6. Q は直交射影で, (2.5) が一つの J -分解ならば $Q \leq P$.

略証. $Q^{-1}(B^{*(t)}(A^*H)) \subset Q^{-1}(PH)$, かつ $Q^{-1}(PH)$ は closed. したがって, $Q^{-1}(PH) = H$, つまり $QH \subset PH$.

quotient $[B/A]$ が, 定義 AH 上で有界となるのは, ある $\alpha > 0$ で $\|Bx\| \leq \alpha \|Ax\|, \forall x \in H$ が成り立つときである. これはまた条件 $B^*H \subset A^*H$ と同値である. J -分解 (2.5) においてその closable part $[PB/A]$ が有界となる場合について, 次

のことがいえる。

定理 2.7. $[B/A]$ の J -分解 (2.5) について, 次の各条件は同値である。

- (1) $[PB/A]$ は AH 上で有界。
- (2) A_e は閉値域をもつ。
- (3) $B^{*(-1)}(A^*H)$ は閉部分空間。

略証. (1) $\Rightarrow$ (2) $[PB/A]$ が有界となることは $B^*PH \subset A^*H$ と同値, このとき $B^*P = A^*X$ となる作用素 X が存在する。これと補題 2.2 より $RV_e^*V_eB_e^* = RA_e^*X$. これからまた $V_e^*V_eB_e^* = A_e^*X$. したがって $V_e^*V_e = V_e^*V_e(A_e^*A_e + B_e^*B_e)V_e^*V_e = A_e^*A_e + A_e^*XX^*A_e \leq (1 + \|X\|^2)A_e^*A_e$. これから $V_e^*H \subset A_e^*H \subset V_e^*H$ とわかり, A_e^* したがってまた A_e が閉値域をもつとわかる. (2) $\Rightarrow$ (3) $B^{*(-1)}(A^*H) = B_e^{*(-1)}(A_e^*H)$ となることよりすぐわかる. (3) $\Rightarrow$ (1) $PH = \{B^{*(-1)}(A^*H)\}^- = B^{*(-1)}(A^*H)$ より $B^*PH \subset A^*H$ となり, これから (1) がわかる。

J -分解の一意的となる場合については。

定理 2.8. $[B/A]$ の J -分解が一意的 (したがって (2.6) のみ存在) であるための必要十分条件は, 定理 2.7 の (1) - (3) のいずれかが成り立つことである。

略証. 定理 2.7 の (1) を仮定する. Q を直交射影とし,

これによる J -分解を $[B/A] = [QB/A] + [Q^\perp B/A]$ とする.
 系 2.6 より P と Q は可換であるから $B^*Q^\perp PH = B^*PQ^\perp H \subset A^*H$. また, $[Q^\perp B/A]$ が singular という ことから,
 $A^*H \cap B^*Q^\perp H = \{0\}$, したがって $B^*Q^\perp PH = \{0\}$. これから $QB = PB$ を得るがこれは J -分解の一意性を示している. 次に
 逆をいうために, 定理 2.7 (1) が成り立たないとする. つまり
 $B^*PH \not\subset A^*H$ と仮定する. このとき, $u \in H$ で $B^*Pu \notin A^*H$
 となる u が存在する. $u \in PH$ かつ $\|u\|=1$ としよ.
 そこで $Q = P(1 - u \otimes u)$ とおく. ここで $u \otimes u$ は
 $(u \otimes u)(x) = \langle x, u \rangle u$, $x \in H$ で定義されるものである. この
 とき Q は直交射影となり, この Q を用いて, (2.6) と異なる
 $[B/A]$ の J -分解が作れる. したがって J -分解は一意でない
 ことがわかる.

3. J -分解と L -分解の関連について. S, U を正
 値作用素とする. U が S -絶対連続であるとは, 正値作用
 素の増大列 $\{U_n\}$, $U_n \leq U_{n+1}$ で $U_n \leq \alpha_n S$, $\alpha_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$)
 かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U$ (強収束) するものが存在することである.
 また, 正値作用素 V が S -特異であるとは, $0 \leq W \leq S$, V
 となる作用素 W は 0 となることと定義される [2]. 正値
 作用素 T の L -分解というのは, 上のような S -絶対連続な U

