

Markov subshifts と β -変換

教育大理 伊藤俊次

広島大理 高橋陽一郎

§0. Symbolic dynamics

Rohlin, Krieger の結果, Sinai の Markov partition などによって, 測度論的な力学系, 位相力学系ともに, しばしば, shift 変換として実現される. 即ち, ある有限集合 A の可算直積空間 $\Omega (= A^{\mathbb{Z}}$ あるいは $A^{\mathbb{N}}$) 上の変換 σ と同型となる. ここで

$$(\sigma\omega)(n) = \omega(n+1). \quad (\omega(n): \omega \text{ の } n \text{ 座標})$$

この実現の可能性, 媒介となる generator や partition の選び方, 等問題は多いが, shift 変換に実現されれば, その構造の簡単さ, 位相的性質, 測度論的性質, sequence としての性質などの対応があることから, 考えやすいことは確かである.

以下, Markov subshift の一般的な性質について述べた後, β 変換を例にとって, 必ずしもその一般論のうろに入らないが, 種々の性質を見ることにする. 実現の問題には触れないつもりである. shift 変換 σ に対して, 不変な閉集合への制限

である場合, subshift と呼び, 変換は同じ σ であらわす.

定義 subshift (X, σ) が Markov であるとは, ある集合 $W \subset A^{p+1}$ ($p \geq 0$) が存在して,

$$X = M(W) \equiv \{ \omega \in \Omega \mid (\omega(n), \dots, \omega(n+p)) \in W \ (\forall n) \}$$

が成立することを用いる

従って, Ω の部分集合 X は, 自然に, 閉かつ σ 不変である. この定義は, Smale が, finite type と呼んでいるものと一致する. また, 片側の shift 変換の場合, W. Parry が intrinsic Markov であると呼んだものでもあるが, その上の不変測度で, その metrical entropy が, 力学系 (X, σ) の topological entropy と一致するものが, Markov process であることから単に Markov と呼んでおく.

定義 上のような p の最小のものを, X の Markov 性の order, そのときの A^{p+1} の部分集合 $W \in$, structure set という. また, 次式で定義される matrix $M = (M_{uv})_{u, v \in A^p} \in$, structure matrix と呼ぶ.

$$M_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{if } u = (a_0 \dots a_{p-1}), v = (a_1 \dots a_p) \\ & \text{+ } (a_0 \dots a_p) \in W \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

例 $A = \{0, 1, 2\} \quad p = 1$

$$W = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2)\}$$

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

このとき, $\omega = \dots 012012012\dots \in \mathcal{M}(W)$

$\omega' = \dots 0121012\dots \notin \mathcal{M}(W)$

注意

Symbolic dynamics に対しては, topological entropy

$e(X, \sigma)$ は,

$$(1) \quad e(X, \sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{card}(\mathcal{W}_n(X))$$

で与えられる. ここで $\mathcal{W}_n(X)$ は, X に現れる長さ n の word の全体, 即ち,

$$\mathcal{W}_n(X) = \{ (\omega(0), \dots, \omega(n-1)) \mid \omega \in X \}$$

また, $\text{card}(W)$ は, 集合 W の濃度である. Markov subshift の場合, structure matrix M (order p) とすれば,

$$(2) \quad \text{card}(\mathcal{W}_n(X)) = \sum_{u, v \in A^p} (M^{n-p})_{uv}$$

であるから, $M \in \text{Euclid 空間 } \mathbb{R}^{A^p}$ 上の作用素とみるとき,

$$(3) \quad e(X, \sigma) = \log r(M) = \log \lambda$$

ただし, $r(M)$ は作用素 M のスペクトル半径, λ は matrix M の最大正固有値とする. (1)式から容易にわかるように,

$$e(X, \sigma) = \lim_{p \rightarrow \infty} e(X_p, \sigma)$$

ただし,

$$X_p = \mathcal{M}(\mathcal{W}_{p+1}(X)), \quad X_p \supset X_{p+1}, \quad X = \bigcap_{p \geq 0} X_p$$

§1. Markov subshift の特徴付け

A を有限集合とする. 片側可算直積 $A^{\mathbb{N}}$ も, 両側可算直積 $A^{\mathbb{Z}}$ も, shift 変換を考えることができるから, それを区別するため, 前の場合 σ , 後の場合 σ_+ と書く. また, $A^{\mathbb{Z}}$ から $A^{\mathbb{N}}$ への自然な projection を π としておこう. このとき Markov subshifts は, topological に次のように特徴付けられる. (Parry の定理の拡張)

定理 X を $A^{\mathbb{Z}}$ の 開かつ不変な部分集合, $X_+ = \pi(X)$ とすれば, 次の4条件は互に同値である.

- (a) (X, σ) は, Markov subshift. (両側)
- (b) (X_+, σ_+) は, Markov subshift (片側)
- (c) π の X 上への制限 $\pi|_X$ は, 開写像
- (d) σ_+ の X_+ 上への制限 $\sigma_+|_{X_+}$ は, 開写像

証明. (a) と (b) が同値であることは, X が開であるから明らか. (c) から (d) が従うことは次の diagram から自明.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\sigma|_X} & X \\
 \pi|_X \downarrow & & \downarrow \pi|_X \\
 X_+ & \xrightarrow{\sigma_+|_{X_+}} & X_+
 \end{array}
 \quad \text{commutative, i.e.,} \quad \pi|_X \circ \sigma|_X = \sigma_+|_{X_+} \circ \pi|_X$$

残りの証明に入る前に次の事実に注意しておこう.

補題 可算直積空間 $A^{\mathbb{Z}}$ の部分集合が, 開かつ閉である

必要十分条件は, Cylinder sets の有限和であることである.

実際, 十分であることは明らかであるから, 必要性を示そう. 今, 集合 X が, cylinder sets の有限和でなければ, 筒集合の列 $C_n, n \geq 0$,

$$C_n = \{ \omega \in A^{\mathbb{Z}} \mid \omega(k) = a_k^n, |k| \leq n \} \quad (a_k^n \in A)$$

が存在して, X 及びその補集合 X^c の双方と共通点をもつ. A は有限集合であるから, 適当な部分列 $(C_{n'})$ をとれば,

$$a_{k'}^{n'} = a_k \in A$$

と仮定してよい. 従って, $\omega = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}}$ は, X と X^c との両方の集積点である. 従って, どちらかが開かつ開ではない. ゆえに, X が開かつ開ならば, 筒集合の有限和である.

