

Braid 群の表現と. の Hodge analogue について.

千葉大. 教養 寺松友秀

1. Introduction
2. 織田-T. の仕事.
3. Hodge analogue. — Determinant of Appel's H.G.F. —

1. Introduction

まず始めに. Topological τ . Magnus 表現の話をする.

N_{n-1} は. A' 内の $(n-1)$ 個の異なる点の全体とする. すなわち.

$$N_{n-1} = \{ (x_i)_{i=1, \dots, n-1} \in (A')^{n-1} \mid x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j \}$$

とする. さらに. N_n から. N_{n-1} への写像 φ_n を. N_n の点

$(x_1, \dots, x_n)$ に対して $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in N_{n-1}$ に対応させる写像

とする. この時. φ_n は typical fiber が. $\mathbb{P}^1$ から $\{\infty, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ を

除いたものは τ である. fiber bundle になっている. (これも fiber bundle

は. C^∞ -section が存在する. ゆえに. 自然に標準同型 $\varphi_{n*} :$

$\pi_1(N_n, \tilde{\eta}) \rightarrow \pi_1(N_{n-1}, \eta)$ は全射である. (ここで. section s

から $\tilde{\eta}$ まで τ である s^* によって. $\pi_1(N_{n-1}, \eta)$ は. $\ker(\varphi_{n*})$

に作用する. (ここで η は. N_{n-1} の点. $\tilde{\eta}$ は. η の上にある.

section 上の点). $\ker(\varphi_{n*})$ は. $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{x_1, \dots, x_{n-1}, \infty\})$

(ここで. $\eta = (x_1, \dots, x_{n-1})$) と τ である. この群を G とおく. (ここで.

$\pi_1(N_{n-1}, \eta)$ の G への作用は. $G' = [G, G]$, $G'' = [G', G']$

とおく. G'/G'' への $\pi_1(N_{n-1}, \eta)$ の作用を τ とおく. (ここで $M = G'/G''$

とおく. $\pi_1(N_{n-1}, \eta) \rightarrow \text{Aut}(M)$ なる表現が得られたことは

に注意する. M の構造を (4.1) (見よう). $G^{\text{ab}} = G/[G, G]$,

$A = \mathbb{Z}[G^{\text{ab}}]$ とおく. M_1 は. conjugation による G module

の構造がはいる. この action は. G^{ab} を経由し. 従って. M_1 は

A -module の構造がはいる.

Proposition $\pi_1(N_{n-1}, \gamma)$ の M への表現は, A -linear である。

Definition (Magnus representation) ρ は ρ_1 から得られる ρ_2 。

$\pi_1(N_{n-1}, \gamma) \rightarrow \text{Aut}_A(M)$ となる A 上の $\pi_1(N_{n-1}, \gamma)$ の表現 ρ 。

Magnus representation という。

2.2. M は A -module として構造であるが, G は, $\text{rank}(n-1)$ の free group であるとして, ρ を利用して, M の構造を計算することはできる。結果はどうなるかと言えは, $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \pi_1(N_{n-1}, \gamma)$ の local monodromy ρ 。 G を ρ に延長して ρ も ρ とする。さらに, $\gamma_1 \sim \gamma_n$ ρ と γ 。基本関係が, $\gamma_1 \cdots \gamma_n = e$ と表される様に ρ 。 G は, ρ の時, $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ で生成される free group とする。そして, A 上の $\gamma_1 \sim \gamma_{n-1}$ の像 $\rho_1 \sim \rho_{n-1}$ とおく。 M は, ρ の時, A 上では, $[\gamma_i, \gamma_j] = -[\gamma_j, \gamma_i]$ ($1 \leq i < j \leq n-1$) で生成される。関係式は, $(\rho_i - 1)[\gamma_j, \gamma_k] + (\rho_j - 1)[\gamma_k, \gamma_i] + (\rho_k - 1)[\gamma_i, \gamma_j] = 0$ ($1 \leq i < j < k \leq n-1$) で与えられる。このことから, M は A の商体 ρ で tensor すれば, ρ の次 ρ は, $n-2$ と表される。さらに, $\pi_1(N_{n-1}, \gamma)$ の作用で不変な M の $\text{rank}(n-2)$ の free A sub module が存在するという事実を認めれば, Magnus 表現の determinant 表現 $\pi_1(N_{n-1}, \gamma) \rightarrow A^\times$ が得られる。

