

三角行列分解による行列固有値問題の解析

富大・工 川田 勉 (T. Kawata)

§1. 序

可積分と称される非線形方程式を逆散乱法で処理しようとするれば、常に固有値方程式の解析が主テーマとなる。それが高次行列形式を取ると、あつかいが複雑になるのみならず、従来にはない困難も生じてくる。本文では、以下に示す $M \times M$ 次行列系の問題を取り上げ、それに付随する三角行列分解テクニックとその応用を解説する。

$$\Phi_x = \{i\lambda A + Q(x)\} \Phi. \quad (1.1)$$

ここに λ は Spectral parameter, $A = (a_1, a_2, \dots, a_M)$ は対角定数で $a_M < a_{M-1} < \dots < a_1$, 又 $Q(x)$ は Potential で off-diagonal, かつ遠方で速やかに消失又はもっと強く有限台 ($a \leq x \leq b$) 上にあるとされる。三角行列分解は, Shabat¹⁾ の逆理論の可解性を述べた論文にみられる。又高次行列系の問題は Caudrey,²⁾ ごく最近のもめとしては Beals-Coifman によるもの³⁾ がある。

§2. 解析接続と三角行列分解

$\lambda = \xi$ (実数) として, (1.1)式に次の変換を行う。

$$\Psi(\xi, x) = e^{-i\xi Ax} \Phi(\xi, x), \quad (2.1a)$$

$$\Psi_x = e^{-i\xi Ax} Q(x) e^{i\xi Ax} \Psi, \quad (2.1b)$$

$$\Psi(\xi, x) \rightarrow C^\pm(\xi) \text{ as } x \rightarrow \pm\infty. \quad (2.1c)$$

(2.1b), (2.1c)は次のボルテラ型積分方程式に等価である。

$$\Psi(\xi, x) = C^\pm(\xi) + \int_{\pm\infty}^x e^{-i\xi Ay} Q(y) e^{i\xi Ay} \Psi(\xi, y) dy. \quad (2.2)$$

明らかに $\Psi(\xi, x)$ は Bound されて $C^\pm(\xi)$ が存在し, 散乱行列 $S([s_{ij}])$ が定義できる,

$$S(\xi) = C^+(\xi) [C^-(\xi)]^{-1}. \quad (2.3)$$

$\Psi^\pm = \Psi [C^\pm]^{-1}$ を使うと, $\Psi^- = \Psi^+ S$ ともかける。 $|\xi| = \infty$ 近傍で展開でき, 次の評価を得る。

$$\Psi^\pm(\xi, x) - E = O(1/\xi), \quad S(\xi) - E = O(1/\xi). \quad (2.4)$$

$\lambda = \xi + i\eta$ (η は正又は負) に対しても Bound される函数 $\oplus(\lambda, x)$ も, 次の変換で導入できる。

$$\oplus(\lambda, x) = \Phi(\lambda, x) e^{-i\lambda Ax}, \quad (2.5a)$$

$$\oplus_x = i\lambda [A, \oplus] + Q(x) \oplus. \quad (2.5b)$$

C_j もスカラー-積分定数, $\Theta_j (= \oplus |j\rangle)$ も行列 $\oplus$ の j 列ベクトル成分とすると, (2.5b) は次の Fredholm 型方程式に歸される。

$$\Theta_j(\lambda, x) = C_j |j\rangle + \left\{ K_j + (K_j - E) \int_x^\infty \right\} e^{i\lambda(A - a_j)(x-y)} Q(y) \Theta_j(\lambda, y) dy. \quad (2.6)$$

$\eta \geq 0$ に応じ肩字 (P, N) を $\oplus$, K_j 等に加えるものとする。積分内の指数項を抑えるために, $K_j^{P, N}$ を対角定数行列,

$$K_j^P = (1, \dots, 1, k_j^P, 0, \dots, 0), \quad K_j^N = (0, \dots, 0, k_j^N, 1, \dots, 1), \quad (2.7)$$

とする。Potential の条件から $\Theta_j^{P, N}(\lambda, x)$ は λ の上下半面でそれぞれ analytic かつ実軸に continuous down する。一方 $x \gg b$ で

$$\Theta_j^P(\lambda, x) = C_j^P |j\rangle + e^{i\lambda(A - a_j)(x-b)} u_j^P(\lambda),$$

但し

$$u_j^P(\lambda) = K_j^P \int_a^b e^{i\lambda(A - a_j)(x-y)} Q(y) \Theta_j^P(\lambda, y) dy.$$

$u_j^P(\lambda)$ は analytic であり, その j 成分のみが non-zero であることから, 行列 $\oplus^P$ に直すと

$$\oplus^P(\lambda, x) = e^{i\lambda A(x-b)} U^P(\lambda) e^{-i\lambda A(x-b)} \quad (x \gg b),$$

と書ける。ここに $U^P(\lambda)$ は上三角行列で $\eta > 0$ で analytic である。 U^P に代って $U_0^P(\lambda) = e^{-i\lambda A b} U^P(\lambda) e^{i\lambda A b}$ を以下で使う。これは, Potential が有限台の上にあっても $\eta = \infty$ で Bound されない。

以上の手続きを繰返すと, $x \rightarrow \{-\infty, +\infty\}$ でそれぞれ,

$$\begin{cases} \mathbb{H}^P(\lambda, x) \rightarrow e^{i\lambda Ax} \{ L_o^P(\lambda), U_o^P(\lambda) \} e^{-i\lambda Ax}, \\ \mathbb{H}^N(\lambda, x) \rightarrow e^{i\lambda Ax} \{ U_o^N(\lambda), L_o^N(\lambda) \} e^{-i\lambda Ax}. \end{cases} \quad (2.8)$$