Remark この補題からただちに次のような性質が導かれる. なお補題は片側直積 $A^{\mathbb{N}}$ に対しても同様に成立する.

(a) (Hedlund) φ を $A^{\mathbb{Z}}$ からそれ自身への shift σ と可換な連続写像とすれば, 適当な $p \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ と, A^{p+1} から A への写像 F が存在して,

$$\varphi(\omega)(n) = F(\omega(n+k), \dots, \omega(n+k+p)) \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

(b) Subshift (X, σ) から, 他の shift $(B^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ への連続な準同型写像は, $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ からの準同型写像に拡張される.

(c) (X, σ) ($X \subset A^{\mathbb{Z}}$) を Markov subshift とすれば,

有限集合 $B (\supset A)$ が存在して, 適当な $(B^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ の endomorphism (連続性は仮定する) φ に対して,

$$X = \varphi(B^{\mathbb{Z}}) \cap A^{\mathbb{Z}}$$

定理の証明に戻ろう (a) から (c) を導こう. そのためには, 筒集合 $U = \{\omega \in X \mid \omega(-n) = a_0, \dots, \omega(m-n) = a_m\} \ (n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_m \in A)$ に対して, $\pi(U)$ が開集合であることと言えはよい. $\omega_+^0 \in \pi(U)$ を任意にとる. 適当な $\omega^0 \in U$ を選べば, $\pi(\omega^0) = \omega_+^0$ となる. 今, $V = \{\omega_+ \in X_+ \mid \omega_+(k) = \omega^0(k) \ 0 \leq k \leq l\} \ (l = \max\{p, m-n+p\})$ とおけば, ω_+^0 の近傍である. $V \subset \pi(U)$ を示せば証明は終る. V から任意の元 ω_+ をとって, $\omega \in A^{\mathbb{Z}}$ を,

$$\omega(n) = \begin{cases} \omega^0(n) & (n < 0) \\ \omega_+(n) & (n \geq 0) \end{cases}$$

として定義すれば, X の Markov 性の order $\leq p$ とするとき, ω は再び X の元, さるに, $\omega^0 \in U$ だから, $\omega \in U$, ゆえに, $\omega_+ = \pi(\omega) \in \pi(U)$.

最後に, (c) ならば (b) であることを示そう. これは本質的には, W. Parry の結果である. 仮定より, $\sigma|_{X_+}$ は開写像従って開かつ連続であるから, 補題 (片側の場合) により, $\sigma([a] \cap \pi(X))$ は開かつ閉である. A^{p+} ($p \geq 0$) の部分集合の族 $\{P_a \mid a \in A\}$ で, 互に disjoint なものが存在して,

$$\sigma([a] \cap \pi(X)) = \bigcup_{u \in P_a} [u] \cap \pi(X)$$

となる. ここで, $[a], [u]$ などは, 筒集合で, 一般に, $v \in A^n$ に対して,

$$[v] = \{\omega \mid (\omega(0), \dots, \omega(n-1)) = v\}$$

と約束しておく. $\{P_a \mid a \in A\}$ が上のような性質をもつものの中で最小の族 (従って一般に partition でない) と仮定しておく. このとき,

$$W = \{(a_0, a_1, \dots, a_p) \in A^{p+1} \mid (a_1, \dots, a_p) \in P_{a_0}\}$$

とあけば, $X_+ = \mathcal{M}_+(W)$ であることを示そう. 実際, Y は任意の A^N の部分集合, $n \geq 1$, $a_0, \dots, a_n \in A$ とするとき,

$$\sigma([a_0, \dots, a_n] \cap Y) = [a_1, \dots, a_n] \cap \sigma([a_0] \cap Y)$$

であることから, $n \geq p$ ならば,

$$\sigma([a_0, \dots, a_n] \cap \pi(X)) = [a_1, \dots, a_n] \cap \pi(X)$$

である. 念のため注意しておけば, $(a_k, \dots, a_{n+p})$ ($0 \leq k \leq n-p$) の中に, W に属さないものが存在すれば, $\{P_a \mid a \in A\}$ の最小性から両辺とも空集合として等号が成立する. これから $\mathcal{M}_+(W)$ の任意の元は, $\pi(X)$ の集積点だから $\pi(X)$ の元, また逆に,

$$\bigcup_{a \in A} \bigcup_{u \in P_a} [a, u] = \bigcup_{w \in W} [w] \supset \pi(X)$$

より, $\pi(X) \subset \mathcal{M}_+(W)$, 従って, (X_+, σ) は Markov である.

証明 終

§2. Markov subshift についてのいくつかの remarks

この節では, Markov subshift, 殊に, その structure matrix についていくつか述べたい.

(A) 既約性と既約成分への分解

一般に力学系 (Y, φ) は, 任意の 2 つの開集合 U, V に対して, ある整数 $n \geq 1$ が存在して, $\varphi^n(U) \cap V \neq \emptyset$ が成立するとき, (topologically) transitive と呼ばれるが, symbolic dynamics においては, すべての筒集合 U, V に対して上の条件の成立と同値である. Markov subshift に対しては, もう少し弱い条件が考えられる.

定義 行列 M が, (置換に関して) 既約とは, 任意の置換 τ に対して, $\tau(M) = (M_{\tau(i)\tau(j)})$ が,

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_3 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \quad (M_1, M_2 \text{ は 正 方 行 列 } \neq 0)$$

の形にならないことという. (例えば, F.R. Gantmacher の本を参照)

定義 Markov subshift (X, σ) が既約とは, その structure matrix $M = M(X)$ が既約のことという.