2. 織田-T. の仕事

ℓ を素数として, $\ell > n$ と仮定する。(外ゆえに時もう少しデリケートな議論をいれなければ, たぶんこの仮定は必要ないと思われる。) 1 での ρ は, ℓ -adic version を考えることにより, 代数的な構成が可能である。 k を標数 0 の 1 本として, 1 の ℓ 乗根 ρ をすべて含むものとする。 $\eta \in N_{n-1}$ の geometric generic point,

$P_\eta^1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \infty\}$ は fibration $\mathcal{N}_n \rightarrow \mathcal{N}_{n-1}$ の η にあつて、
 geometric fiber とする。この時、 $G^{(2)} \in \pi_1(P_\eta^1 - \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \infty\}, \eta)$
 の maximal pro- l quotient とする。これは、 $\text{rank}(n-1)$ の
 free pro- l group である。 $A^{(2)} \in \mathbb{Z}_l$ 上の $(G^{(2)})^{ab}$ の completed
 group ring とする。 $A^{(2)} \cong \mathbb{Z}_l[[u_1, \dots, u_{n-1}]]$, $u_i = x_i - 1$ とする。
 第一章の topological case の時は γ は continuous section の
 のかわりに、Beli model とする。これは、Arithmetic は、
 Magnus representation を構成するに役立つ。

主: $\pi_1(\mathcal{N}_{n-1}, \eta) \rightarrow \text{Aut}_{A^{(2)}} M^{(2)}$.
 これは、 $M^{(2)}$ は、 $G^{(2)}$ の 2 階の Metabelian 化である。すなわち、
 $M^{(2)} = G^{(2)'} / G^{(2)''}$ 。また、同様にして、determinant とする。これは
 により、 $\det \text{主}: \pi_1(\mathcal{N}_{n-1}, \eta) \rightarrow (A^{(2)})^\times$ となる準同型も
 得られる。

織田 - T. [1] の主定理は、これは homomorphism に関する
 記述である。この前には Kummer Character に関する Proposition
 を述べよう。以下群の右肩に (l) とするのは、これは max. pro- l quotient を表す。

$\overline{\mathcal{N}_{n-1}} \cong (A^1)^{n-1} = \bigcup_{i \neq j} D_{ij}$, $D_{ij} = \{(x_i) \in A^{n-1} \mid x_i = x_j\}$
 となる。 D_{ij} の $\square$ の monodromy group は、 $\pi_1(\overline{\mathcal{N}_{n-1}}, \eta)^{ab}$
 の自然な generator は、 τ_{ij} である。これは、

$(\pi_1(\overline{\mathcal{N}_{n-1}}, \eta)^{ab})^{(l)} \cong \mathbb{Z}_l^{\oplus \frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \left(\cong \mathbb{Z}_l[\lambda_i, \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}]^\times \otimes \mathbb{Z}_l \right)$
 となる同型が得られる。また、 $(\pi_1(\mathcal{N}_{n-1}, \eta)^{ab})^{(l)}$ の $\lambda_i - \lambda_j$
 に対する Kummer Character ε 、 $P_{ij}: \pi_1^{ab}(\mathcal{N}_{n-1}, \eta)^{(l)} \rightarrow \mathbb{Z}_l$
 とする。 $\bigoplus_{i < j} P_{ij}: (\pi_1(\mathcal{N}_{n-1}, \eta)^{ab})^{(l)} \rightarrow \mathbb{Z}_l^{\oplus \frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$
 ε 、 P_{ij} が非退化である。 $\bigoplus P_{ij}$ は、 $(\pi_1(\overline{\mathcal{N}_{n-1}}, \eta)^{ab})^{(l)}$

に制限すると同型と与える。(=2". $\oplus p_{ij}$ は代数幾何的に定義した群論的にも表わせる.)

Proposition homomorphism $\det \Phi$ は $(\pi_1(\overline{N_{n-1}}, \eta)^{ab})^{(2)} =$
 制限すると $(a_{ij}) \in (\pi_1(\overline{N_{n-1}}, \eta)^{ab})^{(2)} \cong \bigoplus_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \mathbb{Z}$

に対して.

$$\det \Phi((a_{ij})) = \prod_{i < j} ((1+u_i)(1+u_j))^{a_{ij}}$$

と与えられる.

