

多次元数値積分の試み

北大 理・物理

田中 一

北大 理・計算センター

長田博泰

§1. 序

数値積分には、種々の方法があるが、このような方法を多次元積分に用いると、積分区間内にとる分点の数が指数函数的に増大し、計算時間が長くなり実際には計算が不可能になる。

その困難を解決する方法としてモンテカルロ法がある。モンテカルロ法は精度をあげるため種々のテクニックが研究されている。

我々は、ガウスの数値積分法にモンテカルロ法を適用し、積分値を求めようと考え、種々検討した。以下、それについて述べる。

§2. 方法

$$n \text{次元積分} \quad \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

に対してガウスの数値積分を適用する。以下、議論を簡単にするために、変数変換 $x_i = (a+b)/2 - (a-b)t_i/2$ を行なう。積分 $I = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b F(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$ を考える。

ガウスの数値積分は I の値を

$$I \approx \sum_{i=1}^{m_1} \dots \sum_{i_n=1}^{m_n} F(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}) \omega_{i_1} \dots \omega_{i_n} \quad (1)$$

で与える。但し、 α_{ij} は m_i 次のルジャンドル多項式の零点、 ω_{ij} は α_{ij} に対する重みである。

$m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$ とすれば (1) の計算には m^n 個の零点の組が必要であり、これは次元が大きくなれば指数函数的に増大する。そこで我々は、 m^n 個の零点の組を全部は使わずに次の方法を用いる。

その方法は、 $1 \sim m$ の乱数 $i_1, \dots, i_n$ を発生させながら、 $(i_1, \dots, i_n)$ の n 組をきめ、 m^n 個の零点及び重みの中から、 $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n})$ と $(\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n})$ を N 個サンプリングし、 I の推定値として

$$I_1 = \frac{m^n \sum_{i=1}^N F(\bar{\alpha}_i) \bar{\omega}_i}{N} \quad \begin{aligned} \bar{\alpha}_i &= (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}) \\ \bar{\omega}_i &= \omega_{i_1} \dots \omega_{i_n} \end{aligned}$$

をとる。関数 F が積分区画内で有界であれば、大数の法則により $N \rightarrow \infty$ のとき、 $I_1 \rightarrow I$ が成立する。

§3. 誤差の評価

上記の方法の誤差は

$$\sigma_1(I) = \frac{1}{N} (m^n \sum_{i=1}^{m^n} F^2(\bar{\alpha}_i) \bar{\omega}_i^2 - (\sum_{i=1}^{m^n} F(\bar{\alpha}_i) \bar{\omega}_i)^2)$$

で与えられる。一方、モンテカルロ法による積分の誤差は

$$\sigma_2(I) = \frac{1}{N} (2^n \int_1^{\dots} \int_1^{\dots} F^2(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n - (\int_1^{\dots} \int_1^{\dots} F(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n)^2)$$

で与えられる。

$\sigma_1(I)$ と $\sigma_2(I)$ の比較を行なう。

$$D = \sigma_1(I) - \sigma_2(I)$$

$$= \frac{1}{N} (m^n \sum F^2(\bar{\alpha}_i) \bar{\omega}_i^2 - (\sum F(\bar{\alpha}_i) \bar{\omega}_i)^2 - 2^n \int_1^{\dots} \int_1^{\dots} F^2(\tau) d\tau + (\int_1^{\dots} \int_1^{\dots} F(\tau) d\tau)^2)$$

$\sum F(\bar{\alpha}_i) \bar{\omega}_i$ は $\int_1^{\dots} \int_1^{\dots} F(\tau) d\tau$ のガウスの近似積分であるから、

m を適当に選べば、その誤差は小さくできるであろう。

したがって

$$D \cong \frac{1}{N} (m^n \sum F^2(\bar{\alpha}_i) \bar{\omega}_i^2 - 2^n \int_1^{\dots} \int_1^{\dots} F^2(\tau) d\tau)$$