注意 structure matrix はそのすべての entry が ^{非負} ~~非~~ であるから, 絶対値最大の固有値の中に正のものが存在して, それは simple である. (Perron-Frobenius の定理) これを λ とすれば topological entropy $e(X, \sigma)$ は, $\log \lambda$ であることは前に述べ

た通りだが、さらに、 $\lambda^n M^n$ ($n \geq 0$) は、 $n \rightarrow \infty$ のときに、収束して、その極限は、 $\alpha \beta$ と書ける。ここで、 α は M の右固有 vector, β は左固有 vector (共に、固有値 λ に対して) ただし、このためには、行列 M の他の固有値の絶対値が λ より小さい (このためには、 M のすべての entry が > 0 でありことは良く知られている) が、部分列をとる必要がある。従って、topological entropy の収束の order が指数的である。

既約成分への分解は次のような方法で保証される。簡単のため、subshift (X, σ) の Markov 性の order を 1 としよう。この structure matrix を M , structure set を W とする。二項関係 $\bar{W}$ を、

$$a \bar{W} b \iff \exists a_0 = a, a_1, \dots, a_k = b \in A \mid (a_j, a_{j+1}) \in W \quad (j=0, \dots, k-1)$$

と定義し、 $a, b \in A$ に対して、

$$a \sim b \iff a = b \text{ あるいは } a \bar{W} b \text{ かつ } b \bar{W} a$$

とすると、 $\sim$ は同値関係。これによる商空間 $A/\sim$ の元 $\bar{a}$ を、 A の部分集合と同一視すれば、各 $\bar{a} \in A/\sim$ に対して、

$(X \cap \bar{a}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ は既約であり、 $X \setminus \bigcup_{\bar{a} \in A/\sim} X \cap \bar{a}^{\mathbb{Z}}$ は、すべて transient である。

なお、 M の、 $\bar{a}$ -小行列を $M_{\bar{a}}$ と書けば、

$$\chi_M = \prod_{\bar{a} \in A/\sim} \chi_{M_{\bar{a}}}$$

ただし、一般に行列 N に対して、 χ_N はその固有多項式とする
従ってとくに、 (X, σ) の topological entropy は、その既約成分の entropy の最大値である

(B) 周期点の数と topological entropy

(X, σ) を Markov subshift とする。 M はその structure matrix, 簡単のため, order = 1 とすれば,

$$(4) \quad \#\{\omega \in X \mid \sigma^n \omega = \omega\} = \text{tr } M^n$$

である。 topological entropy が (2) (80) から計算されること
を思い出せば、既約な場合、(一般には、既約成分へ分解する)

$$(5) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \#\{\omega \in X \mid \sigma^n \omega = \omega\} = e(X, \sigma)$$

であることは明らか。

従って、一般の subshift (X, σ) を、 $(M(\pi_p(X)), \sigma)$ ($p \geq 0$)
によって近似すれば、

$$(6) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \#\{\omega \in X \mid \sigma^n \omega = \omega\} \leq e(X, \sigma)$$

が従う。

定義 一般の力学系 (Y, φ) が Markov とは、generator
が存在し、かつ、適当な generator に対して実現したとき、Markov
subshift であることという

Sinai の定理によつて、Anosov system は適当な条件、
例えば、Axiom A, の下に、Markov である。

定理 a) 一般の力学系 (Y, φ) が expansive であるならば, その topological entropy が有限であるかぎり, 周期点は高々指数的に増える.

b) とくに, (Y, φ) が Markov ならば, その増加の order は, topological entropy に一致する.

注. この結果は, R Bowen も出している (b)).

(C) Markov subshifts による近似

位相力学系自身としては, 上に述べた, 周期点の数, あるいは topological entropy 程度の粗い量ならば, 完全に近似できるが, 測度論的には, ergodicity と irreducibility, mixing と, 定義していないが, ~~後~~, uniform irreducibility との対応などの他に, 次のような問題があるが, まだ解答は得られていない.

(X, σ) を一般の subshift, $(X_p = M(M_{p+1}(X)), \sigma)$ をその Markov subshift による近似とし, irreducibility を仮定する. このとき, X 上の測度 μ が $h(\mu) = e(X, \sigma)$ をみたせば, 十分大きな p に対して, $e(X_p, \sigma)$ と $e(X, \sigma)$ が近く, X_p 上 $h(\mu_p) = e(X_p, \sigma)$ となる測度が一意であることから, 測度 μ と μ_p が近いことが予想される. 実際, 条件付測度に関する2次形式のようなものが評価されるが, その収束は open である.

§3 β 展開の実現

以下 $1 < \beta \leq 2$ と仮定しておくが, $\beta > 1$ に対しても全く同様である.

実数 t の β 展開とは,

$$(1) \quad t = a_{-1} + \sum_{n \geq 0} a_n \beta^{-n-1} \quad (a_{-1} \in \mathbb{N}, a_n = 0 \text{ or } 1)$$

であって, このままでは一意性がないから, 次のような手順で得られる表現のことである. 簡単のために, $t \in [0, 1)$ だけを考えることにしよう. 区間 $[0, 1)$ の変換 T_β を,

$$(2) \quad T_\beta t = (\beta t \text{ の少数部分})$$

によって定め, β 変換とよぶ. 後で自然に証明されるようにこの変換に対して, partition $\{[0, \beta^{-1}), [\beta^{-1}, 1)\}$ は, generator になるので, $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ への実現を考える. $[0, 1)$ から Ω への写像 π_β を, $(n \geq 0, t \in [0, 1))$

$$(3) \quad \pi_\beta(t)(n) = \begin{cases} 1 & T_\beta^n t \in [\beta^{-1}, 1) \text{ のとき} \\ 0 & T_\beta^n t \in [0, \beta^{-1}) \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する. ただし, $T_\beta^0 t = t$. π_β による像 $\pi_\beta([0, 1))$ は, Ω の中で, Borel set ではないが (実は G_δ -set), 閉ではないから, その閉包も考えることにし, X_β と書こう. Subshift (X_β, σ) と, “力学系” $([0, 1], T_\beta)$ は, 次の準同型で互に結ばれている. ただし, $T_\beta^n 1 = \sup_{0 \leq t < 1} T_\beta^n t$ と定義する. 写像 $p_\beta: X_\beta \rightarrow [0, 1]$ を,

$$p_\beta(\omega) = \sum_{n \geq 0} \omega(n) \beta^{-n-1}$$

によって定義すれば,

1) $p_\beta: X_\beta \rightarrow [0, 1]$ は全射で順序を保つ. (ここで, X_β の順序は辞書式のもの, 即ち, $\omega < \omega'$ とは, ある $n \geq 0$ が存在して, $\omega(k) = \omega'(k)$ ($k \leq n$), $\omega(n) < \omega'(n)$ のこと, また $[0, 1]$ の順序は通常のもの)

2) $p_\beta \circ \sigma = T_\beta \circ p_\beta$ (σ は Ω 上の shift 変換)

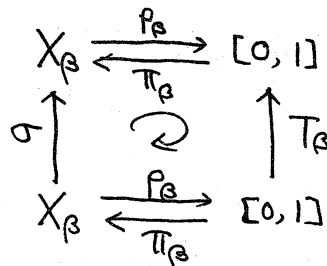
3) $\pi_\beta: [0, 1] \rightarrow X_\beta$ は, 単射で順序を保つ. (ここで,

$$\pi_\beta(1) = \max X_\beta$$

と約束する).

