

逆 Sturm-Liouville 問題について

学習院大理 水谷 明 (Akira Mizutani)

Sturm-Liouville 型の固有値問題

$$E(q(x); h, H) \begin{cases} y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0, & 0 < x < \pi \\ y'(0) - h y(0) = 0, & y'(\pi) + H y(\pi) = 0 \end{cases}$$

を考える。ここで $q(x)$ は $0 \leq x \leq \pi$ で定義された実数値連続関数、 h, H は実の定数、 λ は実のパラメータとする。

固有値問題 $E(q(x); h, H)$ の固有値を $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$) 対応する固有関数を $\{\varphi(x, \lambda_n)\}_{n=0}^{\infty}$ ($\varphi(0, \lambda_n) = 1$ と正規化する) とする。正規化定数 ρ_n を $\rho_n = \int_0^{\pi} \varphi(x, \lambda_n)^2 dx$, により定めるとき、 $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $E(q(x); h, H)$ の *spectral characteristics* と呼ぶことにする。

$q(x)$ が $0 \leq x \leq \pi$ で 2 回連続微分可能で、 $q''(x)$ が絶対連続ならば、 $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して、漸近式

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right), & (1) \\ (\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \rightarrow +\infty) \\ \rho_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \rho_n > 0 & (2) \\ (a_0, a_1, b_0 \text{ は定数}) \end{cases}$$

が成り立つ。

逆 Sturm-Liouville 問題とは、 $E(g(x); \ell, H)$ の固有値 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ などを知って、未知関数 $g(x)$ を求める問題であり、次の Gel'fand-Levitan の定理が基本的である。

Gel'fand-Levitan の定理

漸近式 (1), (2) を満たす $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ が与えられたとき、それを spectral characteristics とする固有値問題 $E(g(x); \ell, H)$ が一意的に存在する。ここで $g(x) \in C^1[0, \pi]$, $\ell, H \in \mathbb{R}$ である。 $\square$

注意 最小固有値 λ_0 が $\lambda_0 \geq 1$ としても一般性を失わないので、以下はそうのように仮定する。

この小論では、

- (I) 上の定理を解くためのよく知られた Gel'fand-Levitan のアルゴリズムを一部変更すること。 および、
- (II) spectral characteristics の小摂動に関して、逆問題が

安定であることを示すこと。

の2つを目標とする。

(I) アルゴリズムの変更

次のアルゴリズムによって、上の定理が示される。

(A-1) 実数 α, β, γ を適当に定めることにより、固有値問題 $E(\alpha + \beta \cos 2x; 0, \gamma)$ の spectral characteristics $\{\lambda_n, \tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ が (1), (2) と同じ漸近式, すなわち,

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \tau_n = \rho_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

を満たすようにできる。

(A-2) $r(x) = \alpha + \beta \cos 2x$ とおく。

$\omega(x, \lambda)$ を初期値問題

$$\begin{cases} y''(x) + (\lambda - r(x))y(x) = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

の解とし,

$$F(x, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\omega(x, \lambda_n) \omega(\rho, \lambda_n)}{\rho_n} - \frac{\omega(x, \tau_n) \omega(\rho, \tau_n)}{\tau_n} \right\}$$

とおく。このとき $F(x, \rho)$ は $0 \leq x, \rho \leq \pi$ で2回連続微分可能である。

(A-3) 任意に $x (\leq \pi)$ を固定したとき, 積分方程式

$$K(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) F(t, \lambda) dt + F(x, \lambda) = 0 \quad (0 \leq \lambda \leq x)$$

の解 $K(x, \lambda)$ ($0 \leq \lambda \leq x$) は一意的に存在する。

更に, $K(x, \lambda)$ は $0 \leq \lambda \leq x \leq \pi$ で 2 回連続微分可能である。

(A-4) $\varphi(x, \lambda)$, $f(x)$, h を

$$\varphi(x, \lambda) = \omega(x, \lambda) + \int_0^x K(x, \lambda) \omega(\lambda, \lambda) d\lambda \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$f(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x) + v(x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$h = K(0, 0)$$