この Proposition は η . $\pi_1(N_{n-1}, \eta)$ から $(A^{(2)})^\times$ への
 homomorphism χ は.

$$\chi: \pi_1(N_{n-1}, \eta) \ni g \mapsto \left(\prod_{i < j} ((1+u_i)(1+u_j))^{p_{ij}(g)} \right) \in (A^{(2)})^\times$$

で定義すると. χ は Character Φ , χ^{-1} の積 $\Phi \cdot \chi^{-1}$ は.

$\pi_1(\overline{N_{n-1}}, \eta)$ 上では trivial になる. $\zeta = \chi^{-1} \Phi$ exact sequence

$$1 \rightarrow \pi_1(\overline{N_{n-1}}, \eta) \rightarrow \pi_1(N_{n-1}, \eta) \rightarrow \text{Gal}(\overline{k}/k) \rightarrow 1$$

を考えれば. $\Phi \cdot \chi^{-1}$ は $\text{Gal}(\overline{k}/k) \xrightarrow{\theta} (A^{(2)})^\times$ に factor

する. ζ の factorization θ は. 次の Main Theorem で表わされる.

Main Theorem (織田-T[1]) θ は以下の通り. "universal
 Jacobi sum" で書ける. (参照 [2]).

3. Hodge analogue — Appel の超幾何級数の行列式 —

この章では. 上の結果の Hodge analogue を考察しよう.

この章の Introduction とは. A^1 上の 2 点 λ_1, λ_2 の時の場合を.
 考えよう.

(1). 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の場合.

有限体 $\mathbb{F}_q$ は. 乗法群の中に μ_{q-1} を含むこともとれる.

$\mathbb{F}_q^\times \supset \mu_{q-1}$. $\chi_1, \chi_2 \in \mu_{q-1}$ の non-trivial character とし. λ_1, λ_2 は.

χ_1, χ_2 も non-trivial 1- $\bar{\rho}$, 2- $\bar{\rho}$ も α とする。 $N_2 =$

$\text{Spec } \mathbb{F}_q[\lambda_1, \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}]$ の maximal ideal M 2- $\bar{\rho}$, M 1- $\bar{\rho}$.

$(\lambda_1 - u_1, \lambda_2 - u_2)$ ($u_i \in \mathbb{F}_q$) 1- $\bar{\rho}$, 2- $\bar{\rho}$ も α とする。

$\ell \in (\frac{1}{p} < \frac{1}{\ell} < \frac{1}{p-1})$ $\text{Char } \mathbb{F}_q = p$ と素数 ℓ とする。

$\pi_1(N_2, \gamma)$ 1- $\bar{\rho}$ の M 2- $\bar{\rho}$ の Frobenius ε , Fr_m と書く。

(χ_1, χ_2) 1- $\bar{\rho}$, $A^{(\ell)}$ の $\overline{\mathbb{Q}_\ell} = \{ \text{直 } \varepsilon \text{ も } \}$ character と考えられ。

$\overline{\mathbb{Q}_\ell} \varepsilon$, (χ_1, χ_2) 1- $\bar{\rho}$, 2- $\bar{\rho}$, $A^{(\ell)}$ -algebra と思, $T = \ell$ とする。

$\overline{\mathbb{Q}_\ell}(\chi_1, \chi_2)$ と書く。 $\ell = \alpha$ 時, $M^{(\ell)} \otimes_{A^{(\ell)}} \overline{\mathbb{Q}_\ell}(\chi_1, \chi_2)$ 1- $\bar{\rho}$ とする。

$$\Phi = \det \Phi : \pi_1(N_2, \gamma) \xrightarrow[\text{Fr}_m]{\downarrow} M^{(\ell)} \otimes_{A^{(\ell)}} \overline{\mathbb{Q}_\ell}(\chi_1, \chi_2)$$

$\varepsilon = \varepsilon$, $\text{tr}(\Phi(\text{Fr}_m) \otimes_{A^{(\ell)}} \overline{\mathbb{Q}_\ell}(\chi_1, \chi_2))$ と計算可能。

ε 1- $\bar{\rho}$, Lefschetz の fixed pt formula より, 適当な Belyi lifting ε とし, $\sum_{x \in \mathbb{F}_q} \chi_1(x - u_1) \chi_2(x - u_2)$ と等しく。