随伴系も定義しておく。

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_x = -\{i\lambda A + Q^T(x)\} \tilde{\Phi}, \end{cases} \quad (2.9a)$$

$$\begin{cases} \tilde{\Psi} = e^{i\xi Ax} \tilde{\Phi}, \quad \tilde{\mathbb{H}} = \tilde{\Phi} e^{i\lambda Ax}. \end{cases} \quad (2.9b)$$

S行列は, $\tilde{S} = \tilde{\Psi}(x=+\infty) [\tilde{\Psi}(x=-\infty)]^{-1}$, 又 $\tilde{S}^T S = E$. $x \rightarrow \{-\infty, \infty\}$ で

$$\begin{cases} \tilde{\mathbb{H}}^P(\lambda, x) \rightarrow e^{-i\lambda Ax} \{ \tilde{U}_o^P(\lambda), \tilde{L}_o^P(\lambda) \} e^{i\lambda Ax}, \\ \tilde{\mathbb{H}}^N(\lambda, x) \rightarrow e^{-i\lambda Ax} \{ \tilde{L}_o^N(\lambda), \tilde{U}_o^N(\lambda) \} e^{i\lambda Ax}. \end{cases} \quad (2.10)$$

これらの $\mathbb{H}$ 行列を $x = \pm\infty$ で規格化する。

$$\begin{aligned} \{\mathbb{H}^-, \mathbb{H}^+\} &= \mathbb{H}^P e^{i\xi Ax} \{ [L_o^P]^{-1}, [U_o^P]^{-1} \} e^{-i\xi Ax} \\ &= \mathbb{H}^N e^{i\xi Ax} \{ [U_o^N]^{-1}, [L_o^N]^{-1} \} e^{-i\xi Ax}, \end{aligned} \quad (2.11a)$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{\mathbb{H}}^-, \tilde{\mathbb{H}}^+\} &= \tilde{\mathbb{H}}^P e^{-i\xi Ax} \{ [\tilde{U}_o^P]^{-1}, [\tilde{L}_o^P]^{-1} \} e^{i\xi Ax} \\ &= \tilde{\mathbb{H}}^N e^{-i\xi Ax} \{ [\tilde{L}_o^N]^{-1}, [\tilde{U}_o^N]^{-1} \} e^{i\xi Ax}. \end{aligned} \quad (2.11b)$$

当然 $\mathbb{H}^\pm, \tilde{\mathbb{H}}^\pm \rightarrow E$ as $x \rightarrow \pm\infty$, 又 これらも (2.5b) 等と満足している。この事は重要である。換言すれば, 変換: $\mathbb{H}(\xi, x) \rightarrow$

$\mathbb{H}(\xi, x) e^{i\xi Ax} C(\xi) e^{-i\xi Ax}$ は x -独立な不変量 $C(\xi)$ を生む。この行列 C の種類は、取り合せる $\mathbb{H}$ -函数の種類に依る。 S 行列もその一つであり、 $[\tilde{\mathbb{H}}^+]^T \mathbb{H}^+ = E$ もそうである。この他に次の様な G -行列が定義できる。

(i) 対角で analytic なもの。

$$G^P = [\tilde{\mathbb{H}}^P]^T \mathbb{H}^P, \quad G^N = [\tilde{\mathbb{H}}^N]^T \mathbb{H}^N. \quad (2.13)$$

(ii) Riemann-Hilbert 問題を定義するもの。

$$\begin{cases} [\tilde{\mathbb{H}}^N]^T \mathbb{H}^P = e^{i\xi Ax} G e^{-i\xi Ax}, \\ [\tilde{\mathbb{H}}^P]^T \mathbb{H}^N = e^{i\xi Ax} \tilde{G} e^{-i\xi Ax}. \end{cases} \quad (2.13)$$

これらの x -独立な行列は、先に導入した三角行列で表現できる。特に S 行列を取上げよう。

$$S = U_0^P [L_0^P]^{-1} = L_0^N [U_0^N]^{-1} = [\tilde{S}^T]^{-1}. \quad (2.14)$$

行列 S の 2 種の Principal Minor を定義しよう。

$$\det_j^{(+)} S = \begin{vmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{ji} & \cdots & s_{jj} \end{vmatrix} = |s_{11}, \dots, s_{jj}|, \quad \det_j^{(+)} S = |s_{jj}, \dots, s_{MM}|.$$

$\det_j^{(+)}(LU) = \det_j^{(+)} L \cdot \det_j^{(+)} U$ 等に注意して、 $\{\det_j^{(+)} \tilde{S}, \det_j^{(+)} S\}$ は上半面に、 $\{\det_j^{(+)} S, \det_j^{(+)} \tilde{S}\}$ は下半面に解析接続される。

(2.4) の行列 $G, \tilde{G}$ を調べるために、それも S 行列要素で表示する事を考える。その対応は三角行列を介して行われている

が一意的でない。これを処理するために、 S 行列を

$$\begin{cases} S = S_L^N S_D^N S_U^N = S_U^P S_D^P S_L^P, \\ \tilde{S} = \tilde{S}_L^P \tilde{S}_D^P \tilde{S}_U^P = \tilde{S}_U^N \tilde{S}_D^N \tilde{S}_L^N, \end{cases} \quad (2.15)$$

とLDU, UDL分解する。 $S_{L,U}$ 等は対角成分に1を持つ三角行列である。 $\tilde{S}^T S = E$ より次の Orthogonality を得る,

$$\tilde{S}_D^P S_D^P = \tilde{S}_D^N S_D^N = E, \quad (2.17a)$$

$$[\tilde{S}_L^P]^T S_U^P = [\tilde{S}_U^P]^T S_L^P = [\tilde{S}_U^N]^T S_L^N = [\tilde{S}_L^N]^T S_U^N = E. \quad (2.17b)$$