と定めると, 次の (i) - (iii) が成り立つ。

(i) $\varphi(x, \lambda)$ は,

$$\varphi''(x, \lambda) + (\lambda - f(x)) \varphi(x, \lambda) = 0, \quad (0 < x < \pi)$$

$$\varphi(0; \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h$$

を満足する。

(ii) $-\frac{\varphi'(\pi, \lambda_n)}{\varphi(\pi, \lambda_n)} = H$ は, $n=0, 1, 2, \dots$ に無関係な定数である。

(iii) $f_n = \int_0^\pi \varphi(x, \lambda_n)^2 dx$ ($n=0, 1, 2, \dots$) が成り立つ。 □

(A-4) から, 求めた Sturm-Liouville 問題 $E(f(x); h, H)$

は, はじめに与えられた $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ を spectral characteristics としてもつことがわかる。

Gel'fand-Levitan のアルゴリズムでは「先発近似」として固定した $E(0; 0, 0)$ を考えている。我々のアルゴリズムによれば $q(x)$ の連続微分可能性を容易に確かめることができる。

ここでは (A-1) のみを確かめることにする。

補題 一般に $Y(x)$ を $0 \leq x \leq \pi$ で 2 回連続微分可能で, $Y''(x)$ が絶対連続と仮定すると, 固有値問題 $E(Y(x); \delta, J)$ の spectral characteristics $\{\lambda_n, \tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し, 漸近式

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0^*}{n} + \frac{a_1^*}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \\ \tau_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0^*}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \end{cases}$$

が成り立つ。ただし,

$$a_0^* = \frac{1}{\pi} \left(\delta + J + \frac{1}{2} R \right), \quad R = \int_0^\pi r(t) dt,$$

$$b_0^* = \frac{1}{2} \left\{ \delta + J + \frac{1}{2} R + \pi \left(\delta^2 - \frac{1}{2} r(0) \right) \right\},$$

$$a_1^* = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{8} (r'(\pi) - r'(0) + \int_0^\pi r^2(t) dt) + \frac{1}{2} (Jr(\pi) + \delta r(0)) - \frac{\delta^3 + J^3}{3} - \frac{1}{\pi} \left(\delta + J + \frac{1}{2} R \right)^2 \right\}$$

である。 □

上の補題で, $Y(x) = \alpha + \beta \alpha_0 x$, $\delta = 0$ とおくと,

$$a_0^* \equiv \frac{J}{\pi} + \frac{\alpha}{2}, \quad b_0^* \equiv \frac{J}{2} - \frac{\pi}{4} \beta,$$

$$a_1^* \equiv \frac{1}{8} \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) + \frac{J}{2\pi} (\alpha + \beta) - \frac{J^3}{3\pi} - \left(\frac{J}{\pi} + \frac{\alpha}{2} \right)^2$$

となる。従って、任意の $a_0, a_1, b_0 \in \mathbb{R}$ に対し、 $a_0^* = a_0$, $b_0^* = b_0$, $a_1^* = a_1$ が成り立つような実数 α, β, J が存在する。

(II) 逆問題の安定性

S Sturm-Liouville 問題 $E(q(x); h, H)$ ($q(x) \in C^1[0, \pi]$) およびその spectral characteristics $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ を既知とする。

境界条件が同一である他の Sturm-Liouville 問題 $E(p(x); h, H)$ ($p(x) \in C^1[0, \pi]$ は未知とする) を考え、その spectral characteristics $\{\mu_n, \sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ が与えられるものとする。このとき $\{\mu_n, \sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ にある意味で近ければ、差 $|p(x) - q(x)|$ が小であることを示す。

定理 1.

$A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \{ \sqrt{\lambda_n} |\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \}$ が十分小ならば、

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |p(x) - q(x)| \leq C_1 \cdot A$$

が成り立つ。ここで、 $C_1 > 0$ は、 $q(x), h, H$ にのみ依存する定数である。 □

$\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し、漸近式

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \rho_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

が成り立つ。ここで、定数 a_0, b_0 は、

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(L + H + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} g(t) dt \right),$$

$$b_0 = \frac{1}{2} \left\{ L + H + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} g(t) dt + \pi \left(L^2 - \frac{1}{2} g(0) \right) \right\}$$

により与えられる。

$\{\mu_n, \sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対しても同様な漸近式が成り立つので、

$A < +\infty$ のとき、必然的に、

$$p(0) = g(0) \quad \text{かつ} \quad \int_0^{\pi} p(t) dt = \int_0^{\pi} g(t) dt, \quad \text{となる。}$$

定理 1 の一般化を行うため、 $g(x)$ の仮定を強め、 $g'(x)$ が絶対連続と仮定すると、 $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し、漸近式

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \rho_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

が成り立つ。

定理 2.

