

概均質ベクトル空間の代数体上の分類について

京都大学人間・環境学研究科
齋藤 裕

この小論においては、前半において代数群の Galois cohomology について復習した後、後半において、regular irreducible reduced な prehomogeneous vector space の Galois cohomology を用いた代数体上の分類について述べる。

§1. Galois cohomology

1.1. Definition

$\mathcal{G}$ を profinite group とし、 $\mathcal{G}$ が群 A に連続に作用しているものとする。 A には離散位相を考える。以下では主として、標数 0 の体 F と F のガロア拡大 L 、及び F 上の代数群 G にたいし、 $\mathcal{G} = \text{Gal}(L/F)$ 、 $A = G(L)$ の場合を考える。 $\text{Gal}(L/F)$ の位相は Krull 位相を考える。

$\mathcal{G}$ から A への連続写像 $\sigma(\in \mathcal{G}) \mapsto a_\sigma(\in A)$ を (a_σ) で表し、それが条件

$$a_{\sigma\tau} = a_\sigma^\sigma a_\tau \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{G}$$

を満たすとき、 $\mathcal{G}$ の A に値を持つ 1-cocycle であるといい、その 1-cocycle 全体を $Z^1(\mathcal{G}, A)$ で表す。 $Z^1(\mathcal{G}, A)$ における同値関係 $\sim$ を

$$(a_\sigma) \sim (b_\sigma) \iff \exists h \in A \text{ such that } a_\sigma = h^{-1} b_\sigma h^\sigma \quad \forall \sigma \in \mathcal{G}$$

で定める。このとき、0-次と1-次の cohomology が次のように定義される。

Definition 1.1.1.

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{G}, G) &= A^\mathcal{G} = \{ x \in A \mid {}^\sigma x = x \}, \\ H^1(\mathcal{G}, A) &= Z^1(\mathcal{G}, A) / \sim. \end{aligned}$$

また、 A がアーベル群のときには 2-次の cohomology が次のように定義される。 $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ から A への連続な写像 $(\sigma, \tau) \mapsto a_{\sigma, \tau}$ (これを $(a_{\sigma, \tau})$ と記す) が、

$${}^\rho a_{\sigma, \tau} a_{\rho\sigma, \tau}^{-1} a_{\rho, \sigma\tau}^{-1} a_{\rho, \sigma}^{-1} = 1 \quad \forall \rho, \sigma, \tau \in \mathcal{G}$$

を満たすとき、 $(a_{\sigma, \tau})$ は、2-cocycle であるといい、この集合を $Z^2(\mathcal{G}, A)$ で表す。また 2-cocycle で、 $\mathcal{G}$ から A への連続写像 $\sigma \mapsto c_\sigma$ を用いて

$$a_{\sigma, \tau} = c_{\sigma\tau} c_\sigma^{-1} ({}^\sigma c_\tau)^{-1}$$

と表されるものを、2-coboundary といい、その全体を、 $B^2(\mathcal{G}, A)$ で表す。2-cocycle 全体 $Z^2(\mathcal{G}, A)$ は、自然に群の構造を持ち、 $B^2(\mathcal{G}, A)$ はその部分群となる。このとき 2 次の cohomology が

Definition 1.1.2.

$$H^2(\mathcal{G}, A) = Z^2(\mathcal{G}, A) / B^2(\mathcal{G}, A)$$

で定義される。

これらについて容易に

$$H^i(\mathcal{G}, A) = \varinjlim_U H^i(\mathcal{G}/U, A^U)$$

が分かる。ここで、 U は $\mathcal{G}$ の開正規部分群全体を動く。また、 $\mathcal{G} = \text{Gal}(L/F)$ のとき、 $H^i(\mathcal{G}, A)$ を Galois cohomology と呼び、

$$H^i(L/F, A) = H^i(\mathcal{G}, A)$$

と記す。また、 $L = \bar{F}$ (F の代数閉包)、 $A = G(\bar{F})$ であるとき

$$H^i(F, G) = H^i(\bar{F}/F, G(\bar{F}))$$

と記す。

1.2. twist and exact sequences

この節では、Galois cohomology を調べる際に重要な、作用の twist と cohomology の exact sequence について述べる。