4) $\sigma \circ \pi_\beta = \pi_\beta \circ T_\beta$

5) $p_\beta \circ \sigma_\beta = \text{id}$.



上の 1)–5) の中で自明でないのは, 順序を保つことである. そして, この事実が, $\text{subshift}(X_\beta, \sigma)$ を調べる上で本質的な役割を果たす.

証明を与えておこう. π_β が順序を保つことが示されれば, p_β が順序を保つことは殆ど明らかである. $t \in [0, 1]$ とする.

$\pi_\beta(t)$ はその定義より, $a_j = \pi_\beta(t)(j)$ とするとき,

$$(4) \quad a_0 \beta^{-1} + \dots + a_n \beta^{-n-1} \leq t \quad (\forall n \geq 0).$$

をみたす. さらに, (1) をみたすような, $(a_0, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$

の中で最大である (辞書式の順序で) 実際, $\pi_\beta(t)$ の定義より任意の $n \geq 0$ に対して,

$$(5) \quad T_\beta^n t = \beta^n \left(t - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_\beta(t)(j) \beta^{j-1} \right)$$

であることはただちにわかる. ~~から~~, $(a_0, \dots, a_n)$ が存在して

④をみたし, $(a_0, \dots, a_n) > (\pi_\beta(t)(0), \dots, \pi_\beta(t)(n))$ ならば,

即ち, ある $0 \leq m \leq n$ が存在して, $a_j = \pi_\beta(t)(j)$ ($j < m$), $a_m = 1$

$\pi_\beta(t)(m) = 0$ ならば,

$$\begin{aligned} T_\beta^m t &= \beta^m \left(t - \sum_{j=0}^{m-1} \pi_\beta(t)(j) \beta^{j-1} \right) = \beta^m \left(t - \sum_{j=0}^{m-1} a_j \beta^{j-1} \right) \\ &\geq \beta^{-1} a_m = \beta^{-1} \end{aligned}$$

従って π_β の定義より, $\pi_\beta(t)(m) = 1$, これは矛盾である.

1) かつ, p_β による, $t \in [0, 1)$ の逆像は高々 2 点であることがわかる. 実際, $p_\beta(\omega) = t$ ならば, $\omega = \pi_\beta(t)$ または $\omega = \inf_{s > t} \pi_\beta(s)$ である. それ以外であり得ないことは, Ω において, $\pi_\beta([0, 1))$ の直積位相による閉包と, 辞書式順序に関する閉包とが一致することがわかる. さらに, もし両者が異なるならば, $\inf_{s > t} \pi_\beta(s) > \pi_\beta(t)$ であるから, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$\left(\inf_{s > t} \pi_\beta(s) \right)(k) = \pi_\beta(t) \quad (0 \leq k < n)$$

$$\left(\inf_{s > t} \pi_\beta(s) \right)(n) = 1 > 0 = \pi_\beta(t)(n)$$

従って, $p_\beta(\omega) \leq 1$ ($\forall \omega \in X_\beta$) に注意すれば,

$$1 = p_\beta(\sigma^n \pi_\beta(t)), \quad \sigma^n \left(\inf_{s > t} \pi_\beta(s) \right) = 000 \dots$$

ところで, $\pi_\beta(1) = \omega_\beta$ は, 唯一っ定ま, っているから,

$$(6) \quad \sigma^n \pi_\beta(t) = \omega_\beta$$

ゆえに,

(6) $\rho_\beta^{-1}(t)$ は, 高々2点で, 2点となりうるのは, 高々可算個の t だけであり, その t は (6) をみたす.

§4. $\mathcal{W}_n(X_\beta)$ の分類

β -展開に現れる長さ n の word $u = (a_0 \dots a_{n-1})$ に対して, “次に大きい word” を考えることができる. 2進法 ($\beta=2$) であれば, $a_{n-1}=0$ のとき, $u_2^+ = (a_0 \dots a_{n-2} 1)$ が “次に大きい” ものであり, $a_{n-1} = \dots = a_{n-1} = 1, a_k = 0$ ならば, $u_2^+ = (a_0 \dots a_{n-1} 10 \dots 0)$ である. 一般の β に対しては, $a_{n-1} = 0$ であっても “繰り上がり” が起こる. “繰り上がり” の起こる桁数によって, $\mathcal{W}_n(X_\beta)$ を分類する. 先ず

$$\mathcal{W}_n^0(X_\beta) = \{ (a_0 \dots a_{n-1}) \in \mathcal{W}_n(X_\beta) \mid a_{n-1} = 0, (a_0 \dots a_{n-2} 1) \in \mathcal{W}_n(X_\beta) \}$$

とおく. 即ち, “繰り上がり” が (最後の桁の変更のみで) 起こらない words 全体とする.

命題 1.
$$\mathcal{W}_n(X_\beta) = \bigcup_{k=0}^n \mathcal{W}_k^0(X_\beta) \cdot \omega_\beta[0, n-k)$$

ここで, $\omega_\beta[0, j) = (\omega(0), \dots, \omega(j-1)) \quad (j \geq 1).$

また, $\omega_\beta[0,0)$ は空語 ε , $\mathcal{W}_0^\circ(X_\beta) = \{\varepsilon\}$, 記号 $\cdot$ は, concatenation で, 一般に, $u = (a_1, \dots, a_i)$, $v = (b_1, \dots, b_j)$ のとき,

$$(7) \quad u \cdot v = (a_1, \dots, a_i, b_1, \dots, b_j)$$

と約束する. 空語 ε とは, 形式的には, concatenation $\cdot$ によって words 全体のつくる半群の単位元として導入される. 即ち,

$$u \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot u = u$$

証明. 最初に, $(a_0, \dots, a_{n-2}, 1) \in \mathcal{W}_n(X_\beta)$ ならば; 常に $(a_0, \dots, a_{n-2}, 0) \in \mathcal{W}_n(X_\beta)$ であることに注意しよう. 実際,