(2.14), (2.15)の比較から次の分解が必要となる。

$$L_o^P = [\tilde{S}_U^P]^T D_L^P, \quad U_o^P = S_U^P D_U^P, \text{ etc.}$$

かくして現れた対角行列 $D_{L,U}^{P,N}$, $\tilde{D}_{L,U}^{P,N}$ と S 行列の関係は

$$S_D^P = D_U^P [D_L^P]^{-1} = \tilde{D}_U^P [\tilde{D}_L^P]^T, \text{ etc.},$$

で与えられるが、明らかに自由度があって D 行列は一意的に定まらない。この自由度も、一般性を損わずに除去できる。最も簡単なものとして、我々は次の付加条件を使用する。

$$D_{L,U}^{P,N} = \tilde{D}_{L,U}^{P,N}. \quad (2.18)$$

この行列を決定せねばならない。 $S_D^N = (d_1, \dots, d_M)$ として $S = S_L^N S_D^N S_U^N$ の Principal minor を取ろう。

$$\det_j^{(+)} S = \det_j^{(+)} S_D^N = |s_{11}, \dots, s_{jj}| = \prod_{k=1}^j d_k.$$

これより d_k を定める事ができる,

$$\begin{cases} S_D^N = \left(s_{11}, \frac{\mu_2^N}{s_{11}}, \dots, \frac{\tilde{s}_{MM}}{\mu_{M-2}^N}, \frac{1}{\tilde{s}_{MM}} \right), \\ S_D^P = \left(\frac{1}{\tilde{s}_{11}}, \frac{\tilde{s}_{11}}{\mu_2^P}, \dots, \frac{\mu_{M-2}^P}{s_{MM}}, s_{MM} \right). \end{cases} \quad (2.19)$$

但し,

$$\mu_j^N = |s_{11}, \dots, s_{jj}| = |\tilde{s}_{jH, jH}, \dots, \tilde{s}_{MM}|,$$

$$\mu_j^P = |\tilde{s}_{11}, \dots, \tilde{s}_{jj}| = |s_{jH, jH}, \dots, s_{MM}|.$$

(2.19)を直接的に因子分解して, $D_{L,U}^{P,N}$ を定める。

$$D_L^N = (s_{11}, \mu_2^N, \dots, \tilde{s}_{MM}, 1), \quad D_U^N = (1, s_{11}, \dots, \mu_{M-2}^N, \tilde{s}_{MM}),$$

$$D_L^P = (\tilde{s}_{11}, \mu_2^P, \dots, s_{MM}, 1), \quad D_U^P = (1, \tilde{s}_{11}, \dots, \mu_{M-2}^P, s_{MM}). \quad (2.20)$$

これらにおいて $\det S = \det \tilde{S} = 1$ も使われている。(2.18), (2.20)

のもとで, 先に触れた α -独立な行列の表示が求まる。

$$G^P = D_U^P D_L^P, \quad G^N = D_U^N D_L^N, \quad (2.21)$$

$$\begin{cases} G = D_U^N [\tilde{S}_U^N]^T S_U^P D_U^P = D_L^N S_U^N [\tilde{S}_U^P]^T D_L^P, \\ \tilde{G} = D_U^P S_L^P [\tilde{S}_L^N]^T D_U^N = D_L^P [\tilde{S}_L^P]^T S_L^N D_L^N. \end{cases} \quad (2.22)$$

§3. Riemann-Hilbert 問題

Potential に強い条件が課されているので, 実軸上で定義

された各量も、実軸上の近傍まで解析接続される。それで、(2.4)の関係を使うと、 $\eta \neq 0$ の各領域で $|\eta| \rightarrow \infty$ とし、

$$D_{L,U}^{P,N}(\lambda) \rightarrow E, \quad (3.1a)$$

$$\mathbb{H}^{P,N}(\lambda, x), \tilde{\mathbb{H}}^{P,N}(\lambda, x) \rightarrow E, \quad (3.1b)$$

が得られる。(3.1a)は、Principal minor の解析接続より明らかである。(3.1b)に対しては、 $\mathbb{H}^{\pm} = e^{i\epsilon Ax} \mathbb{U}^{\pm} e^{-i\epsilon Ax}$ と (2.11) を使えば良い。(2.22)の Principal minor を取ろう、

$$\det_j^{(\epsilon)}(D_L^N D_L^P) = \det_j^{(\epsilon)}(D_U^N D_U^P) \cdot \det_j^{(\epsilon)}([\tilde{S}_L^P]^{-1} \tilde{S}_U^N). \quad (3.2)$$

j に関し順次分解してみると、これはスカラー R.H.問題であり、(3.1a)のもとで、 $D_{L,U}^{P,N}$ は $\tilde{S}_L^P, \tilde{S}_U^N$ で再構成できる。行列 R.H.問題 (2.13) も、次の様く書く。

$$\begin{cases} [\tilde{\mathbb{H}}^N]^T \mathbb{H}^P = e^{i\epsilon Ax} (E - G_0) e^{-i\epsilon Ax}, \\ [\tilde{\mathbb{H}}^P]^T \mathbb{H}^N = e^{i\epsilon Ax} (E - \tilde{G}_0) e^{-i\epsilon Ax}. \end{cases} \quad (3.3)$$

(3.2) もそうであるが、 $D_{L,U}^{P,N}(\lambda)$ が上下半面に零点を持つ時は各 R.H.問題は特異であると称され、(3.1)を課したのみでは一意に解けない。別に、零点に関する情報が必要で、これが Soliton 解のパラメータとなる。^{4,5)} けれど、これに関する記述はめんどうになるので、本文では特に断らない限り零点のない“正則”なケースを考えるものとする。

(3.3) の式を操作して,

$$\mathbb{H}^P(\lambda, x) = E - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi - \lambda} \left\{ \mathbb{H}^N [G^N]^{-1} e^{i\xi Ax} G_0 e^{i\xi Ax} \right\}(\xi, x), (\eta > 0)$$

を得て $\mathbb{H}^P(\lambda, x)$ の構成ができるが, 積分内の $\mathbb{H}^N(\xi, x)$ も知る必要がある。これは, $\mathbb{H}^N(\lambda, x)$ の類似の表示も用意して $\lambda \rightarrow \xi \pm i0$ とした時に得られる連立特異積分方程式の解法という難かしい問題に帰着する。この難点を回避して (3.3) より何が判るか?