$\mathcal{G}$ -group A が $\mathcal{G}$ -set E に作用しており、 $\mathcal{G}$ の作用に関して

$${}^\sigma(xy) = {}^\sigma x {}^\sigma y, \quad x \in \mathcal{G}, y \in E$$

を満たしているものとする。 $a = (a_\sigma)$ を $Z^1(\mathcal{G}, A)$ の元とすると、 $\mathcal{G}$ -group ${}_a A$ と $\mathcal{G}$ -set ${}_a E$ が次のように定義する。集合としては ${}_a A = A$, ${}_a E = E$ で、作用を

$$\begin{aligned} \langle {}^\sigma \rangle x &= a_\sigma {}^\sigma x a_\sigma^{-1}, \quad x \in {}_a A, \\ \langle {}^\sigma \rangle y &= a_\sigma y, \quad y \in {}_a E \end{aligned}$$

で定義する。このとき再び

$$\langle {}^\sigma \rangle (xy) = \langle {}^\sigma \rangle x \langle {}^\sigma \rangle y$$

が成り立つ。 ${}_a A$, ${}_a E$ を、 A , E の 1-cocycle a による twist という。これについて次の命題が成り立つ。

Proposition 1.2.1. $Z^1(\mathcal{G}, {}_a A)$ から $Z^1(\mathcal{G}, A)$ への写像 $t_a((b_\sigma)) = (b_\sigma a_\sigma)$ は、bijection

$$t_a: Z^1(\mathcal{G}, {}_a A) \rightarrow Z^1(\mathcal{G}, A),$$

$$\tau_a: H^1(\mathcal{G}, {}_a A) \rightarrow H^1(\mathcal{G}, A)$$

を導く。

$u: A \rightarrow B$ を、 $\mathcal{G}$ -group A から $\mathcal{G}$ -group B への $\mathcal{G}$ -homomorphism とする。 $a \in Z^1(\mathcal{G}, A)$ から u により自然に定まる $Z^1(\mathcal{G}, B)$ の元 $u(a)$ を b で表すと、 $\mathcal{G}$ -homomorphism

$$u': {}_a A \rightarrow {}_b B$$

が得られる。 u, u' は、自然に写像

$$v: H^1(\mathcal{G}, A) \rightarrow H^1(\mathcal{G}, B),$$

$$v': H^1(\mathcal{G}, {}_a A) \rightarrow H^1(\mathcal{G}, {}_b B)$$

を導くが、このとき次の図式は可換になる。

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{G}, {}_a A) & \xrightarrow{v} & H^1(\mathcal{G}, {}_b B) \\ \downarrow \tau_a & & \downarrow \tau_b \\ H^1(\mathcal{G}, A) & \xrightarrow{v'} & H^1(\mathcal{G}, B) \end{array}$$

これから次の bijection が得られる。

$$\tau_a: \ker v' \rightarrow v^{-1}(v(\tilde{a}))$$

ここで、 $\tilde{a}$ は $H^1(\mathcal{G}, A)$ における 1-cocycle a の類であり、 $\ker v'$ は $H^1(\mathcal{G}, B)$ における trivial な類の v' による逆像を表す。

次に、cohomology の exact sequence について述べる。1-次の cohomology は群ではないので、一般には trivial な類を指定した pointed set としての exact sequence である。状況に応じて次の三つの場合に分けて考える。

(1) $\mathcal{G}$ -group B とその sub $\mathcal{G}$ -group A に対し、次の exact sequence が成立する。

$$1 \rightarrow H^0(\mathcal{G}, A) \rightarrow H^0(\mathcal{G}, B) \rightarrow H^0(\mathcal{G}, B/A) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{G}, A) \rightarrow H^1(\mathcal{G}, B)$$

ここで、 δ は次のように定義される。 $c \in H^0(\mathcal{G}, B/A)$ とし、 $c = xA$ ($x \in B$) とすると、 c が $\mathcal{G}$ で不変であることから、

$$a_\sigma = x^{-1}\sigma x \in A, \quad \sigma \in \mathcal{G}$$

であり、 (a_σ) は $Z^1(\mathcal{G}, A)$ の元を定めるが。その $H^1(\mathcal{G}, A)$ における類を $\tilde{a}$ とするとき

$$\delta(c) = \tilde{a}$$

と定義する。また、 $H^1(\mathcal{G}, A)$ における完全性から次の bijection

$$A^{\mathcal{G}} \backslash (B/A)^{\mathcal{G}} \longleftrightarrow \ker(\lambda: H^1(\mathcal{G}, A) \rightarrow H^1(\mathcal{G}, B))$$

従う。

(2) (1) で、 A が B の正規部分群である場合は、次の exact sequence が成り立つ。

$$1 \rightarrow H^0(\mathcal{G}, A) \rightarrow H^0(\mathcal{G}, B) \rightarrow H^0(\mathcal{G}, B/A) \rightarrow H^1(\mathcal{G}, A) \rightarrow H^1(\mathcal{G}, B) \rightarrow H^1(\mathcal{G}, B/A)$$