$$t = a_0 \beta^{-1} + \dots + a_{n-2} \beta^{-(n-1)}$$

の展開 $\pi_\beta(t)$ の最初の n 項が $a_0, \dots, a_{n-2}, 0$ である. 従って, $u = (a_0, \dots, a_{n-2}, 0) \in \mathcal{W}_n(X_\beta) \setminus \mathcal{W}_n^\circ(X_\beta)$ に対しては, “次に大きい word” u_β^* の末尾は 0 である. さらに, X_β 上で, 従って, $\mathcal{W}_n(X_\beta)$ 上で, β_1 によって $[0,1]$ から誘導される順序と, β_2 によって誘導される順序 (= 辞書式順序) が一致することから,

$$u_\beta^* = (b_0 \dots b_{k-2} 1 0 \dots 0)$$

の形をしていなければならない. さらに, u と u_β^* との間に $\mathcal{W}_n(X_\beta)$ の他の元は存在しないから, $b_0 = a_0, \dots, b_{k-2} = a_{k-2}$, そして, $a_{k-1} = 0$ でなければならない. ゆえに, この場合, u は $\mathcal{W}_k^\circ \cdot \omega_\beta[0, n-k)$ に属する. ただし, 例外があって, $u = \omega_\beta[0, n)$ の場合, これより大きな word は存在しないが, 上記の約束に従って, $k=0$ として, $\mathcal{W}_k^\circ \omega_\beta[0, n-k)$ に属する. この逆は

明らかである。

$$\text{系. a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \beta^{-n} \#(\mathcal{W}_n^0(X_\beta)) = \frac{1}{M_\beta} \quad M_\beta = \sum_{n \geq 0} (n+1) p_\beta(n) \beta^{n-1}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \beta^{-n} \#(\mathcal{W}_n(X_\beta)) = \frac{1}{M_\beta(1-\beta^{-1})}$$

c) とくに, subshift (X_β, σ) の topological entropy は $\log \beta$.

証明. $u \in \mathcal{W}_n(X_\beta)$ と, X_β の点 $\omega = u000\cdots$ とを混乱の起こらない限り同一視して, 例えば, $p_\beta(u)$ などの記法を使うことにする. $u \neq \omega_\beta[0, n)$ に対して,

$$(8) \quad R_\beta(u) = p_\beta(u_\beta^+) - p_\beta(u)$$

また, $u = \omega_\beta[0, n)$ のときは, $R_\beta(u) = 1 - p_\beta(u)$ とすれば, 仮定から,

$$(9) \quad \sum_{u \in \mathcal{W}_n(X_\beta)} R_\beta(u) = 1$$

である.

一方, $u \in \mathcal{W}_{n-k}^0 \cdot \omega_\beta[0, k)$ とすれば, 命題 1 の証明から明らかのように,

$$R_\beta(u) = \beta^{-(n-k)} (1 - p_\beta(\omega_\beta[0, k))).$$

ところで, $1 - p_\beta(\omega_\beta[0, k)) = \beta^{-k} T_\beta^k 1$ である. 従って (9)

より

$$(10) \quad \sum_{k=0}^n \beta^{-n} T_\beta^{n-k} 1 \times \#(\mathcal{W}_k^0(X_\beta)) = 1 \quad (\forall n \geq 0)$$

ただし, 空語も一語に数える. つまり, $\#(\mathcal{W}_0^0(X_\beta)) = \#\{\varepsilon\} = 1$

(10) 式に, t^n をかけ, $n \geq 0$ について和をとる. $|t| < 1$ ならば収束については保証されている. これを, $1 = p_\beta(\omega_\beta)$, あるいは

は,

$$1 - P_\beta(a_\beta[0, n]) = \beta^n T_\beta^n 1 = \sum_{k \geq n} a_\beta(k) \beta^{k-n}$$

に注意して整理すれば,

$$(11) \quad \sum_{n \geq 0} \beta^n N_n^0 t^n = (1 - \varphi_\beta(t))^{-1}$$

を得る. ここで,

$$(12) \quad \varphi_\beta(t) = \sum_{n \geq 0} w_\beta(n) \beta^{n-1} t^{n+1}$$

とあったが, この函数 φ_β は, $|t| < \beta$ で正則, $\varphi_\beta(t) = 1$ となるのは, $t = 1$ に限る. 従って, $(1 - \varphi_\beta(t))^{-1}$ は, meromorphic で, $t = 1$ に pole をもっただけだから,

$$(13) \quad \frac{1}{1 - \varphi_\beta(t)} - \frac{1}{\varphi'_\beta(1)(1-t)} \equiv \gamma_\beta(t)$$

は, $|t| < \beta$ で再び正則である. とくに, γ_β の任意階導函数は $|t| < \beta$ の compact 部分集合で有界. これから, $\gamma_\beta(t)$ の Fourier 係数 a_n

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_\beta(e^{it}) e^{-nit} dt$$

は, n について (任意の degree の) 多項式の order で 0 に収束する. とここで, $a_n = \beta^n N_n^0 - \frac{1}{\varphi'_\beta(1)}$ だから, 系 a) を得る. 一方, $N_n = \sum_{k=0}^n N_k^0$ は自明のことだから, $N_0 = 1$ と約束すれば,

$$(14) \quad \sum_{n \geq 0} N_n \beta^n t^n = \frac{1}{1 - \beta t} \sum_{n \geq 0} N_n^0 \beta^n t^n \quad (|t| < 1)$$

ゆえに, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n N_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n N_n^0 \sum_{j=0}^n \beta^j = (\varphi'_\beta(1)(1-\beta))^{-1} \quad \square$

§4. 集合族 $\{X_\beta\}$ の性質

命題 2 (i) $1 \leq \beta \leq 2$ ならば, $\pi_\beta([0,1)) \subset \pi_\omega([0,1))$

(ii) 任意の $\beta > 1$ に対して,

$$a) X_\beta = \overline{\bigcup_{\alpha < \beta} X_\alpha}, \quad b) X_\beta = \bigcap_{\alpha > \beta} X_\alpha$$

Remark (ii) a) において, 閉包をとることによって増加する点は, 高々可算である

証明 集合として, $\mathcal{W}_n(X_\alpha)$ は, $\alpha \rightarrow \beta$ のとき, $\mathcal{W}_n(X_\beta)$ に収束することは明らかである (n はとめておく). 一方, 下に述べる補題によって, (i) が導びかれる. または, 一般に

$$X = \bigcap_{p=0} \mathcal{M}(\mathcal{W}_p(X))$$

であったことを思い起こせばよい.