2種の Potential $Q(x), Q(x) + \Delta Q(x)$ に属する R.H. 問題を考える。(3.3) の有限変分を取って, 次の公式を得る,^{6, 7)}

$$\Delta Q(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A, \Delta \Xi_1(\xi, x) + \Delta \Xi_2(\xi, x)] d\xi, \quad (3.4)$$

但し,
$$\Delta \Xi_1 = ([\tilde{\mathbb{H}}^N]^T)^{-1} e^{i\xi Ax} \Delta G_0 e^{-i\xi Ax} [\mathbb{H}^P]^{-1},$$

$$\Delta \Xi_2 = ([\tilde{\mathbb{H}}^N]^T)^{-1} [\Delta \tilde{\mathbb{H}}^N]^T \Delta \mathbb{H}^P [\mathbb{H}^P]^{-1}.$$

片方の Potential を零とすると, 次式を得る。

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A, \mathbb{H}^P(\xi, x) + [\tilde{\mathbb{H}}^N(\xi, x)]^T] d\xi. \quad (3.5)$$

(3.3), (3.5) は, もっと対称性の良い, かっ (3.2) に現れた行列 $\{\hat{S}_L^P(\xi), \hat{S}_U^N(\xi)\}$ を使った形に直す事ができる。そこで,

$$\mathbb{H}_{L,U}^{P,N} = \mathbb{H}^{P,N} [D_{L,U}^{P,N}]^{-1}, \quad \tilde{\mathbb{H}}_{L,U}^{P,N} = \tilde{\mathbb{H}}^{P,N} [D_{L,U}^{P,N}]^{-1}, \quad (3.6)$$

導入しよう。明らかに $[\tilde{\mathbb{H}}_L^{PN}]^T \mathbb{H}_U^{PN} = E$ 等が成立つ。これを (2.11a) と書き直そう。

$$\mathbb{H}^T = \mathbb{H}_U^P e^{i\xi Ax} [\tilde{S}_L^P]^T e^{-i\xi Ax} = \mathbb{H}_L^N e^{i\xi Ax} [\tilde{S}_U^N]^T e^{-i\xi Ax}.$$

'に变形して (3.3) と異った形の R.H. 問題を得る。

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_U^P - \mathbb{H}_L^N &= \mathbb{H}_U^P e^{i\xi Ax} (E - [\tilde{S}_L^P]^T) e^{-i\xi Ax} \\ &\quad - \mathbb{H}_L^N e^{i\xi Ax} (E - [\tilde{S}_U^N]^T) e^{-i\xi Ax}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

これを (3.5) に使うには、以下に示す操作を使う。

$$\mathbb{H}^P = \frac{1}{2}(\mathbb{H}^P + [\mathbb{H}^P]^{-1} - 2E) + \left\{ E + \frac{1}{2}(\mathbb{H}^P - [\mathbb{H}^P]^{-1}) \right\}.$$

更に、

$$\mathbb{H}^P - [\mathbb{H}^P]^{-1} = (\mathbb{H}_U^P - [\mathbb{H}_U^P]^{-1}) + \left\{ (\mathbb{H}^P - [\mathbb{H}^P]^{-1}) - (\mathbb{H}_U^P - [\mathbb{H}_U^P]^{-1}) \right\}.$$

$\lambda \rightarrow \infty$ で、 $\mathbb{H}^P = E + O(1/\lambda)$ なので、

$$\mathbb{H}^P + [\mathbb{H}^P]^{-1} - 2E = O(1/\lambda^2),$$

更に、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mathbb{H}^P + [\mathbb{H}^P]^{-1} - 2E \right\} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mathbb{H}^P + [\mathbb{H}^P]^{-1} - 2E \right\} d\lambda = 0.$$

同様に

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (\mathbb{H}^P - [\mathbb{H}^P]^{-1}) - (\mathbb{H}_U^P - [\mathbb{H}_U^P]^{-1}) \right\} d\xi = 0.$$

以上から次の等式を得る,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} [A, \mathbb{H}^P] d\xi &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [A, \mathbb{H}_U^P - [\mathbb{H}_U^P]^{-1}] d\xi, \\ \int_{-\infty}^{\infty} [A, [\tilde{\mathbb{H}}^N]^T] d\xi &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [A, \mathbb{H}_L^N - [\mathbb{H}_L^N]^{-1}] d\xi. \\ \int_{-\infty}^{\infty} [A, \mathbb{H}_U^P + [\tilde{\mathbb{H}}^N]^T] d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} [A, \mathbb{H}_U^P - \mathbb{H}_L^N] d\xi.\end{aligned}$$

これと, (3.7)を (3.5)に代入すれば,

$$\begin{aligned}Q(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A, \mathbb{H}_U^P - \mathbb{H}_L^N] d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A, \mathbb{H}_U^P e^{i\xi Ax} (E - [\tilde{S}_L^P]^T) e^{-i\xi Ax}] d\xi \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A, \mathbb{H}_L^N e^{i\xi Ax} (E - [\tilde{S}_U^N]^T) e^{-i\xi Ax}] d\xi. \quad (3.8)\end{aligned}$$

(3.7)の意味を示すために, 具体例を調べたい。まず,

$$\mathbb{H}_U^P |1\rangle = \mathbb{H}^+ |1\rangle, \quad \mathbb{H}_L^N |M\rangle = \mathbb{H}^+ |M\rangle, \quad (3.9)$$