この場合、 $(B/A)^{\mathcal{G}}$ の $H^1(\mathcal{G}, A)$ への作用を次のように定義することができる。 $c \in (B/A)^{\mathcal{G}}$ に対し $x \in B$ を (1) のようにとり、 $(a_{\sigma}) \in Z^1(\mathcal{G}, A)$ に対し、

$$a'_{\sigma} = x^{-1} a_{\sigma}^{\sigma} x \quad \sigma \in \mathcal{G}$$

とおけば、 $(a'_{\sigma}) \in Z^1(\mathcal{G}, A)$ ($x^{-1} a_{\sigma}^{\sigma} x = x^{-1} a_{\sigma} x x^{-1\sigma} x \in A$) で、 (a'_{σ}) の定める類を $\tilde{a}c$ で表すことにすれば、これは $(B/A)^{\mathcal{G}}$ の $H^1(\mathcal{G}, A)$ への作用を定める。上の $H^1(\mathcal{G}, A)$ から $H^1(\mathcal{G}, B)$ への写像を λ で表すと、次のことがわかる。

(a) $\delta(c) = 1c$ $c \in (B/A)^{\mathcal{G}}$ 。ここで 1 は $H^1(\mathcal{G}, A)$ の trivial な類を表す。

(b) $\tilde{a}, \tilde{a}' \in H^1(\mathcal{G}, A)$ について

$$\lambda(\tilde{a}) = \lambda(\tilde{a}') \iff \tilde{a} = \tilde{a}'c \text{ for } c \in (B/A)^{\mathcal{G}}.$$

(c) $\tilde{a}c = \tilde{a} \iff c \in \text{Im}(H^0(\mathcal{G}, {}_a B) \rightarrow H^0(\mathcal{G}, B/A))$ 。

上の $H^1(\mathcal{G}, B)$ から $H^1(\mathcal{G}, B/A)$ への写像を μ で表すことにすると、これから次 bijection がわかる。

$$\ker(\mu: H^1(\mathcal{G}, B) \rightarrow H^1(\mathcal{G}, B/A)) \longleftrightarrow H^1(\mathcal{G}, A)/(B/A)^{\mathcal{G}}$$

また $b \in Z^1(\mathcal{G}, B)$ による twist を考えることにより、次の bijection が得られる。

$$\mu^{-1}\mu(\tilde{b}) \longleftrightarrow H^1(\mathcal{G}, {}_b A)/{}_b(B/A)^{\mathcal{G}}$$

A は B の正規部分群なので、上と同様にして ${}_b A$ が定義できる。

(3) A が B の中心に含まれている場合、次が exact になる。

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow H^0(\mathcal{G}, A) \rightarrow H^0(\mathcal{G}, B) \rightarrow H^0(\mathcal{G}, B/A) \rightarrow H^1(\mathcal{G}, A) \rightarrow H^1(\mathcal{G}, B) \\ \rightarrow H^1(\mathcal{G}, B/A) \xrightarrow{\Delta} H^2(\mathcal{G}, A) \end{aligned}$$

Δ は $(c_{\sigma}) \in Z^1(\mathcal{G}, B/A)$ に対し 2-cocycle

$$(a_{\sigma, \tau}), \quad a_{\sigma, \tau} = b_{\sigma}^{\sigma} b_{\tau} b_{\sigma\tau}^{-1}$$

を対応させることにより得られる。

ここで $H^1(\mathcal{G}, A)$ の $H^1(\mathcal{G}, B)$ への作用を次のように定義できる。

$$a = (a_{\sigma}) \in Z^1(\mathcal{G}, A), \quad b = (b_{\sigma}) \in Z^1(\mathcal{G}, B)$$

に対し $(a_\sigma b_\sigma) \in Z^1(\mathcal{G}, B)$ であり、この類を $\tilde{a}\tilde{b}$ と定めると、これによりアーベル群 $H^1(\mathcal{G}, A)$ が $H^1(\mathcal{G}, B)$ に作用する。この作用に関して

$$\mu(\tilde{b}) = \mu(\tilde{b}') \iff \tilde{a}\tilde{b} = \tilde{b}' \text{ for } \tilde{a} \in H^1(\mathcal{G}, A)$$