を調べればよい。

$$\int_1^{\dots} \int_1^{\dots} F^2(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{m^n} F^2(\bar{\alpha}_i) \bar{\omega}_i + E(F^2) \quad (E(F^2) \text{ は誤差項})$$

とおくと

$$D \cong \frac{1}{N} (m^n \sum F^2(\bar{\alpha}_i) \bar{\omega}_i^2 - 2^n (\sum F^2(\bar{\alpha}_i) \bar{\omega}_i + E(F^2)))$$

$$\cong \frac{1}{N} (m^n \sum F^2(\bar{\alpha}_i) \bar{\omega}_i - 2^n \sum F^2(\bar{\alpha}_i) \bar{\omega}_i) \quad (2)$$

重みは $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m = 2$ であるから、その平均は $2/m$ である。 $\bar{\omega}_i = \omega_{i_1} \dots \omega_{i_m}$ において $\omega_{i_1}, \omega_{i_m}$ は互いに独立に選ばれるから $\bar{\omega}_i$ の平均は $(2/m)^m$ である。

もし、 $\bar{\omega}_i$ の分布が平均 $(2/m)^m$ のまわりに充分密集していれば (2) の右辺は 0 に近いであろう。

そこで, $\{w_i = w_{i_1} \cdots w_{i_m}\} (i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, 2, \dots, m)$ についてその分布を調べてみた。結果は表-1の通りである。

$$\pm\sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}} \quad (\pm \text{は } \mu_3 \text{ と同等号に等しい})$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad \mu_i \text{ は } i \text{ 次の積率}$$

β_1 は平均に関する分布の非対称度をあらわし, β_2 は平均のまわりの密集度を表わす。

$m \backslash$	β_1	β_2
4	1.4094	4.8300
8	1.4099	4.5244
12	1.4475	4.6300
16	1.4721	4.7183

表-1

表-1の結果は, 平均のまわりの密集度が高く, 左側にやがんでいゝことを示している。

§ 4. 数値例

4.1 ガウス型数値積分の誤差

ガウス型数値積分の打ち切り誤差はその評価式があるが, 上の方法を用いるため,

$$P_{\text{simp}} \int_0^1 \cos p x dx = 1$$

をガウス型の数値積分した際の誤差を実際に計算してみた。結果は表-2の通りである。

$$P_{\text{simp}} \int_0^1 \cos p x dx \approx P_{\text{simp}} \sum_{i=1}^n \cos(p z_i) \cdot w_i$$

但し, z_i : n 次のルジャンドル多項式の零点

w_l : z_l に対する重み

$p=1, 2, 3, \dots$

$l=2, 3, 4, \dots$

p	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$	$l=6$	$l=7$	$l=8$	$l=9$	$l=10$	$l=11$	$l=12$	$l=13$	$l=14$	$l=15$	$l=16$	
13												-5	-6	-8		
12												-5	-6	-8	-9	
11												-5	-6	-7	-9	-10
10												-4	-5	-7	-8	-10
9												-4	-5	-6	-8	-9
8												-4	-5	-7	-8	-10
7												-3	-5	-6	-8	-9
6												-2	-4	-5	-7	-9
5												-3	-4	-6	-7	-9
4	1	0	-1	-2	-4	-5	-7	-9	-11	-13						
3	1	0	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13							
2	0	-2	-4	-6	-8	-10	-12	-15								
1	-2	-4	-6	-9	-12	-14	-17									

表 - 2

表は絶対誤差が 10^{-n} (n は表の数値) 程度であることを示している。したがって、上の関数をガウス型数値積分で 10^5 程度の誤差におさえたいならば $p=3, 6, 9$ のとき l をそれぞれ $6, 9, 12$ 程度にする必要があることを示している。