に注意しておく。(3.7)は, $\beta_{kj} = a_k - a_j$ として, 分解しておく。

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_U^P |j\rangle - \mathbb{H}_L^N |j\rangle &= -\sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{H}_U^P |k\rangle \langle k| [\tilde{S}_L^P]^T |j\rangle e^{i\xi \beta_{kj} \alpha} \\ &\quad + \sum_{k=j+1}^M \mathbb{H}_L^N |k\rangle \langle k| [\tilde{S}_U^N]^T |j\rangle e^{i\xi \beta_{kj} \alpha}. \quad (3.10)\end{aligned}$$

$n=3$ のケースを例に取り, 必要事項をリストする。

$$\mathbb{H}_U^P = \left[\mathcal{O}_1^P, \frac{\mathcal{O}_2^P}{\tilde{S}_{11}}, \frac{\mathcal{O}_3^P}{S_{33}} \right], \quad \mathbb{H}_L^N = \left[\frac{\mathcal{O}_1^N}{S_{11}}, \frac{\mathcal{O}_2^N}{\tilde{S}_{33}}, \mathcal{O}_3^N \right], \quad (3.11a)$$

$$\tilde{S}_L^P = \begin{pmatrix} 1, \\ \tilde{\gamma}_1^2, 1 \\ \tilde{\gamma}_1^3, -\gamma_3^2, 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_U^N = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma_1^2 & \tilde{\gamma}_3^1 \\ & 1 & \tilde{\gamma}_3^2 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.11b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1^2 &= \tilde{S}_{21}/\tilde{S}_{11}, & \tilde{\gamma}_1^3 &= \tilde{S}_{31}/\tilde{S}_{11}, & \gamma_3^2 &= S_{23}/S_{33}, \\ \tilde{\gamma}_3^1 &= \tilde{S}_{13}/\tilde{S}_{33}, & \tilde{\gamma}_3^2 &= \tilde{S}_{23}/\tilde{S}_{33}, & \gamma_1^2 &= S_{21}/S_{11}. \end{aligned} \quad (3.11c)$$

(3.10) は次の様に書ける。

$$\mathcal{O}_1^P - \frac{\mathcal{O}_1^N}{S_{11}} = -\frac{\mathcal{O}_2^N}{\tilde{S}_{33}} \gamma_1^2 e^{i\xi\beta_{21}x} + \mathcal{O}_3^N \tilde{\gamma}_3^1 e^{i\xi\beta_{31}x}, \quad (3.12a)$$

$$\frac{\mathcal{O}_2^P}{\tilde{S}_{11}} - \frac{\mathcal{O}_2^N}{\tilde{S}_{33}} = -\mathcal{O}_1^P \tilde{\gamma}_1^2 e^{i\xi\beta_{12}x} + \mathcal{O}_3^N \tilde{\gamma}_3^2 e^{i\xi\beta_{32}x}, \quad (3.12b)$$

$$\frac{\mathcal{O}_3^P}{S_{33}} - \mathcal{O}_3^N = -\mathcal{O}_1^P \tilde{\gamma}_1^3 e^{i\xi\beta_{13}x} + \frac{\mathcal{O}_2^P}{\tilde{S}_{11}} \gamma_3^2 e^{i\xi\beta_{23}x}. \quad (3.12c)$$

$\mathcal{O}_1^P(\lambda, x)$, $\mathcal{O}_3^N(\lambda, x)$ は Gel'fand-Levitan 核表示を持てる事が知られている。^(7,8) 例えは,

$$K^P(x, y) = -\frac{\beta_{12}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mathcal{O}_1^P(\xi + i0, x) - |1\rangle \right\} e^{i\xi\beta_{12}(x-y)} d\xi. \quad (3.13)$$

これに (3.12a) より作った $\mathcal{O}_1^P(\lambda, x)$ を代入すると

$$K^P(x, y) = \frac{\beta_{12}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\mathcal{O}_2^N}{\tilde{S}_{33}} \gamma_1^2 e^{-i\xi\beta_{12}y} - \mathcal{O}_3^N \tilde{\gamma}_3^1 e^{-i\xi(\beta_{12}y + \beta_{23}x)} \right\} (\xi x) d\xi.$$

ここで (3.8) によれば,

$$Q|1\rangle = -\frac{1}{2\pi}(A-a_1)\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\theta_2^N}{\tilde{S}_3}\tilde{r}_1^2e^{-i\xi\beta_{12}x}-\theta_3^N\tilde{r}_3'e^{-i\xi\beta_{13}x}\right\}d\xi.$$

明らかに $\beta_{12}Q(x)|1\rangle = (A-a_1)K^P(x,x)$ 。以上を見てみると, R.H. 問題 (3.7), Potential の公式 (3.8) 及び λ -独立な核 (3.13) により, Gel'fand-Levitan 方程式の構成とそれによる Potential の回復ができる。所で, 我々は, 核を (3.9) の函数にしか定義できない。詳細は省略するが, この事は $4 \leq M$ では特に重大で, close した Gel'fand-Levitan 方程式が得られないのである。

§4. 無限小変分と2乗固有函数

(3.4) で変分を無限小とした時, $\Delta\Xi_2$ は高次オ-タ-故, 落るが, この時 (2.22) を使って注目すべき簡単化が得られる。

$$\delta\Xi_1 = \delta\Xi^{(0)} + \delta\Xi^{(P)} + \delta\Xi^{(N)} \quad (4.1)$$

但し

$$\delta\Xi^{(0)} = \Theta_L^N e^{i\xi Ax} \delta([\tilde{S}_U^N]^T S_U^P) e^{-i\xi Ax} [\Theta_U^P]^{-1}, \quad (4.2a)$$

$$\delta\Xi^{(P)} = \Theta_L^P \delta D_U^P [D_U^P]^{-1} [\tilde{\Theta}_U^P]^T, \quad (4.2b)$$

$$\delta\Xi^{(N)} = \Theta_U^N \delta D_U^N [D_U^N]^{-1} [\tilde{\Theta}_L^N]^T. \quad (4.2c)$$