また A が B の中心に含まれているので B/A が自然に B に作用している。これにより $c \in Z^1(\mathcal{G}, B/A)$ に対し、exact sequence

$$1 \rightarrow {}_c A \rightarrow {}_c B \rightarrow {}_c(B/A) \rightarrow 1$$

が得られる。ここで A が B の中心に含まれることから、 $c = (c_\sigma)$ に対し、 $c_\sigma = b_\sigma A$ となる $b_\sigma \in B$ をとり、

$$\langle \sigma \rangle x = b_\sigma {}^\sigma x b_\sigma^{-1}$$

とすれば、これは b_σ の選び方によらずに定まり、 ${}_c B$, ${}_c A$ が上と同様に定義できる。また ${}_c A = A$ であることも分かる。これから写像

$$\Delta_c: H^1(\mathcal{G}, {}_c(B/A)) \rightarrow H^2(\mathcal{G}, A)$$

が得られるが、図式

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{G}, {}_c(B/A)) & \xrightarrow{\Delta_c} & H^2(\mathcal{G}, A) \\ \downarrow \tau_c & \nearrow & \\ H^1(\mathcal{G}, B/A) & & \end{array}$$

において、

$$\Delta \tau_c(\gamma') = \Delta_c(\gamma') + \Delta(\tilde{c}), \quad \gamma' \in H^1(\mathcal{G}, {}_c(B/A))$$

が成り立ち、これより次の bijection を得る。

$$\Delta^{-1}(\Delta(\tilde{c})) \longleftrightarrow H^1(\mathcal{G}, A) \setminus H^1(\mathcal{G}, {}_c B)$$

1.3. Galois cohomology of algebraic groups over local and global fields

局所体上の代数群の Galois cohomology については次の定理が基本的である。

Theorem 1.3.1. F は non-archimedean な局所体とする。

(1) G を F 上の semi-simple, simply connected な代数群とする。このとき

$$H^1(F, G) = \{1\}$$

(2) semi-simple, adjoint な G に対し、 $\tilde{G}$ をその simply connected covering とし、 Z を $\tilde{G}$ の中心とする。このとき

$$H^1(F, G) \simeq H^2(F, Z)$$

F が代数体であるとき、 F の素点 v に対し、 F_v で F の v における completion を表す。 v の $\bar{F}$ への延長の分解群と $\text{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$ を同一視することにより自然な写像

$$H^1(F, G) \rightarrow \prod_v H^1(F_v, G)$$

が得られるが、これについて次が成り立つ。

Theorem 1.3.2.(Hasse principle) F 上の代数群 G が semi-simple, simply connected または adjoint とする。このとき写像

$$H^1(F, G) \rightarrow \prod_v H^1(F_v, G)$$

は injective である。特に simply connected の場合には次が bijective になる。

$$H^1(F, G) \rightarrow \prod_{v \in \Sigma_\infty} H^1(F_v, G)$$

ここで、 Σ_∞ は F の無限素点全体の集合を表す。

1.4. Examples

$$(1) H^1(F, GL_n) = H^1(F, D^\times) = 1$$

ここで D は、 F 上の central simple algebra。また次の exact sequence

$$1 \rightarrow SL_n \rightarrow GL_n \rightarrow G_m \rightarrow 1$$

より

$$GL_n(F) \rightarrow F^\times \rightarrow H^1(F, SL_n) \rightarrow H^1(F, GL_n)$$

が得られ、

$$H^1(F, SL_n) = 1$$

が得られる。

$$(2) H^1(F, \mu_n) \simeq F^\times / F^{\times n}$$

exact sequence

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \bar{F}^\times \rightarrow \bar{F}^\times \rightarrow 1$$

$$x \mapsto x^n$$

から導かれる exact sequence

$$F^\times \rightarrow F^\times \rightarrow H^1(F, \mu_n) \rightarrow H^1(F, GL_1)$$

$$x \mapsto x^n$$

より得られる。

$$(3) H^1(F, Sp_n) = 1$$

$$(4) H^1(F, PGL_n)$$

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow SL_n \rightarrow PSL_n \rightarrow 1$$