与えられた $\{\mu_n, \sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ が漸近式

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a_0'}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \sigma_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0'}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

(a_0', b_0' は定数)

を満足するものとする。このとき,

$$B \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{\lambda_n} \left| \sigma_n - \rho_n - \frac{b_0' - b_0}{\lambda^2} \right| + |\mu_n - \lambda_n - 2(a_0' - a_0)| \right\} + \\ + |\sigma_0 - \rho_0| + |\mu_0 - \lambda_0| + |a_0' - a_0| + |b_0' - b_0|$$

が十分小なれば,

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |p(x) - q(x)| \leq C_2 \cdot B$$

が成り立つ。ここで, $C_2 > 0$ は $q(x)$, h , H にのみ依存する定数である。 □

定理 1 の証明の方針

$\varphi(x, \lambda)$ ($0 \leq x \leq \pi$, $\lambda > 0$) を,

$$\begin{cases} y'' + (\lambda - q(x))y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = h \end{cases}$$

の解, $F(x, \rho)$ ($0 \leq \rho, x \leq \pi$) を,

$$F(x, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\varphi(x, \mu_n) \varphi(\rho, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\varphi(x, \lambda_n) \varphi(\rho, \lambda_n)}{f_n} \right\}$$

と置く。

また, $\psi(x, \lambda)$ ($0 \leq x \leq \pi$, $\lambda > 0$) を,

$$\begin{cases} y'' + (\lambda - p(x))y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = h \end{cases}$$

の解, $K(x, \lambda)$ ($0 \leq \lambda \leq x \leq \pi$) を,

$$\begin{cases} K_{xx} - p(x)K = K_{\lambda\lambda} - q(\lambda)K & (0 < \lambda < x < \pi) \\ K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x (p(t) - q(t)) dt & (0 \leq x \leq \pi) \\ K_\lambda(x, 0) - q K(x, 0) = 0 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases} \quad (3)$$

の解とすると, 鈴木[3]の「オ1変形公式」により,

$$\psi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \int_0^x K(x, \lambda) \varphi(\lambda, \lambda) d\lambda,$$

の関係がある。

(3)より,

$$p(x) - q(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x) \quad (4)$$

一方, $F(x, \lambda)$ と $K(x, \lambda)$ には, 関係式,

$$K(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) F(t, \lambda) dt + F(x, \lambda) = 0 \quad (5)$$

($0 \leq \lambda \leq x \leq \pi$)

が成り立つ。 $F(t, \lambda)$ が,

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |F(t, \lambda)|^2 dt d\lambda < 1 \quad (6)$$

を満足するとき, (5), (4) より,

$$\frac{1}{2} (q(x) - p(x)) = \frac{d}{dx} F(x, x) - K(x, x)^2 + 2 \int_0^x F_x(x, u) K(x, u) du, \quad (7)$$

($0 \leq x \leq \pi$)

と計算される。(6), (7) より定理1の評価が得られる。 ///

定理2の証明の方針

$$Y(x) = \beta(x) + 2(a'_0 - a_0) + \frac{f}{\pi^2}(b'_0 - b_0)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと, $E(r(x); h, H)$ の spectral characteristics $\{\mu_n, \tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して, 漸近式

$$\sqrt{\mu_n} = \sqrt{\mu_n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \tau_n = \sigma_n + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

が成り立つので, $|Y(x) - p(x)|$ の評価は定理1に帰着される。

///

参考文献

- [1] I.M. Gelfand - B.M. Levitan, On the determination of a differential equation by its spectral function (英訳: AMS transl. Ser. 2, 1 (1955), 253-304)
- [2] B.M. Levitan - M.G. Gasymov, Determination of a differential equations by two of its spectra, Russian Math. Survey, 19-2 (1964), 1-63.
- [3] T. Suzuki, Uniqueness and nonuniqueness in an inverse problem for the parabolic equation, to appear in J. Diff. Eq.
- [4] 吉田耕作, 積分方程式論 (才2版) 岩波書店 1978.