$\delta\Xi^{(P,N)}$ は, λ の上下半面で analytic であつ $|\lambda| \rightarrow \infty$ で消失して, しかも積分 (3.4) に寄与しない。これを直接計算で求

めるのは $M=2$ を除いては困難である。⁶⁾ 所で (4.2a) は, $\tilde{S}_U^N, \tilde{S}_L^P$ の変分を含むが, 次の様にしておくと後の都合で良い。

$$\begin{aligned} \delta \Xi^{(6)} = & \left(\tilde{H}_L^N \right)^T e^{i\xi Ax} (\delta \tilde{S}_U^N)^T \tilde{S}_L^N e^{-i\xi Ax} [\tilde{H}_U^N]^T \\ & - \left(\tilde{H}_U^P \right)^T e^{i\xi Ax} (\delta \tilde{S}_L^P)^T \tilde{S}_U^P e^{-i\xi Ax} [\tilde{H}_L^P]^T. \end{aligned} \quad (4.3)$$

さて (3.4) の逆の問題を考える。2種の Potential $Q + \Delta Q$, Q に対する解の変分 $\Delta \Phi^\pm$ は, $\Phi^\pm = \tilde{H}^\pm e^{i\xi Ax}$ を使って

$$\Delta \Phi^\pm(x) = \Phi^\pm(x) \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi^\pm(y)]^{-1} \Delta Q(y) \{ \Phi^\pm(y) + \Delta \Phi^\pm(y) \} dy, \quad (4.4)$$

で与えられる。散乱行列の変分 ΔS は, 次のようになる。

$$\Delta S = S \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(y)]^{-1} \Delta Q(y) \{ \Phi(y) + \Delta \Phi(y) \} dy. \quad (4.5)$$

一方の Potential もゼロとすると,

$$S(\xi) - E = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi Ay} Q(y) \tilde{H}^T(\xi, y) e^{i\xi Ay} dy. \quad (4.6)$$

無限小変分に対しては, $\Delta \Phi$ を落せば良い。特に,

$$\delta \Omega^P = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi Ay} [\tilde{H}_U^P]^T \delta Q \cdot \tilde{H}_L^P e^{i\xi Ay} dy, \quad (4.7a)$$

$$\delta \Omega^N = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi Ay} [\tilde{H}_L^N]^T \delta Q \cdot \tilde{H}_U^N e^{i\xi Ay} dy, \quad (4.7b)$$

を定義すれば, $\delta \Omega^{P,N} = \delta \Omega_L^{P,N} + \delta \Omega_D^{P,N} + \delta \Omega_U^{P,N}$ と三角分解して

$$(\tilde{S}_L^P)^T \delta S_U^P = S_D^P \delta \Omega_L^P \tilde{S}_D^P, \quad (\tilde{S}_U^N)^T \delta S_L^N = S_D^N \delta \Omega_L^N \tilde{S}_D^N. \quad (4.8)$$

(4.3), (4.8) を (3.4) に代入する.

$$\begin{aligned} \delta Q(x) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A, \oplus_L^N e^{i\xi A x} S_D^N \delta \Omega_L^N \tilde{S}_D^N e^{-i\xi A x} [\tilde{\Theta}_U^N]^T] d\xi \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A, \oplus_U^P e^{i\xi A x} S_D^P \delta \Omega_U^P \tilde{S}_D^P e^{-i\xi A x} [\tilde{\Theta}_L^P]^T] d\xi. \quad (4.9) \end{aligned}$$

(4.7), (4.9) は, 恒等演算子 ($\delta Q \rightarrow \delta S \rightarrow \delta Q$) を表す. 各々の写像は, 2乗固有函数を介して表現され, 結局, 恒等演算子の2乗固有函数による展開 (つまり, completeness) を与える. 具体例を $M=3$ について与えよう. Notation を工夫する,

$$\delta Q = [\delta Q_3, \delta Q_1, \delta Q_2]^T, \quad \delta \tilde{Q} = [\delta Q_2, \delta Q_3, \delta Q_1]^T, \quad Q = [Q_j^i].$$

$\Phi^{PN} = e^{i\xi A x} \oplus^{PN}_k$ 2乗固有函数 ($\Phi = [\phi_j^i]$) を定義等する,

$$\Phi_{jk} = \begin{pmatrix} \phi_j^2 \phi_k^3 \\ \phi_j^3 \phi_k^1 \\ \phi_j^1 \phi_k^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi}_{jk} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_j^2 \phi_k^3 \\ \tilde{\phi}_j^3 \phi_k^1 \\ \tilde{\phi}_j^1 \phi_k^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} a_2 - a_3 & & \\ & a_3 - a_1 & \\ & & a_1 - a_2 \end{pmatrix}.$$

これらベクトルを $|\delta Q, \delta \tilde{Q}\rangle$ の如く, 6次元に拡大し, 通常のブラケット演算も定義しておく,

$$|\Phi_{12}, \tilde{\Phi}_{12}\rangle \langle \tilde{\Phi}_{21}, \Phi_{21}| = \begin{pmatrix} |\Phi_{12}\rangle \langle \tilde{\Phi}_{21}|, & |\Phi_{12}\rangle \langle \Phi_{21}| \\ |\tilde{\Phi}_{12}\rangle \langle \tilde{\Phi}_{21}|, & |\tilde{\Phi}_{12}\rangle \langle \Phi_{21}| \end{pmatrix}.$$