より injection

$$H^1(F, PSL_n) \rightarrow H^2(F, \mu_n)$$

が得られるが、これは F が、局所体または代数体のときには同型となる。 $H^2(F, \mu_n)$ は、 F 上の index $m(m|n)$ の division algebra を分類するが、 $c \in Z^1(\mathcal{G}, PSL_n(\bar{F}))$ とし、 $\Delta(c)$ の決める division algebra を D とすると

$${}_c SL_n = SL_{n/m}(D)$$

が成り立つ。

$$(5) H^1(F, O(f)), H^1(F, SO(f))$$

正則な対称行列 $S \in M_n(F)$ によって決まる二次形式

$$f(v) = {}^t v S v$$

にたいし、 $O(f)$, $SO(f)$ で、それぞれその orthogonal group、special orthogonal group を表す。他の正則な対称行列 $T \in M_n(F)$ に対応する二次形式 $h(v) = {}^t v T v$ に対し、

$${}^t g S g = T$$

なる正則行列 g をとり、 $a = (a_\sigma)$, $a_\sigma = g^{-1\sigma} g$ とおくと、 a は $Z^1(\mathcal{G}, O(f)(\bar{F}))$ の元を定め、対応

$$h \mapsto a$$

は bijection

$$\{ \text{正則な二次形式の同値類} \} \longleftrightarrow H^1(F, O(f))$$

を与える。また exact sequence

$$1 \rightarrow SO(f) \rightarrow O(f) \rightarrow \mu_2 \rightarrow 1$$

から、exact sequence

$$O(f)(F) \rightarrow \mu_2 \rightarrow H^1(F, SO(f)) \rightarrow H^1(F, O(f)) \rightarrow H^1(F, \mu_2)$$

が得られるが、写像 $\mu: H^1(F, O(f)) \rightarrow H^1(F, \mu_2)$ は、

$$\mu(\tilde{a}) = \text{disc}(f)/\text{disc}(h) \in F^\times/F^{\times 2}$$

で与えられる。ここで $\text{disc}(f)$ は $\det T$ の $F^\times/F^{\times 2}$ での類を表す。従って

$$\{ \text{正則な二次形式 } h \text{ で } \text{disc}(h) = \text{disc}(f) \text{ となるものの同値類} \}$$

$$\longleftrightarrow H^1(F, SO(f))$$

が分かる。また exact sequence

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow Spin(f) \rightarrow SO(f) \rightarrow 1$$

から、exact sequence

$$H^1(F, Spin(f)) \longrightarrow H^1(F, SO(f)) \xrightarrow{\delta} H^2(F, \mu_2)$$

が得られるが、 F が局所体の場合は、 δ は $a \longleftrightarrow h$ とすると

$$\delta(a) = \varepsilon_v(h)/\varepsilon_v(f)$$

で与えられる (cf. [S])。ここで $\varepsilon_v(h)$ は、 h の Hasse invariant で、次の様に与えられる。正則行列 g を ${}^t g S g$ が、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ を対角成分に持つ対角行列になるように選んだとき

$$\varepsilon_v(f) = \prod_{i < j} (a_i, a_j)_v.$$

ただし、 $(a, b)_v$ ($a, b \in F^\times$) は、 a, b の Hilbert symbol である。ある F が non-archimedean な場合には、上の写像は bijective である。

F が代数体の場合にも、図式

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F, Spin(f)) & \longrightarrow & H^1(F, SO(f)) & \xrightarrow{\delta} & H^2(F, \mu_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_v H^1(F_v, Spin(f)) & \longrightarrow & \prod_v H^1(F_v, SO(f)) & \longrightarrow & \prod_v H^2(F_v, \mu_2) \end{array}$$

を用いて局所的な場合に帰着して理解できる。

(6) $H^1(F, \text{Aut } G)$, $H^1(F, \text{Int } G)$

G_0 を、connected, simply connected, split な代数群とする。 G_0 の自己同型群 $\text{Aut } G_0$ は、内部自己同型群 $\text{Int } G_0 (\simeq G_0/Z)$ (Z は G_0 の中心) と、Dynkin diagram の同型から生ずる G_0 の (F 上定義された) 自己同型からなる有限群 Θ との半直積で、次の split した exact sequence

$$1 \rightarrow G_0/Z \rightarrow \text{Aut } G_0 \rightarrow \Theta \rightarrow 1$$

を得る。これより exact sequence

$$H^1(F, G_0/Z) \rightarrow H^1(F, \text{Aut } G) \rightarrow H^1(F, \Sigma)$$

が得られる。

G を $\bar{F}$ 上 G_0 と同型な代数群とし、その $\bar{F}$ 上の同型を

$$f: G_0 \rightarrow G$$

とすると

$$a = (a_\sigma), \quad a_\sigma = f^{-1\sigma} f$$

は、 $Z^1(\mathcal{G}, \text{Aut } G_0)$ ($\mathcal{G} = \text{Gal}(\bar{F}/F)$) の元を与え、対応 $G \mapsto \tilde{a}$ は bijection

$$\{ G/F \mid G_0 \simeq G/\bar{F} \} / \sim \longleftrightarrow H^1(F, \text{Aut } G_0)$$