4.2 $(P/\sin p)^n \prod_{i=1}^m (\cos p x_i + 1)$ の積分

$$(P/\sin p)^n \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{i=1}^m (\cos p x_i + 1) dx_1 \cdots dx_m = 1$$

を我々の方法で積分した結果を示す。

$p=3, 6, 9$ とし各 p につき次元 n を 4, 8 とした。また零点の数(ルジャンドル多項式の次数)は 4.1 の事実に基づき $p=3, 6, 9$ に対しそれぞれ 6, 9, 12 個とした。

結果を図 1-6 に示す。図 5, 6 の結果は $l=12$ ではなく $l=9$ であるので注意したい。

なお、実際の計算では次のような方法をとっている。即ち

K 個(一定)ずつの和 $a_j = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K F(\bar{x}_i) \bar{\omega}_i / K$ ($j=1, 2, \dots$)

を計算し、 $s_k = (a_1 + \dots + a_k) / k$ ($k=1, 2, \dots$)

をもって $K \cdot k$ 個のサンプリングによる積分値とする。

これは、無限級数に対するチェザロの総和法の適用である。

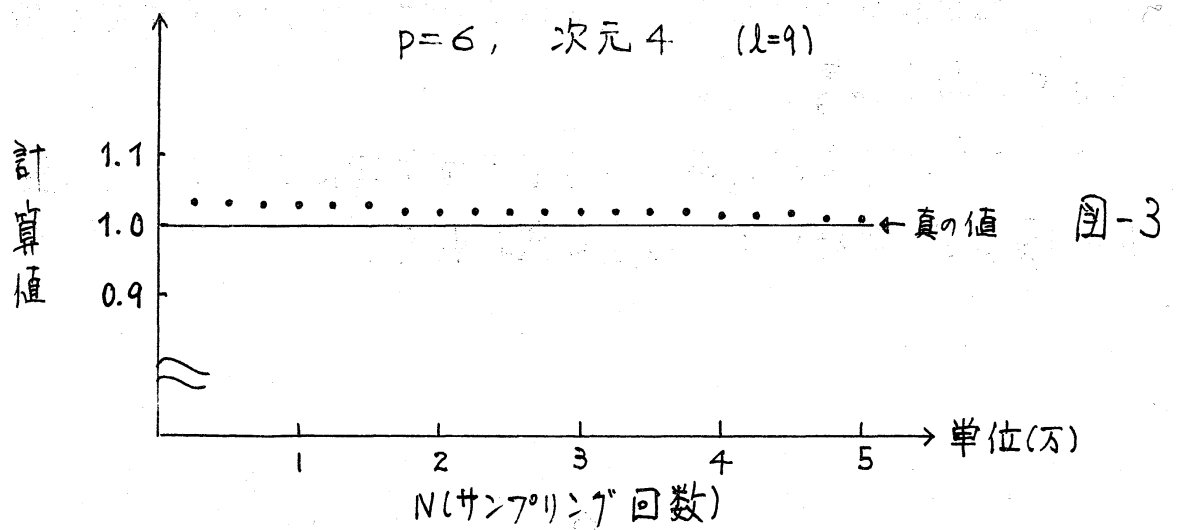
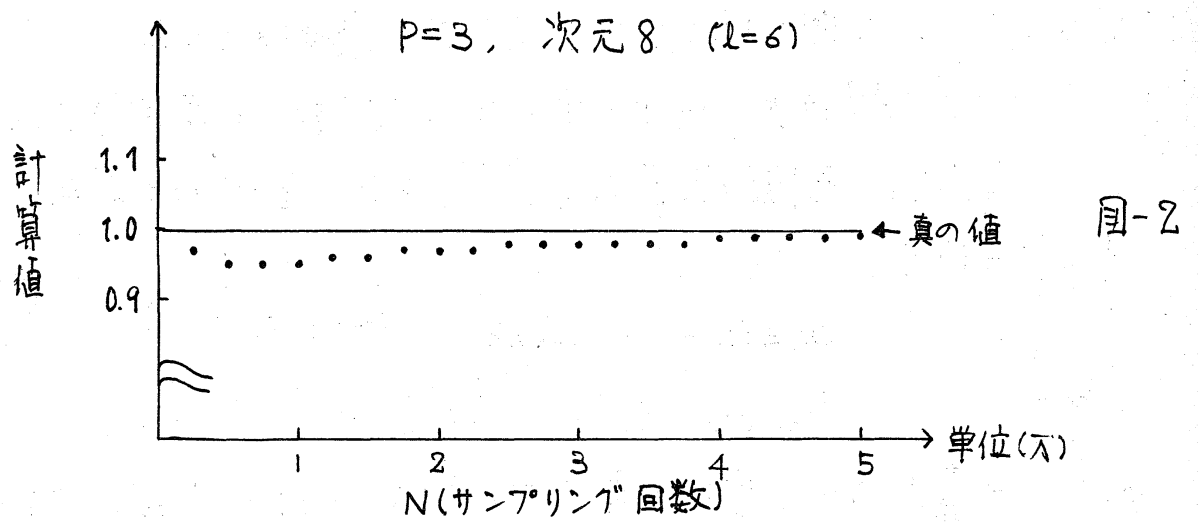
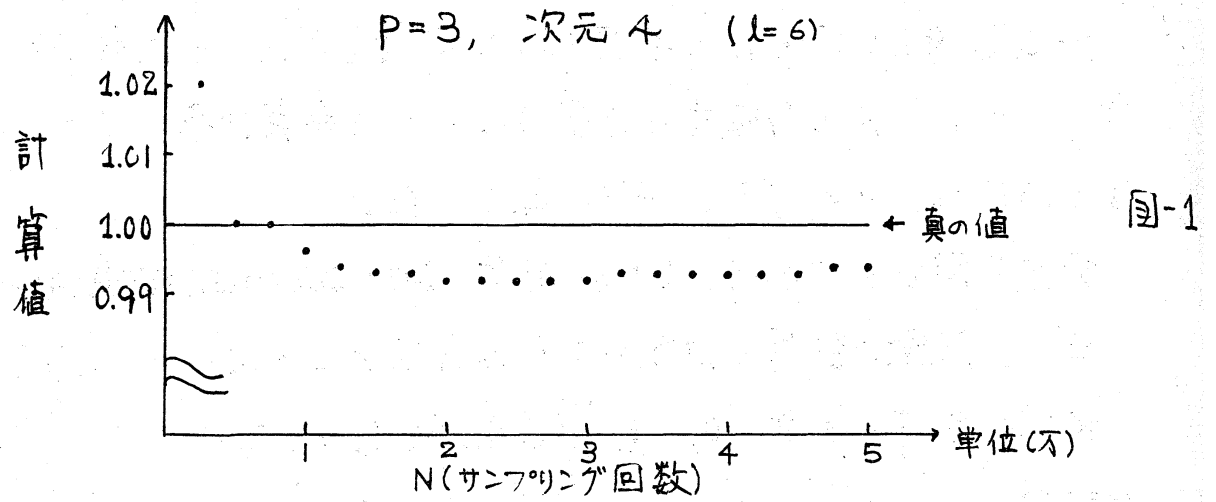
この方法は、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ があつたとき、部分和の数列 $\{s_n\}$ を作り、