6×6のDirac- δ , $\delta^{(6)}(x-y)$ に対し次式が成立つ,

$$\begin{aligned} \delta^{(6)}(x-y) = & \frac{-1}{2\pi} \begin{pmatrix} \hat{A} \\ -\hat{A} \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{S_{11} S_{33}} \left\{ |\Phi_{12}^P, \tilde{\Phi}_{12}^P\rangle \frac{1}{S_{11}} \langle \tilde{\Phi}_{21}^P, \Phi_{21}^P| \right. \\ & + |\Phi_{13}^P, \tilde{\Phi}_{13}^P\rangle \langle \tilde{\Phi}_{31}^P, \Phi_{31}^P| + |\Phi_{23}^P, \tilde{\Phi}_{23}^P\rangle \frac{1}{S_{33}} \langle \tilde{\Phi}_{32}^P, \Phi_{32}^P| \Big\} \\ & + \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \hat{A} \\ -\hat{A} \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{S_{11} S_{33}} \left\{ |\Phi_{21}^N, \tilde{\Phi}_{21}^N\rangle \frac{1}{S_{11}} \langle \tilde{\Phi}_{12}^N, \Phi_{12}^N| \right. \\ & + |\Phi_{31}^N, \tilde{\Phi}_{31}^N\rangle \langle \tilde{\Phi}_{13}^N, \Phi_{13}^N| + |\Phi_{32}^N, \tilde{\Phi}_{32}^N\rangle \frac{1}{S_{33}} \langle \tilde{\Phi}_{23}^N, \Phi_{23}^N| \Big\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

但し, 各2乗固有函数の内, ケットは x に, ブラは y に依存する.

これを使てやれば, (1.1)を伴う可積分な非線形方程式を線形化した問題のGreen函数を構成できる.⁹⁾

§5. Resolvent と Formal な逆散乱法

(1.1) の非同次問題

$$Ux = \{i\lambda A + Q(x)\}u + v(x) \quad (5.1)$$

を考え, 特に解が次の条件に従うものとする

$$u(\lambda, x) = O(1/\lambda). \quad (5.2)$$

(5.1)を, $|\lambda| = \infty$ に沿って積分すれば, v が λ -独立なので

$$v(x) = -\frac{A}{2\pi} \oint u(\lambda, x) d\lambda. \quad (5.3)$$

一方, (5.1) は定数変化法で積分できる。λ の上下面で analytic な解 $u^{PN}(\lambda, x)$ は, $\mathbb{H}^{PN}$ で書ける。

$$u^{PN}(\lambda, x) = \mathbb{H}^{PN}(\lambda, x) \left\{ \int_{-\infty}^x K_0^{PN} - \int_x^{\infty} (E - K_0^{PN}) \right\} \\ \times e^{i\lambda A(x-y)} [\mathbb{H}^{PN}(\lambda, y)]^{-1} v(y) dy. \quad (5.4)$$

ここで K_0^{PN} は A に依存する対角射影行列で, A の要素が $a_{j+1} < 0 < a_j$ の時

$$K_0^P = (1 \cdots \overset{\textcircled{1}}{1}, \overset{\textcircled{0}}{0}, \cdots), \quad K_0^N = E - K_0^P,$$

と選ばれる。 u^{PN} で区分的に analytic な函数 $u(\lambda, x)$ を定義する。これはやはり (5.1) を満たし, しかも (5.2) から

$$u(\lambda, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda; x, y) v(y) dy \quad (5.5)$$

と, 解核表示される。但し, G は以下に示す G^{PN} で構成される区分的に analytic な核 (Resolvent kernel) である。

$$G^P = \begin{cases} \mathbb{H}_U^P(x) K_0^P e^{i\lambda A(x-y)} [\tilde{\mathbb{H}}_L^P(y)]^T & (y \leq x) \\ -\mathbb{H}_U^P(x) K_0^N e^{i\lambda A(x-y)} [\tilde{\mathbb{H}}_L^P(y)]^T & (y \geq x) \end{cases} \quad (5.6a)$$

$$G^N = \begin{cases} \mathbb{H}_L^N(x) K_0^N e^{i\lambda A(x-y)} [\tilde{\mathbb{H}}_U^N(y)]^T & (y \leq x) \\ -\mathbb{H}_L^N(x) K_0^P e^{i\lambda A(x-y)} [\tilde{\mathbb{H}}_U^N(y)]^T & (y \geq x). \end{cases} \quad (5.6b)$$

(5.5) によれば, 先の仮定 (5.2) は確かに満たされる事がわかる。(5.3), (5.5) は恒等演算子 ($v(x) \rightarrow u(\lambda, x) \rightarrow v(x)$)

を定義する。

$$\delta(x-y) = -\frac{1}{2\pi} A \oint G(\lambda; x, y) d\lambda.$$

(5.6) を代入して, (1.1) の固有函数の Completeness が求まる。

その際, 次の関係に注意する,

$$\begin{aligned} & \left\{ G^P(\xi) - G^N(\xi) \right\}_{y < x} - \left\{ G^P(\xi) - G^N(\xi) \right\}_{y > x} \\ &= \Phi^+ \left\{ S_U^P [\tilde{S}_L^P]^T - S_L^N [\tilde{S}_U^N]^T \right\} [\tilde{\Phi}^+]^T = 0. \end{aligned}$$

これらより, 次式を得る。

$$\delta(x-y) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(x) \left\{ S_U^P K_0^P [\tilde{S}_L^P]^T - S_L^N K_0^N [\tilde{S}_U^N]^T \right\} [\tilde{\Phi}(y)]^T d\xi. \quad (5.7)$$

さて, ここで高次オーダー行列系の逆理論, 特に Gel'fand-Levitan 方程式によるものを考える。§3 ですでに触れたが厳密な意味では未解決である。しかし, 例えば Zakharov 等は,¹⁰⁾ これを扱っている。基本的な問題は Gel'fand-Levitan 核導入の正当性にある。本節でも, Zakharov 等と同様に, その正当性も考慮しないものとし, 議論を進める。2種の Potential Q_1, Q_0 を持つ系も考え, それらの解の間に λ -独立な変換核 $M(x, y), \tilde{M}(x, y)$ による変換を仮定する,

$$\Phi_1(\lambda, x) = \Phi_0(\lambda, x) + \int_{-\infty}^x M(x, y) \Phi_0(\lambda, y) dy, \quad (5.8a)$$

$$\tilde{\Phi}_0^T(\lambda, x) = \tilde{\Phi}_1^T(\lambda, x) + \int_{-\infty}^x \tilde{\Phi}_1^T(\lambda, y) \tilde{M}^T(x, y) dy. \quad (5.8b)$$