を与える。 $\sim$ は F 上の同型を表す。また $a \in Z^1(\mathcal{G}, \Theta)$ に対し、 ${}_a G_0$ は quasi-split で、1.2.(2) より

$$H^1(F, {}_a(G_0/Z)) / {}_a \Sigma^{\mathcal{G}}$$

が ${}_a G_0$ の inner twist で得られる G の同型類を与える。

§1 については、[S]、[K]、[P-R] を御参照下さい。

§2. Classification of prehomogeneous vector spaces

2.1. Classification and Galois cohomology

この節では、regular irreducible reduced な prehomogeneous vector space (p.v. と略す。) の局所体、代数体上の Galois cohomology を用いた分類について述べる。これらの p.v. の代数閉体上の分類は既に [S-K] において、parabolic type のものの実数体上の分類は [R] においてそれぞれなされている。以下ではこれらの結果に持つ基づいて、主として non-archimedean な局所体、及び代数体上の分類の方針について概説する。

(G, ρ, V) を F 上の p.v. とする。即ち、 G は F 上定義された代数群、 V は F 上有限次元のベクトル空間、 ρ は G の F 上定義された V の上の表現であり、 $\bar{F}$ 上 (G, ρ, V) が p.v. であるとする。以下では、 $\bar{F}$ 上 (G, ρ, V) が regular irreducible reduced と仮定する。

reductive な代数群 G の derived group を G_{der} で表すと、 G の central torus T で $G = G_{der} T$ かつ $G_{der} \cap T$ が有限になるものが存在する。 G_{der} の universal covering group を $\tilde{G}_{der}$ で表すと、自然に表現

$$\tilde{\rho}: \tilde{G} = \tilde{G}_{der} \times T \longrightarrow GL(V)$$

が得られ、 $(\tilde{G}, \tilde{\rho}, V)$ も (G, ρ, V) と同じ条件を満たす。また $(\tilde{G}, \tilde{\rho}, V)$ から (G, ρ, V) が容易に回復できる。さらに F 上の torus T' と T' の F 上定義された指標

$$\lambda': T' \longrightarrow G_m$$

から同じ性質を持つ p.v.

$$(\tilde{G}', \tilde{\rho}', V)$$

$$\tilde{G}' = \tilde{G}_{der} \times T', \rho' = \tilde{\rho}|_{G_{der}} \times \lambda'$$

が得られる。指標 λ' の分類は $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ -module の分類に帰着されるので、ここでは半単純部分 $(\tilde{G}_{der}, \tilde{\rho}, V)$ の分類を与えることを考える。以下、 (G, ρ, V) を G が simply connected な代数群で、 ρ は G の F 上定義された V での表現で、

$$(G \times G_m, \rho \times 1, V)$$

が $\bar{F}$ 上 regular irreducibel reduced な p.v. であるものとし、このような triplet の分類を考える。 (G, ρ, V) , (G', ρ', V') が上の条件をみたす triplet でとし、これらが F 上同値であるとは、 F 上の同型

$$f: G \longrightarrow G', \quad l: V \longrightarrow V'$$

で

$$l(\rho(g)v) = \rho'(f(g))l(v)$$

を満たすものが存在することと定義する。

G と $\bar{F}$ 上同型で split した群を G_0 とすると §1(6) で述べたように G は quasi-split な群 ${}_a G_0 (a \in Z^1(\mathcal{G}, \Theta))$ の inner form になっている。 $f: {}_a G_0 \longrightarrow G$ を

$$(f^{-1\sigma} f) \in Z^1(\mathcal{G}, \text{Int}({}_a G_0))$$

なる $\bar{F}$ 上の同型とする。 ${}_a G_0$ の F 上定義された Borel subgroup ${}_a B$ と ${}_a B$ に含まれる maximal torus ${}_a T$ に対し、 $f({}_a B) = B$, $f({}_a T) = T$ とおく。この (B, T) から決まる G の表現 ρ の dominant weight を l_ρ とする。 ρ が F 上定義されていることから l_ρ は $\mathcal{G}$ の作用 (cf. [B-T] §6) で不変である。 f により対応する ${}_a G_0$ の weight を ${}_a l_\rho$ とすると ${}_a l_\rho$ を dominant weight とする ${}_a G_0$ の表現 ${}_a \rho$ は F 上定義されていて ([T])、しかもそれは F 上の同値をのぞいて一意的に決まる。(cf. [B-T] 12.3)。従って、 ${}_a \rho$ の表現空間を W とすると $(G, {}_a \rho \circ f^{-1}, W)$ と (G, ρ, V) は $\bar{F}$ 上同値になる。しかも $(G, {}_a \rho \circ f^{-1}, W)$ と $\bar{F}$ 上同値で、 F 上定義されたものが存在すれば、それは F 上の同値をのぞいて一意的に決まる ([B-T] 12.3)。これから $(G, {}_a \rho \circ f^{-1}, W)$ と $\bar{F}$ 上同値で F 上定義される表現を持つような G を求めれば良い。