と S -特異な V の和 $T = U + V$ で T が表されることをいう。
 前章の (2.2) で並列和を定義したか $A = S^{\frac{1}{2}}$, $B = T^{\frac{1}{2}}$ とお
 いて

$$(3.1) \quad S : T = S^{\frac{1}{2}}(S^{\frac{1}{2}})_\ell (T^{\frac{1}{2}})_\ell^* T^{\frac{1}{2}}$$

を得る。並列和の性質から $\{(nS) : T\}$ は T で押えられた有界
 単調増大列となることからその強収束の極限が存在する。
 Ando [2] では

$$[S]T = \lim_{n \rightarrow \infty} (nS) : T$$

が定義され, これが S -絶対連続な作用素であり, しかも

$$(3.2) \quad T = [S]T + (T - [S]T)$$

は T の一つの L -分解となることが示された。 (S, T の
 並列和の定義として, (3.1) 以外に $\langle (S : T)x, x \rangle = \inf \{ \langle Sy, y \rangle + \langle Tz, z \rangle : y + z = x \}$ がある。この定義は (3.1) と同値であ
 ることが知られている [1, Theorem 9]。 [2] で上の $[S]T$ を導入
 する際に用いられた並列和は実はこの(後の)定義によるもの
 である。)

上の $[S]T$ と quotient の closable part (の分子) との間の
 関係を示すものとして 次は重要である。これはしかし Kosaki
 [8] で本質的にはすでに示されたものである。

定理 3.1. $S = A^*A$, $T = B^*B$ とする。このとき,

$$[S]T = B^*PB \quad (P = P_{A^*, B^*}).$$

略証. $R_n = (n^2 S + T)^{\frac{1}{2}} = (n^2 A^* A + B^* B)^{\frac{1}{2}}$ として, 方程式

$$X R_n = n A, \quad Y R_n = B$$

を考える. $\ker X \supset \ker R_n, \ker Y \supset \ker R_n$ の条件をつけると
 解 X, Y は unique, そこで $X = A_n, Y = B_n$ とおく. この
 とき, 補題 2.1 などから容易にわかることとして,

$$(1) \quad \|A_n\| \leq 1, \quad \|B_n\| \leq 1.$$

$$(2) \quad n^2 S : T = B^* (1 - B_n B_n^*) B.$$

$$(3) \quad (1 - B_n B_n^*)^{\frac{1}{2}} H = B^{*(t+1)} (n A_n^* H) = B^{*(t+1)} (A^* H).$$

$$(4) \quad 1 - B_n B_n^* \leq P.$$

かゝる. さらに少しの計算から

$$(5) \quad \{1 - B_n B_n^*\} \text{ は増大列.}$$

$$(6) \quad (1 - B_n B_n^*) B_n B_n^* = \frac{1}{n} B_n A_n^* A_n B_n^*.$$

が示される. そこで $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - B_n B_n^*) = Q$ とおくと, まず

$$(6) \text{ から } (1 - B_n B_n^*)(1 - Q) = 0. \quad \ker P = \ker (1 - B_n B_n^*) \text{ を}$$

用いて, これから $P(1 - Q) = 0$, つまり $P = PQ$ を得る.

また, (4) から $Q \leq P$ あるいは $Q = PQ$ を得て結局

$P = Q$. そうすると (2) から $n \rightarrow \infty$ の極限として

$$[S]T = B^* Q B = B^* P B \text{ を得る.}$$

$[B/A]$ を quotient (したがって $\ker A \subset \ker B$) として,

上の定理より容易に得られることとして,

系 3.2 (cf. [2, Theorem 5]). 次の各条件は同値である.

- (1) $[B/A]$ は closable.
- (2) $P = 1$.
- (3) B^*B は A^*A -絶対連続.

系 3.3. 次の各条件は同値である.

- (1) $[B/A]$ は singular.
- (2) $PB = 0$.
- (3) B^*B は A^*A -特異.

直交射影 Q による $[B/A]$ の J -分解 (2.5) に対応して, $B^*B = B^*QB + B^*Q^\perp B$ を考えると, これは系 3.2, 3.3 から B^*B の A^*A に関する L -分解とわかる. つまり, 一つの J -分解は一つの L -分解をひき起こすといえる. この逆として,

定理 3.4. S, T は正值作用素で $\ker S \subset \ker T$ を満たすとする. このとき, T の L -分解 $T = U + V$ に対して, $B^*B = T$, $B^*QB = U$, $B^*Q^\perp B = V$ となる, 作用素 B , 直交射影 Q が存在する. つまり $A^*A = S'$ となる A を適当に定めると, $[B/A] = [QB/A] + [Q^\perp B/A]$ が J -分解となり, これから与えられた L -分解がひき起こされる.