但し, $\Phi = \Phi^T$. Potential は, 核と次の関係を持つ,

$$A^T M(x, x) A - M(x, x) = Q_0(x) - Q_1(x).$$

次の Functional を考える事は基本的である.

$$\Lambda(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\xi, x) W_1(\xi) \tilde{\Phi}_0^T(\xi, y) d\xi \quad (x < y). \quad (5.9)$$

W_1 は Q_1 に属する散乱データで, 次の通りである.

$$W_1(\xi) = \{ S_U^P K_0^P [\hat{S}_L^P]^T - S_L^N K_0^N [\hat{S}_U^N]^T \}(\xi).$$

(5.7)~(5.9) から, Gelfand-Levitan 型方程式を得る,

$$M(x, y) A + \int_x^\infty M(x, z) F(z, y) dz = F(x, y). \quad (5.10)$$

ここで

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(\xi, x) \{ W_1(\xi) - W_0(\xi) \} [\tilde{\Phi}_0^T] d\xi.$$

(5.10) は, Q_0 の系が解けている時に, Q_1 を求めるものであり普通の Gelfand-Levitan 方程式の拡張したものである. 従来これは, 2乗固有函数の Completeness (4.10) 又は (4.9) の導出にこの一般化された G.L. eq. が必要であった. 実際 (5.10) を線形化して写像 $\delta S \rightarrow \delta Q$ を構成し, (4.10) に良く似た関係を得るが一致はしない.⁹⁾ (4.10) の各積分内には, 3種の 2乗固

有函数のテンソル積が存在するのに対し, (5.10)を用いて得られるものでは, 次を示す2種の内の一方が捨てられ, 結果的に2種のテンソル積しか現れない。

$$|\Phi_{12}, \tilde{\Phi}_{12}\rangle \langle \tilde{\Phi}_{21}, \Phi_{21}|, |\Phi_{23}, \tilde{\Phi}_{23}\rangle \langle \tilde{\Phi}_{32}, \Phi_{32}|.$$

換言すれば, 2乗固有函数のスパンする空間の次元が異なる。

この事実は, 本節の議論が *formal* であったからと片付ける事を好まない。(5.4)に使った射影行列の影響が強く出ており, *formal* な変換核の導入 (5.8) の寄与と考えにくいのである。

上に述べた事柄は, §3における逆理論と(5.10)によるそれとの間にも存在すると思われるが, それに関する議論は本文では行わなかった。

§6. あとがき

高次行列系の固有値問題は, S 行列等の三角分解を行うことによって組織的に扱える。積の形と和の形のR-H問題, (3.3), (3.7)が与えられたが, 特に和の形(3.7)には, 三角行列 $\hat{S}_L^P, \hat{S}_U^N$ が陽に現れていて, 直接それが散乱データになる事がわかる。 $M=3$ に相当する (3.12) によって, $\mathbb{H}_U^P$ の #1,2 成分と $\mathbb{H}_L^N$ の #2,3 成分に関する *Couple* した入面上における積分方程式が構成可能であるが, $M \geq 4$ ではこれは困難となる。この事は, (3.13)の如き変換核が (3.9)に示した成分にしか

定義できない事と関係して、 $G-L$ eq.の導出が $M \geq 4$ では
 リ困難になる事を教える。注意せねばならないのは、上に述
 べた理由から、逆理論が全く不可能になったわけではない。
 本文では触れなかったが、(3.7)の音散スペクトラムと扱って、
 Soliton解は成まるであろう。その他にも、積の形の $R-H$ 問
 題も解析的因子分解^{4,5)}したり、§5の $G-L$ eq.を解く方法な
 どによっても可能である。けれど逆散乱法の立場に立てば、連
 続スペクトラムをいかに処理するかが本質的であり、この意
 味で先に述べた問題は、興味深いものである。

$R-H$ 問題から *Potential* 変動についての汎函数表現を得ら
 れる事は特筆すべき事である。従来迄は、一般化された $G-L$
 eq.より求めるという遠回りをしていたので、すでに述べた
 理由から高次系では、その導出は困難だったのである。逆の
 Mappingを合成する事により、2乗固有函数のCompleteness
 が得られた。これは、formalな逆理論から得られるものと明
 白な相違を持つ事が判った。尚、2乗固有函数そのものが従
 う固有値問題が存在し、これを使って逆散乱法で解ける非線形
 方程式を定める事ができる。この非線形方程式を線形化した
 時に得られる線形偏微分演算子の解核、つまりGreen函数は、
 2乗固有函数のCompletenessを使って決定できるのである。

参考文献

- (1) A.B. Shabat : *Differential Equations*, 15 (1979) 1824
- (2) P.J. Caudrey : *Physica* 6D (1982) 51
- (3) R. Beals and R.R. Coifman ; *Comm. Pure. Appl. Math.*,
XXXVII (1984) 39
- (4) V.E. Zakharov and A.B. Shabat ; *Func. Anal. Appl.*,
13 (1979) 13
- (5) T. Kawata : *J. Phys. Soc. Jpn.*, 51 (1982) 3381
- (6) T. Kawata : *J. Phys. Soc. Jpn.*, 53 (1984) 2879
- (7) T. Kawata : "Riemann-Hilbert Problem and Inverse Scattering
Method for the 3×3 - Spectral Problem", will appear in *J. Phys.*
Soc. Jpn.
- (8) D.J. Kaup ; *Studd. Appl. Math.*, 55 (1976) 9
- (9) T. Kawata ; IPPJ Research Report in Nagoy Uni.,
IPPJ-641, Aug. 1983
- (10) V.E. Zakharov and A.B. Shabat : *Func. Anal. Appl.*,
8 (1974) 43