$y = (x - 1)/(u_2 - u_1)$ と変数変換可能。上式は,

$$\begin{aligned} & \sum_{y \in \mathbb{F}_q} \chi_1((u_2 - u_1)y) \chi_2((u_2 - u_1)(y - 1)) \\ &= \chi_1(u_2 - u_1) \chi_2(u_2 - u_1) \sum_{y \in \mathbb{F}_q} \chi_1(y) \chi_2(y - 1) \end{aligned}$$

1- $\bar{\rho}$, Kummer character ε , Jacobi の和の積 1- $\bar{\rho}$, 2- $\bar{\rho}$ 。

(2) 複素数体 $\mathbb{C}$ 上 2- $\bar{\rho}$ Period ε と考えた場合。

$X : \exp z_1 = x - \lambda_1, \exp z_2 = x - \lambda_2$ 2- $\bar{\rho}$ 定義した Riemann 面 $A^1_{\mathbb{C}} - \{\lambda_1, \lambda_2\}$ の universal abelian covering 2- $\bar{\rho}$ 。

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} - 2\pi i \mathbb{Z}$ かつ, $\alpha_1 + \alpha_2 \notin 2\pi i \mathbb{Z}$ とする。 $\ell = \alpha$ 時,

$\pi_1(A^1_{\mathbb{C}} - \{\lambda_1, \lambda_2\})$ の Character $\chi \varepsilon$ 。

$$\chi : \pi_1(\mathbb{A}^1 - \{\lambda_1, \lambda_2\}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

$$\lambda_i \text{ の monodromy } \longmapsto \exp(\alpha_i)$$

により定義する。このとき、 $W = \exp(\alpha_1 - 1) z_1 \exp(\alpha_2 - 1) z_2 dx$ となる。

χ に対応する X 上の differential form と対応する。このとき、この differential form の period を考えれば、形式的には、

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (x - \lambda_1)^{\alpha_1 - 1} (x - \lambda_2)^{\alpha_2 - 1} dx \text{ と対応する。} T = T^{-1} \text{ である。}$$

Riemann 面の branch をきちんと指定する必要がある。この場合、 χ は ± 1 となる。以下形式的計算を進めよう。上式より、

$$y = (x - \lambda_1) / (\lambda_2 - \lambda_1) \text{ と変数変換をすれば、}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\lambda_2 - \lambda_1)^{\alpha_1 - 1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{\alpha_2 - 1} y^{\alpha_1 - 1} (y - 1)^{\alpha_2} (\lambda_2 - \lambda_1) dy \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} (-1)^{\alpha_2 - 1} \int_0^1 y^{\alpha_1 - 1} (1 - y)^{\alpha_2 - 1} dy \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} (-1)^{\alpha_2 - 1} \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \end{aligned}$$

と変形できる。このときも同様である。Kummer character とガンマ関数の積の形になることは、興味深い。これは、

一般個数の点をぬいたときの Period の方にあたる。いわゆる、

Hodge analogue である。どうなるか？

$\mathbb{A}^1$ の 2 点の場合を考えたときどうであったか？

点で考える時も、covering 上の differential form と、

topological cycle の branch をきちんと指定する必要がある。

この正確な period との解釈は、準備中の議論 [2] を見てもらうことになる。

もう一つ、Sophisticate

である。分かりやすい形で述べることにしよう。

$n \geq 3$ とする. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を実数で, $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ を

満たすものとする. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を正の実数とする.

$1 \leq i, j \leq n-1$ 対する i, j に對して, 特異積分 a_{ij} を,

$$a_{ij} = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{i}{\prod_{p=1}^i (x - \lambda_p)^{\alpha_p-1}} \prod_{p=i+1}^n (\lambda_p - x)^{\alpha_p-1} x^j dx$$

で定義される. 収束するにたがひかる. α 時.

Theorem (Hodge analogue)

行列 (a_{ij}) の行列式は,

$$\det(a_{ij})_{i,j} = \prod_{i=1}^n \left\{ (-1)^{i-1} \prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i) \right\}^{\alpha_i}.$$

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)^{-1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}$$

とある.

上の定理において, λ_i, α_i について, 両方とも holomorphic である. branch をうけることはない. 複素数 λ_i, α_i についても成り立つ. またこの定理は, 前半が Kummer character の部分で, 後半が Γ 関数と対して, 織田-T. の結果の Hodge analogue と対している.