略証. H の次元 $\dim H$ が無限大のときが本質的である.

このとき H の中に互いに直交する閉部分空間 M, N で
 $\dim M = \dim(UH)^{\perp}$, $\dim N = \dim(VH)^{\perp}$ となるものが存在
 する. したがって partial isometry X, Y で

$$(3.3) \quad XX^* = P_U, \quad YY^* = P_V, \quad XY^* = 0$$

となるものが存在する. (P_U, P_V はそれぞれ $(UH)^{\perp}, (VH)^{\perp}$
 の上への直交射影.) そこで $B = X^*U^{\frac{1}{2}} + Y^*V^{\frac{1}{2}}$, $Q =$
 X^*X とおくと, Q は直交射影で, $B^*QB = U$, $B^*Q^{\perp}B = V$
 がわかる.

定理 3.5. 定理 3.4 において特に $U^{\frac{1}{2}}H \cap V^{\frac{1}{2}}H = \{0\}$ と
 すれば, $B = T^{\frac{1}{2}}$ とできる. したがって $[T^{\frac{1}{2}}/S^{\frac{1}{2}}]$ の一つの
 J -分解で, これによって与えられた T の L -分解が引き
 起こされるようなものが存在する.

略証. $XT^{\frac{1}{2}} = U^{\frac{1}{2}}$, $YT^{\frac{1}{2}} = V^{\frac{1}{2}}$, $\ker X \supset \ker T$, $\ker Y \supset$
 $\ker T$ を満たす X, Y は unique に定まる. この X, Y が実は
 (3.3) を満たす. まず $X^*X + Y^*Y = P_T$ は補題 2.1(1) から
 わかる. これから $T^{\frac{1}{2}} = X^*XT^{\frac{1}{2}} + Y^*YT^{\frac{1}{2}} = X^*U^{\frac{1}{2}} + Y^*V^{\frac{1}{2}}$.
 さらに $U^{\frac{1}{2}} = XT^{\frac{1}{2}} = XX^*U^{\frac{1}{2}} + XY^*V^{\frac{1}{2}}$, したがって
 $(P_U - XX^*)U^{\frac{1}{2}} = XY^*V^{\frac{1}{2}}$. adjoint をとり $U^{\frac{1}{2}}(P_U - XX^*) = V^{\frac{1}{2}}YX^*$,
 これと $U^{\frac{1}{2}}H \cap V^{\frac{1}{2}}H = \{0\}$ から $U^{\frac{1}{2}}(P_U - XX^*) = V^{\frac{1}{2}}YX^* = 0$ となり
 $P_U - XX^* = YX^* = 0$ を得る. 同様に $P_V - YY^* = 0$ もわかる.

そこで $B = T^{\frac{1}{2}}$ とおくと前定理と同様のことが成り立つわけである。

J-分解と L-分解の一意性の関連については、前節の定理 2.7, 2.8 及び上の定理 3.5 を用いると次のことが証明できる。

定理 3.6 $[T^{\frac{1}{2}}/S^{\frac{1}{2}}]$ の J-分解の一意なものと、 T の S に関する L-分解の一意なことは同値である。

参考文献

- [1] W. N. Anderson, JR. and G. E. Trapp, Shorted operators. II, SIAM J. Appl. Math. 28 (1975), 60-71.
- [2] T. Ando, Lebesgue-type decomposition of positive operators, Acta Sci. Math. 38 (1976), 253-260.
- [3] P. A. Fillmore and J. P. Williams, On operator ranges, Advances in Math. 7 (1971), 254-281.
- [4] S. Izumino, Quotients of bounded operators, preprint.
- [5] P. E. T. Jorgensen, Unbounded operators: Perturbations and commutativity problems, J. Functional Anal. 39 (1980), 281-307.
- [6] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [7] W. E. Kaufman, Representing a closed operator as a quotient of continuous operators, Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978), 531-534-
- [8] H. Kosaki, Remarks on Lebesgue-type decomposition of positive operators, J. Operator Theory 11 (1984), 137-143.
- [9] S. Ôta, On a singular part of an unbounded operator, to appear in Z. Anal. Anwendungen.