

Reflexion Principle on Second order Arithmetic

(九八一) 倉田令二朗

I 発表した内容は間違っている。(新井氏の注意)

昨年11月19日、シンポジウムにおいて

$$\begin{array}{c} (RFN)_{(ACA)_0} \rightarrow BI \rightarrow ATR \rightarrow WO(\kappa_{\Gamma_0}) \\ \uparrow \qquad \qquad \searrow \qquad \swarrow \\ TI(\phi_{1\epsilon_0}) \leftarrow \qquad \qquad TI(\kappa_{\Gamma_0}) \end{array}$$

と示し、これは Friedman-Simpson の結果

$$(ACA)_0 \vdash BI \leftrightarrow RFN_{(ACA)_0}$$

が示せるとしたが、これは間違っている。しかし少しばかりの間違いではなく全面的な間違いであることが新井敏康氏の注意

——詳細な説明を述べた——に気づいた。そして改めて考えた。

破綻の根源は次の点にあった。Friedman の $RFN_{(ACA)_0}$ とは

ω - $RFN_{(ACA)_0}$ のことである。

$$\varphi(X) \rightarrow \exists \text{ countable } \omega\text{-model } M \text{ of } (ACA)_0 \text{ s.t. } X \in M \rightarrow M \models \varphi(X)$$

であるが筆者は Henkin-completeness の証明法に気づいて

$$(ACA)_0 \vdash \omega\text{-}RFN_{(ACA)_0} \leftrightarrow RFN_{(ACA)_0}$$

が成立すると思っていたのである。

1) ところが $RFN_{(ACA)_0}$ はそんなに弱く

$$(ACA)_0 \vdash Ind \leftrightarrow RFN_{PC} \leftrightarrow RFN(ACA)_0.$$

が成立する。ここで $Ind := \varphi\text{-}Ind$ for all formula φ

$PC :=$ second order logic with equality

実際 $RFN(ACA)_0 \vdash Ind$ は自明, $Ind \rightarrow RFN_{PC}$ は cut elimination と partial truth definition による. $RFN_{PC} \rightarrow RFN(ACA)_0$ は $(ACA)_0$ が finitely axiomatizable であることから出る.

2) $(ACA)_0 \vdash (RFN(ACA)_0 \rightarrow BI)$ の証明を頼してその間は通い. 上記の思い込みと対り自己暗示にかかりウソの証明を「ツツ上げ」皆様に多大な迷惑をかけた (一時肉とわらってすみませんウソの話を聞かされた「~~な~~」のE"から)

$$3) (ACA)_0 \vdash \omega\text{-}RFN(ACA)_0 \leftrightarrow BI$$

は正しい. 左 ← の部分について新井 A 自身の証明がある.

4) $BI \rightarrow WO(<P_0)$ のやろす" $BI \rightarrow WO(P_0)$ ($\omega(ACA)_0$) として新井の証明がある.

$$5) \text{上のことから } BI \rightarrow Con(ACA) \text{ ($\omega(ACA)_0$)}$$

E"から $RFN(ACA)_0 \rightarrow BI$ ($\omega(ACA)_0$) にはありえない.

以上の真に度し新井 A に感謝する

II Reflection Principle on (ATR)₀

以下では PA 上の Reflection-Principle に関する結果の P + Q として 12 Friedman McAloon Simpson の結果 (PATRAS Logic Symposium 1982) (FMS といい) を拡張する.

(2) $(ACA)_0 \vdash ATR \leftrightarrow RT(2, <\omega) \leftrightarrow \text{open set of } [\omega]^\omega \text{ is Ramsey}$
 $\leftrightarrow \text{open set of } [\omega]^\omega \text{ is Ramsey (FMS)}$

$[\omega]^\omega$ is ω の無限部分集合の全体, $<\omega$ の Baire topology $\in \lambda^{\aleph_0}$

$X \subseteq [\omega]^\omega$ is Ramsey $\leftrightarrow \exists A \in [\omega]^\omega$ such that $[A]^\omega \subseteq X$ or $[A]^\omega \cap X = \emptyset$

Minimization of $RT(2, <\omega)$

M : finite set $\neq \emptyset$

d -closed partition of $P(M)$ is (C_0, C_1) $C_i \subseteq P(M)$, C_i is d -closed

($i=0,1$) and $C_0 \cup C_1 = P(M)$

$X \subseteq M$ is homogeneous d -closed partition (C_0, C_1) of $P(M)$ is

$P(X) \subseteq C_0$ or $P(X) \subseteq C_1$ or $\perp$

n -dense set

finite set X is 0-dense $\Leftrightarrow |X| \geq 2, |X| \geq \min X$

X is $(n+1)$ -dense $\Leftrightarrow P(X)$ is n -dense d -closed partition $\neq \emptyset$

X is n -dense homogeneous d -closed partition $\neq \emptyset$ or $\perp$

$D := \forall n \exists n$ -dense d -closed partition

(3) $PA - \Sigma_1 - RFN_{(ATR)_0} \leftrightarrow D$ (in PA) (FMS)

f -large set $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ is f -large set X is f -large is

$f(\min X) \leq |X|$ or $\perp$

$D_n := \forall n \exists n$ -dense and f -large set

$PA \vdash PA - \Sigma_n - RFN_{(ATR)_0} \leftrightarrow D_n \leftrightarrow \Delta_n - WFP(P_0) \leftrightarrow \Pi_n - TI(P_0)$