補題 $\pi_\beta([0,1)) = \{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid p_\beta(\sigma^n \omega) < 1 \ (\forall n \in \mathbb{N})\}$

証明 $\subset$ は明らか. 右辺の集合を Y_β とおく. $Y_\beta \ni \omega$ ならば, $p_\beta(\omega) = \beta^{-1}(\omega(0) + p_\beta(\sigma\omega)) < 1$, $p_\beta(\sigma\omega) < 1$ から,

$$(1) \quad \begin{cases} p_\beta(\omega) \in [0, \beta^{-1}) & (\omega(0)=0 \text{ の時}) \\ \quad \quad \quad \in [\beta^{-1}, 1) & (\omega(0)=1 \text{ の時}) \end{cases}$$

が従う. ここで, $\omega \in Y_\beta$ に対して, $\sigma^n \omega \in Y_\beta \ (\forall n \in \mathbb{N})$ は明らか. 従って, (1) から, $\pi_\beta(p_\beta(\omega))(0) = \omega(0)$ であることに注意すれば,

$$\omega(k) = (\sigma^k \omega)(0) = (\sigma^k \circ \pi_\beta \circ p_\beta)(\omega)(0) = (\pi_\beta \circ \pi_\beta^* \circ p_\beta)(\omega)(0)$$

$$\begin{aligned}
 &= (\pi_\beta \circ p_\beta)(\sigma^k \omega)(0) = (\pi_\beta \circ T_\beta^k \circ p_\beta)(\omega)(0) = (\sigma^k \circ \pi_\beta \circ p_\beta)(\omega)(0) \\
 &= \pi_\beta(p_\beta(\omega))(k)
 \end{aligned}$$

ゆえに, $\omega = \pi_\beta(p_\beta(\omega)) \in Y_\beta$. □

注意 上の証明では, $1 < \beta \leq 2$ を仮定していたが, $\beta > 2$ に対しても, symbol集合が, $\{0, 1\}$ から $\{0, 1, \dots, k\}$ (k は β を越えない最大の整数) に着えるだけで本質的には同じ. 従って, $\{X_\beta \mid \beta > 1\}$ は, 任意の有限な topological entropy を与える単調増大かつ (ii) の意味で “連続” な族を与えている.

なお, 前節で調べた, words の集合 $\mathcal{W}_n(X_\beta)$ も β について単調非減少な有限集合の族を与えている. その jump を与える β が後で見るように, subshift (X_β, σ) が Markov になる場合である.

§8. $\mathcal{M}(\mathcal{W}_n(X_\beta))$ の structure matrix とその固有値

β 展開に現れる words であるということから, $\mathcal{M}(\mathcal{W}_{p+1}(X_\beta))$ の structure matrix $M = M_{\beta,p}$ の固有値, 左及び右固有 vector を求めることができる.

命題 3. $\omega_\beta = \max X_\beta$ の “周期”, 即ち $\sigma^n \omega_\beta [0, p-n) (n > 0)$ $= \omega_\beta [0, p-n)$ となる最小の整数を, 存在すれば, β とおく.

存在しない場合は $q=p$ とする. このとき, $Mx = \lambda x, \lambda \neq 0$ ならば,

$$(i) \quad 1 \leq q < p \text{ のとき, } 1 = \sum_{k=0}^{q+1} \lambda^{-k-1} \omega_p(k)$$

$$q=p \text{ のとき, } 1 = \sum_{j=0}^p \lambda^{-j-1} \omega_p(j) + \lambda^{-p-1}$$

$$(ii) \quad x_{00\dots 0} = c \text{ とすれば, } u \in W_{p-k}^0 \cdot \omega_p[0, k) \text{ のとき,}$$

$$x_u = c \lambda^k \left(1 - \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{-j-1} \omega_p(j) \right)$$

Remark a) 左固有 vector に対しては, $yM = \lambda y, \lambda \neq 0$ のとき,

$$y_u = \sum_{j=0}^p \lambda^{-j-1} I_{(\sigma^j \omega_p > u)}$$

によって与えられる.

b) (i) から, 固有値 λ の絶対値は β 以下, (ii) から, 零でない固有値はすべて simple である. なお固有値 0 は一般には simple でない. 例えば, $\omega_p = 110011001100 \dots$ とする β に対しては, そうである.

証明. $u = (0, \dots, 0, \omega_p[0, k))$ のとき, $x_u = \xi_k$ とおくことにしよう. 先ず, $u \in W_{p-k}^0 \cdot \omega_p[0, k)$ ならば, $x_u = \xi_k$ であることを示そう. 今,

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \max \{j \mid u(j) \neq v(j)\} + 1 & (u \neq v \text{ の時}) \\ 0 & (u = v \text{ の時}) \end{cases}$$

とおく. $\delta(u, v)$ についての帰納法で, $u, v \in W_{p-k}^0 \cdot \omega_p[0, k)$ ならば, $x_u = x_v$ を示せば十分である. $\delta(u, v) = 0$ のときは trivial. $\delta(u, v) \leq j$ に対して成立すると仮定しよう.

従って, $u, v \in W_{p-k}^0 \cdot \omega_p[0, k]$, $\delta(u, v) = j+1$ とする. このとき, $u, v \in$, $u(i) = u(i+1)$, $v(i) = v(i+1)$ ($0 \leq i \leq p-1$) によって定義すれば, $u, v \in W_p$ ($a \in A$) のとき, $\delta(u, v) = j$ である. 一方 structure matrix の定義と, words の分解の方法から,

$$\lambda x_u = \sum_w M_{uw} x_w = x_{u_0} + \omega_p(k) x_{u_1}$$

となる. v についても同様の式を書き, 右辺を較べれば, 帰納法の仮定が使えるで, $\lambda \neq 0$ より, $x_u = x_v$ を得る. ゆえに,

$u \in W_{p-k}^0 \cdot \omega_p[0, k]$ ならば, $x_u = \xi_k$ である. 次に, ξ_k が (ii) で与えられることを示そう. $0 \leq k < p$ のときは, ξ_k の定義より,

$$\begin{aligned} \lambda \xi_k &= \lambda x_{0 \dots 0 \omega_p[0, k]} = x_{0 \dots 0 \omega_p[0, k+1]} + \omega_p(k) x_{0 \dots 0 \omega_p[0, k]} 0 \\ &= \xi_{k+1} + \omega_p(k) \xi_0 \end{aligned}$$

また, $k=p$ のときには,

$$\begin{aligned} \lambda \xi_p &= \lambda x_{\omega_p[0, p]} = x_{\omega_p[1, p+1]} + \omega_p(p) x_{\omega_p[0, p]} 0 \\ &= \xi_{p-1} + \omega_p(p) \xi_0 \end{aligned}$$

これから, (ii) を得る. さらに, $\xi_0 \neq 0$ と仮定してよいから, これら $p+1$ 個の方程式の解の存在の条件として, (i) が従うが, 詳しい計算は省略する.