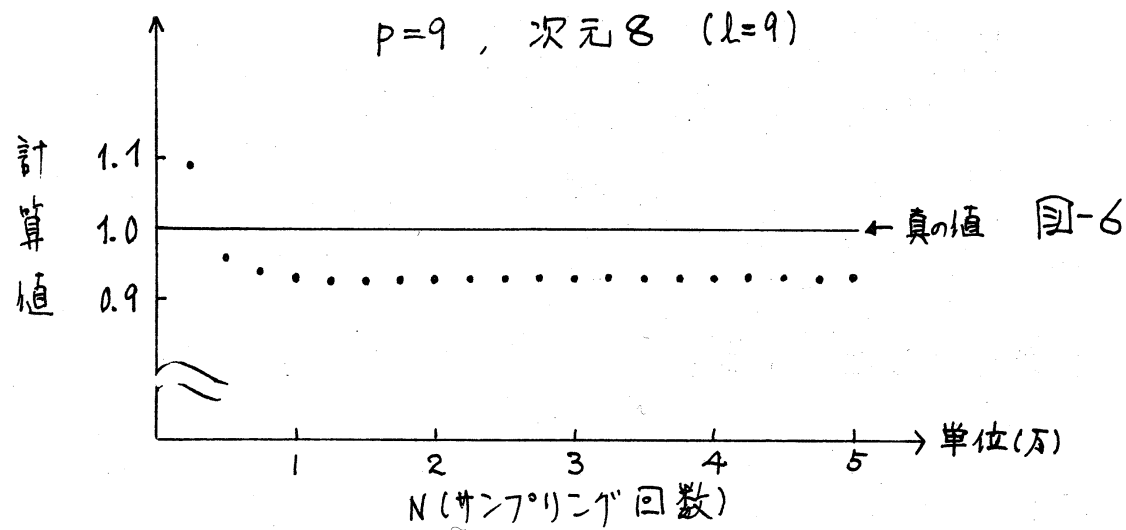
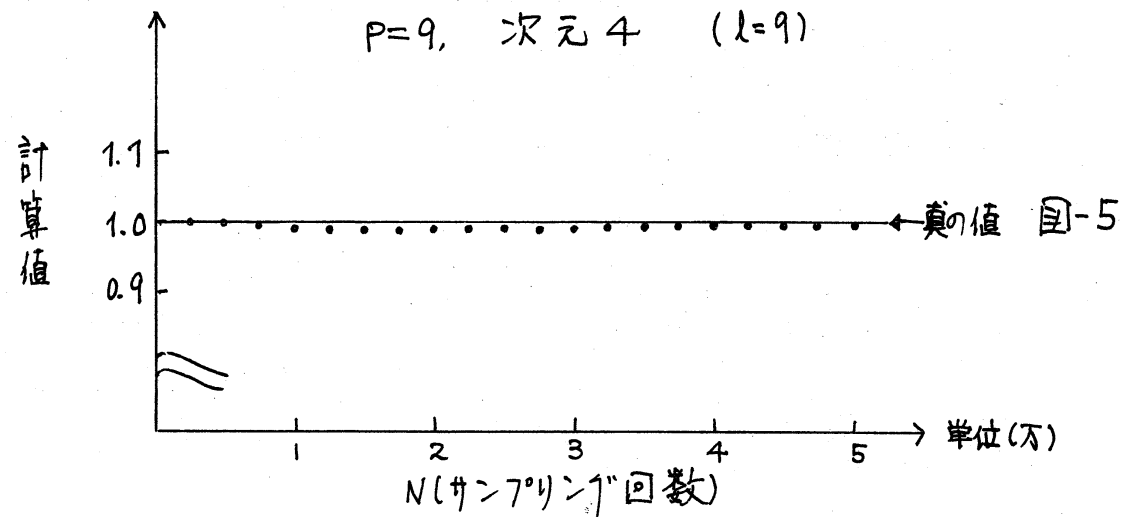
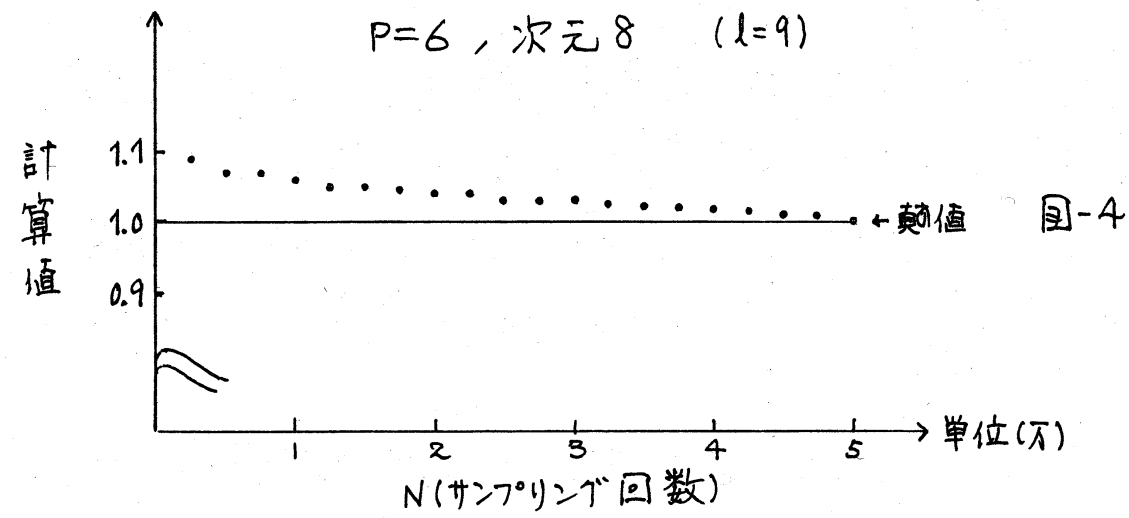
$$\sigma_n = (s_1 + \dots + s_n) / n \quad (n=1, 2, \dots)$$