この条件は Galois cohomology を用いて次の様に簡明に記述される。 ${}_a \rho$ が規約表現であることから ${}_a \rho$ は

$${}_a \tilde{\rho}: \text{Int}({}_a G_0) (\simeq {}_a \bar{G}_0 = {}_a G_0 / Z({}_a G_0)) \longrightarrow \text{PGL}(W)$$

を導き、 ${}_a \rho$ が F 上定義されていることから

$${}_a \tilde{\rho}: H^1(F, {}_a \bar{G}_0) \longrightarrow H^1(F, \text{PGL}(W))$$

を導く。これについて次が成り立つ。

Proposition 2.1.1. $c \in Z^1(\mathcal{G}, {}_a \bar{G}_0)$ に対し $c = (f^{-1\sigma} f)$ となる

$$f: {}_a G_0 \longrightarrow G$$

をとる。 ${}_a\rho \circ f^{-1}$ が F 上の表現と同値になるための必要十分条件は

$$\tilde{c} \in \text{Ker}_a \tilde{\rho}$$

で与えられる。

これより容易に

Corollary 2.1.2. (G, ρ) の同値類は

$$\text{Ker}_a \tilde{\rho} / {}_a\Theta^{\mathcal{G}, \rho}$$

と一対一になる。ここで

$${}_a\Theta^{\mathcal{G}, \rho} = \{ \theta \in {}_a\Theta^{\mathcal{G}} \mid \theta({}_a l_\rho) = {}_a l_\rho \}$$

これは次のように言い替えておくと便利である。可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^1(F, {}_aG_0) & \longrightarrow & H^1(F, \text{PGL}(W)) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta' \\ H^2(F, Z({}_aG_0)) & \longrightarrow & H^2(F, G_m) \\ \downarrow & & \parallel \\ H^2(F, Z({}_aG_0)/\text{Ker } \rho) & \xrightarrow{\eta} & H^2(F, G_m) \end{array}$$

において δ', η が injective であることから

Corollary 2.1.3. (G, ρ) の同値類は

$$\text{Ker}(\lambda: H^1(F, {}_aG_0) \longrightarrow H^2(F, Z({}_aG_0))/\text{Ker } \rho) / {}_a\Theta^{\mathcal{G}, \rho}$$

と一対一である。更に $H^2(F, \text{Ker } \rho) \longrightarrow H^2(F, Z({}_aG_0))$ が injective ならば

$$\delta^{-1}(H^2(F, \text{Ker } \rho)) / {}_a\Theta^{\mathcal{G}, \rho}$$

と一対一である。

2.2. Examples

2.1. で与えた Galois cohomology をそれぞれの場合に計算するのだが、ここではいくつかの典型的な場合を扱う。[S-K] における分類番号を用いる。但し、半単純な部分のみを考えていることに注意する。まず次の補題が容易にわかる。

Lemma 2.2.1.

(1) $\text{Ker } \rho \neq \{1\}$ となるのは (1), (2), (3), (5), (9), (12), (13), (15), (17), (20), (23) の場合に限る。

- (2) outer form が現れるのは (1), (5), (12), (15) の場合に限る。
 (3) ${}_a\Theta^{\mathcal{G}, \rho} \neq \{1\}$ となるのは (1), (5), (12), (15) (n, m even) の場合に限る。しかもこのとき

$$|{}_a\Theta^{\mathcal{G}, \rho}| = 2$$

$\text{Ker } \rho = \{1\}$ の場合は次のように無限素点での分類に帰着される。

Theorem 2.2.2. $\text{Ker } \rho = \{1\}$ とする。このとき自然な対応

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\rho: H^1(F, \bar{G}_0) \rightarrow H^2(F, Z(G_0))) \\ \longleftrightarrow \prod_{v \in \Sigma_\infty} \text{Ker}(\rho: H^1(F_v, \bar{G}_0) \rightarrow H^2(F_v, Z(G_0))) \end{aligned}$$