注意 固有値 $\lambda=0$ に対する固有 vector も計算できるが, 必要ないので省略する.

Remark 容易にわかることだが, (i) の形の代数方程式

は, λ についての最小多項式 (四上) になっている. (ただし $\lambda = -1$ は根でありうるので, その場合は, $\lambda + 1$ で割った後の話であるか)

§6. Markovian β

定理 $\beta > 1$ とする. Subshift (X_β, σ) が Markov であることと, β に対して, 整数 $p \geq 0$ と, β を越えない非負整数 $a_0, \dots, a_p$ が存在して, 次の a) と b) をみたすことは同値である. ($a_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq \beta\}$ とする)

$$a) \quad 1 - \beta^{-p-1} = \sum_{j=0}^p a_j \beta^{-j-1}$$

$$b) \quad 1 - \beta^{-p-1} > \sum_{j=0}^p a_{j+k} \beta^{-j-1} \quad k=1, \dots, p$$

ただし, $a_n = a_{n+p+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) とする.

Remark 1) 以下の証明からわかるように, subshift (X_β, σ) の Markov 性と, $\omega_\beta = \max X_\beta$ が cyclic, 即ち, $\sigma^p \omega_\beta = \omega_\beta$ となる β が存在することとも, 同値である.

2) 定理の中の p , 及び 1) での p は, とともに, Markov 性の order と一致する. また, a), b) より, $a_p = 0$ が出る.

証明 前に与えたものと別の証明をちえておこう. 最初に, subshift (X_β, σ) が Markov であると仮定する. このとき, §0 で述べたように, $N_n = \#(W_n(X_\beta))$ は, その structure

matrix M の中 M^{n+p} から計算できる. 一方, 前節に述べたように, M の固有多項式はわかっている. 従って, §4 で求めた $N_n, n \geq 0$ の母函数 $\sum_{n \geq 0} N_n \beta^n t^n$ と, 固有多項式から導いたその変形 (有理函数となる) を比較することにより, (計算略)

$$\omega_\beta(p) = 0, \quad \omega_\beta(n+p+1) = \omega_\beta(n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

そして, §5. 命題 3 の (i) ($q=p$ とする) から,

$$1 - \beta^{-p-1} = \sum_{j=0}^p \omega_\beta(j) \beta^{j-1}$$

をみたす.

逆を示そう. β が, a) 及び b) をみたすならば, 先ず, 有限列 $a_0, \dots, a_p$ は, β に関する 1 の展開 $\pi_\beta(1)$ の最初の $p+1$ 項であることがわかる. 次に, a) を書き直せば, $1 = \sum_{j=0}^p a_j \beta^{j-1}$ であるから, $\pi_\beta(1)(n) = a_n$ となる. 従って とくに, $\omega_\beta = \pi_\beta(1)$ $= \max X_\beta$ は, cyclic である. $W = \mathcal{M}_{p+1}(X_\beta)$ とおいて,

$$X_\beta = \mathcal{M}(W)$$

を示せば, 逆の証明は終りである. ここで $\omega \in \mathcal{M}(W)$ ならば, $\omega[n, n+p+1) \in W \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ 従って,

$$\omega[n, n+p+1) \leq (a_0, \dots, a_p)$$

$$\text{とくに,} \quad \omega(n) \beta^{-1} + \dots + \omega(n+p) \beta^{-p-1} \leq a_0 \beta^{-1} + \dots + a_p \beta^{-p-1} \leq 1 - \beta^{-p-1}$$

$$\text{ゆえに,} \quad \rho_\beta(\omega) \leq 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \quad \text{等号は, } \sigma'' \omega = \omega_\beta \text{ による } \left(\sum_{n \geq 0} \right)$$

$$\text{よって, §4 の補題より, } \mathcal{M}(W) \setminus \rho_\beta \omega_{\beta|_{n \geq 0}} = \pi_\beta([0, 1])$$

従って, $\mathcal{M}(W) \subset X_\beta$. 逆の包含関係は自明である (証明略)

§7 Weak Bernoulli 性

ここでは, subshift (X_β, σ) の不変測度 μ_β (下で定義) をとり, (測度論的な) endomorphism $(X_\beta, \mu_\beta, \sigma)$ の自然な拡張である automorphism が weak Bernoulli となることの直接証明を与えよう. 次の定義は, generator を固定したときの, Ornstein の定義の言いかえである.

定義 (Ω, σ) を shift 変換とする. $(\Omega = A^{\mathbb{Z}})$ 上の不変測度 μ が weak Bernoulli であるとは,

$$(1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \sum_{u \in A^n} \sum_{v \in A^n} |\mu([u] \cap \sigma^{-n-k}[v]) - \mu([u])\mu([v])| = 0$$

ここで, $[u]$ は前と同様,

$$[u] = \{\omega \in \Omega \mid (\omega(0), \dots, \omega(n-1)) = u\}$$

で定義される. また, $E_\omega = \{\omega' \in \Omega \mid \omega' < \omega\}$ とする.

定理 X_β 上の測度 μ_β を次式で定義する.

$$(2) \quad \mu_\beta(E_\omega) = \sum_{n \geq 0} \beta^{n-1} \beta_\beta(\omega) \wedge \beta_\beta(\sigma^n \omega_\beta) / M_\beta$$

ただし, $\omega_\beta = \max X_\beta$, $M_\beta = \sum_{n \geq 0} (n+1) \omega_\beta(n) \beta^{n-1}$, $a \wedge b$ は a と b の最小値. このとき, μ_β の両側可算直積空間 Ω への拡張 $\hat{\mu}_\beta$ とすれば, weak Bernoulli である.

注意 (2) 式で定義した測度 μ_β は, Renyi の与えた区間 $[0, 1]$ 上絶対連続な不変測度の書き換えである. 直接の証明も, n についての和を, $\omega_\beta(n) = 0$ と $\omega_\beta(n) = 1$ の部分に分ければすぐにできる. (一般には, $0, 1, \dots, K$, $K = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \beta \leq k\}$)

証明は, §4 の結果を用いて, 測度を, symbol 乃至 words の個数におきかえることによって与えられる. 紙数の都合もあるので詳しい計算は省く.