とすると $\lim \sigma_n = \sigma$

なるとき $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ はチェザロの意味での和をもつというものである。 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が和をもつとき、それはまたチェザロの意味でも和をもち、両者は等しい。

このようにしておけば、バウウキが平均化されて、その変化の傾向がつかみやすくなると思われる。





§5. 結論

モンテカルロ法計算の効率 は 次のように定義されるは献
2]。即ち、同一の問題に対し、方法1と方法2のモンテカル
ロ計算があったとき、その計算時間を n_1, n_2 、結果の分散を σ_1, σ_2 とすると、方法2の方法1に対する効率は $n_1\sigma_1/n_2\sigma_2$ で
ある。

したがって、我々の方法と乱数による積分法を比較するた
めに $n\sigma$ を調べてみる必要がある。§4の数値例について
次の通りであった。

(1) 時間×分散の比較

(a) 乱数による積分の場合

次元 \ P	3	6	9
4	0.015	0.021	0.016
8	0.096	0.138	0.091

 $N = 5 \times 10^4$ 個

(b) 我々の方法

次元 \ P	3	6	9
4	0.0065	0.0028	0.00187
8	0.050	0.0137	0.0028

 $N = 5 \times 10^4$ 個

($l=6$) ($l=9$) ($l=12$)

(2) 分散の比較

(a) 乱数による積分の場合

P 次元	3	6	9
4	0.0080	0.0093	0.0081
8	0.019	0.023	0.019

$$N = 10^4 \times 5 \text{ 個}$$

(b) 我々の方法

P 元	3	6	9
4	0.0097	0.0061	0.0118
8	0.025	0.012	0.0333

$$N = 5 \times 10^4 \text{ 個}$$
 $(l=6) \quad (l=9) \quad (l=12)$

以上, (1), (2)の比較からわかるように, 我々の方法は乱数による積分よりすぐれたものと結論することができる。

被積分関数の値の計算時間がここに与えられた^に
 ために $\epsilon > 0$ と取ることを実際であるから、そのような場
 合には、一定の計算時間 τ ありと仮定することが必要である。

文献

1. A.H. Stroud, Don Secrest: Gaussian Quadrature Formulas
2. 津田孝夫: モンテカルロ法とシミュレーション