は bijective である。特に、(4), (6), (7), (8), (10), (11), (14) の場合は split したもののみ現れる。

証明には次の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F, G_0) & \longrightarrow & H^1(F, \bar{G}_0) & \longrightarrow & H^2(F, Z(G_0)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod H^1(F_v, G_0) & \longrightarrow & \prod H^1(F_v, \bar{G}_0) & \longrightarrow & \prod H^2(F_v, Z(G_0)) \end{array}$$

において、縦の写像はすべて injective で

$$H^1(F, G_0) \longrightarrow \prod_{v \in \Sigma_\infty} H^1(F_v, G_0)$$

が bijective であることから次の bijection

$$\text{Ker } \delta \longleftrightarrow \prod_{v \in \Sigma_\infty} \text{Ker } \delta_v$$

がわかり、それから第一の主張が示される。二番目の主張はそれらの場合には $H^1(F_v, \bar{G}_0) = \{1\}$ であることからわかる。

Theorem 2.2.3. (2) の type の場合は次のいずれかと同値。

(a) (SL_n, ρ, S_n) ここで

$$S_n = \{ x \in M_n \mid {}^t x = x \}, \quad \rho(g)x = gx {}^t g.$$

(b) $(SL_{n/2}(D), \rho, AH_{n/2}(D))$ ここで D は division quaternion algebra、 ι は canonical involution で

$$AH_{n/2}(D) = \{ x = (x_{ij}) \in M_{n/2}(D) \mid x^* = -x \}, \quad \rho(g)x = gxg^*, \quad x^* = {}^t({}^\iota x_{ij})$$

この場合

$$\mathrm{Ker} \rho = \begin{cases} 1 & n \text{ odd,} \\ \mu_2 & n \text{ even,} \end{cases}$$

で

$$H^1(F, \mu_2) \longrightarrow H^2(F, Z(G_0))$$

が injective だから $\delta^{-1}(H^2(F, \mu_2))$ を調べればよいが、 $H^2(F, \mu_2)$ は quaternion algebra を定め、 $G \simeq SL_n$ または $SL_{n/2}(D)$ となる。(3)、(9)、(13) も同様に扱うことができる。

Theorem 2.2.4. f_0 で、次の対称行列に対応する二次形式とする。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \\ 0 & E_3 & 0 \end{pmatrix}$$

(G, ρ, V) が (17) の type に属するとすると

$$G \simeq Spin(f) \times SL_1(D)$$

但し、二次形式 f と quaternion algebra D は条件

$$\mathrm{disc}(f) = \mathrm{disc}(f_0), \quad \varepsilon_v(f)/\varepsilon_v(f_0) = \mathrm{inv}_v(D) \quad \forall v$$

をみたす。 $\mathrm{inv}_v(D)$ は D の v における不変量 (cf.[S1], Ch.X§5, Ch.XI§2)。

この場合

$$\mathrm{Ker} \rho = \mu_2$$

で、

$$Z(G_0) \simeq \mu_2 \times \mu_2 \quad (G_0 = Spin(f_0) \times SL_2)$$

に対角に含まれている。また写像

$$H^2(F, \mathrm{Ker} \rho) \longrightarrow H^2(F, Z(G_0))$$

は injective であるので $\delta^{-1}(H^2(F, \mathrm{Ker} \rho))$ を調べればよい。図式

$$\begin{array}{ccc} H^1(F, Spin(f_0)) \times H^1(F, SL_2) & & \\ \downarrow & & \\ H^2(F, \mu_2) \times H^2(F, \mu_2) & \supset & H^2(F, \mu_2) \end{array}$$

より容易に結果を得る。(20)、(23) も同様に扱える。

References

[B-T] A. Borel and J. Tits, Groupes réductifs, Publ. Math. I.H.E.S. 27(1965), 55-150.

- [K] M. Kneser, Lectures on Galois cohomology of classical groups, Tata Inst. of Fund. Res.
- [P-R] V. Platonov and A. Rapinchuk, Algebraic groups and number theory, Academic Press.
- [R] H. Rubenthaler, Formes réelles des espaces préhomogènes irréductibles de type parabolique, Ann. Inst. Fourier(Grenoble), 36(1986), 1-38.
- [S-K] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, Nagoya Math. J., 65(1977), 1-155.
- [S] J.P. Serre, Cohomologie Galoisienne, Lecture Notes in Math. 5, Springer.
- [S1] J.P. Serre, Corps locaux, Hermann.
- [Sp] T. Springer, On the equivalence of quadratic forms, Indag. Math., 21(1959), 241-253.
- [T] J. Tits, Représentation linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, J. reine angew. Math., 247(1971), 196-220.