補題 1 任意の $\omega \in X_\beta$ と, $u \in \mathcal{M}_\beta(X_\beta)$ に対して,

$$(3) \quad \mu_\beta([u] \cap E_\omega) = \beta^{-h} f_\beta(u) \rho_\beta(\omega \wedge \bar{u}) \\ - \sum_{n: \sigma^n \omega_\beta[0, n] = u} M_\beta^{-1} \beta^{-n-h} (\rho_\beta(\omega \wedge \bar{u}) - \rho_\beta(\omega \wedge \bar{u} \wedge \sigma^{nh} \omega_\beta))$$

ここで,

$$(4) \quad f_\beta(\omega) = M_\beta^{-1} \sum_{n \geq 0} \beta^{-n-1} I_{E_{\sigma^n \omega_\beta}}(\omega)$$

は, μ_β の, 測度 $d\rho_\beta$ に関する density である. また,

$$\bar{u} = \max \{ \omega \in X_\beta \mid u \cdot \omega \in X_\beta \}$$

とする.

証明は, $[u] \cap E_\omega = E_{u \cdot (\omega \wedge \bar{u})} \setminus E_u$ を使って, n についての和を, $\sigma^n \omega_\beta[0, n] \supseteq u$ の 3 つの場合に分ければよい.

補題 2 X_β 上の函数 φ に対して,

$$(S_\beta \varphi)(\omega) = \beta^{-1} \sum_{a \in \mathcal{A}} \varphi(a \cdot \omega)$$

とおくと, 非負作用素で,

1) 有界可測函数の通常の位相によって作る Banach 空間上の有界作用素,

2) $L^1(X_\beta, d\rho_\beta)$ 上の作用素として, contraction;

$$\int_{X_\beta} S\varphi(\omega) d\rho_\beta(\omega) = \int_{X_\beta} \varphi(\omega) d\rho_\beta(\omega) \quad (\forall \varphi \in L^1(X_\beta, d\rho_\beta))$$

3) $\forall \varphi \in L^1(X_\beta, d\mu_\beta), \forall \gamma \in L^\infty(X_\beta, d\mu_\beta)$ に対して,

$$\int_{X_\beta} (\gamma \circ S) \varphi d\mu_\beta = \int \gamma \cdot (S_\beta \varphi) d\mu_\beta$$

証明. 3)を示せば, 残りは明らかであろう. $\mu_\beta(a \cdot \omega) = a \cdot \beta + \beta \cdot \mu_\beta(\omega)$ に注意すれば,

$$\begin{aligned} \int_{X_\beta} \gamma(a\omega) \varphi(\omega) d\mu_\beta &= \sum_a \int_{X_\beta} \gamma(\omega) \varphi(a\omega) d\mu_\beta(a\omega) \\ &= \beta^{-1} \sum_a \int_{X_\beta} \gamma(\omega) \varphi(a\omega) d\mu_\beta(\omega) \\ &= \int_{X_\beta} \gamma(\omega) (S_\beta \varphi)(\omega) d\mu_\beta(\omega) \end{aligned}$$

注意. 一般の subshift に対して, 同様の作用素 S を定義できるが, 1) でさえ一般には成立しない. §4 で示したように, β -展開に関しては,

$$\left| \log \#(\mathcal{W}_n(X_\beta)) - n \log \beta \right| \leq \frac{(-\log M_\beta(1-\beta))}{n^k} \quad (\forall n \geq 0)$$

であるから, 1) が成立している.

補題 3 任意の $\varphi \in L^1(X_\beta, d\mu_\beta)$ に対して,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_\beta^k \varphi = c(\varphi) f_\beta \quad (\text{in } L^1(X_\beta, d\mu_\beta))$$

ここで, $c(\varphi) \in \mathbb{C}$, 従って

$$c(\varphi) = \int_{X_\beta} \varphi d\mu_\beta$$

さらに, この収束は, $\{\varphi \in L^1(X_\beta, d\mu_\beta) \mid \text{ess. sup } |\varphi| \leq 1\}$ に対して一様である.

証明の概略を述べておこう. 先ず, $N_n(u) = \#\{w \in \mathcal{W}_n(X_\beta) \mid$

$u, w \in W_{\text{fin}}(X_\beta) \uparrow$ とおくと、 $u \in W_{\text{fin}}(X_\beta)$ 。34 と全く同様にして、 $\lim \beta^n N_h(u)$ の収束がいえる。 φ が有限個の座標のみに依存する場合、 L^∞ -norm での一様収束が、これから従う。(実際は、 $S^k \varphi$ に現われる $W_k(X_\beta)$ 上の和で、 $W_{k+j}(X_\beta) \cdot \omega_\beta[0, j)$ 上の和の、 j についての和に直して、 j の大きい部分と小さい部分に分ければよい) 後は、 $L^1(X_\beta, df_\beta)$ の元 ε 、上のような φ で近似すればよい。

定理の証明 $\mu([u], E_\omega) = \mu_\beta([u] \cap \sigma^{-k} E_\omega)$ とおけば、これは、 $W_k(X_\beta) \times X_\beta$ 上の確率測度を与える。補題 1 から、 ω に関しては、 β に絶対連続であるから、

$$(5) \quad \int_{X_\beta} \mu([u], d\omega) \varphi \circ \sigma^k(\omega) = \mu_\beta([u]) \mu_\beta(\varphi)$$

を評価するときに、補題 2 の作用素 S を使って書き直して、補題 3 を使えば、(5) が、 $\|\varphi\| = 1$ に対して、一様に、さらにそれを $u \in W_k(X_\beta)$ について足しあわせた際、 k についても一様に、0 に収束することがわかる。従って、条件 (1) をみたす。

証明終。

後記

確率論的な立場から、symbolic dynamics あるいはその周辺の考え方がどの程度有効であるかわからないが、 β 変換

に関してわかっている性質を列挙してみた。Markov性の証明は、かなり簡略化されている。Weak Bernoulliであることの以前の証明は誤りで、例えば、最後の節に述べた方法によってできる。しかし、Smorodinskyの証明と比較すればわかるように、測度をはかるか、数えるかの違いだけであるかもしれない。