

Indirect Exchange Interaction

についてのノート

永 宮 健 夫 (阪大理)

(1964年1月4日受理)

同じ表題をお借りして，物性研究 Vol.1, No.2 の阿部竜蔵氏のノートにつ
け加えをしたい。問題は

$$\frac{1}{R} \int_0^{\infty} j(q)^2 f(q) \sin(qR) q dq \quad (1)$$

という積分を計算することである。ここに

$$f(q) = 1 + \frac{1-q^2}{2q} \ln \left| \frac{1+q}{-1+q} \right| \quad (2)$$

で (ただし $2k_F$ を単位にして q をはかつた)， $j(q)$ として阿部氏は

$$j(q) = j(0) \frac{\sin qr}{qr} \quad (3)$$

をとつた。物理数学の問題ではあるけれども，この積分を求めることには私も
関心があつて，別の方法で処理したことがあるので，以下にかいつまんでそれ
を御紹介する。

まず (1) の積分を $-\infty$ から $+\infty$ までにかえて， $1/2$ 倍にしておく。次に
(2) の $\ln$ の中の絶対値記号がじやまなので，これを除く。そうすると，
 $-1 < q < 1$ の範囲で $\ln$ は πi だけの違いを生ずる。他の範囲ではちがわない。
ただし， q の複素平面で， -1 と $+1$ を両方とも上か，両方とも下にさげるよ
うにする。さて，絶対値のつかない $\ln$ を含む積分は， $\sin qR$ と $\sin^2 qr$ の
積から生ずる

$$e^{iq(R+2r)}, e^{-iq(R+2r)}, e^{iq(R-2r)}, \text{etc.} \quad (4)$$

の iq にかかる $R+2r$, $-(R+2r)$, $R-2r$, etc. の正負に応じて上か下をまわる半円を積分路に追加してやれば, 消えてしまう。従つて, 絶対値のついた $\ln$ を含む積分は

$$\frac{1}{R} \int_{-1}^1 j(q)^2 \frac{1-q^2}{2q} (\pi i) e^{iqR} q dq \quad (5)$$

の種類のものになる。もつとくわしくいえば, (4) に応じて (5) の中の $j(q)^2 e^{iqR}$ は $e^{iq(R+2r)}$, etc. でおきかえねばならない。

ともかく, (5) の形の積分は $\ln$ がないから簡単に計算でき, $j(q)$ が (3) のような特別な形以外のときも計算しやすい。場合によつては $j(q)^2$ の極が q の複素平面上にできるが, そのときは residue の定理を使えばよい。

間接交換相互作用が -1 から $+1$ までの $j(q)$ の値によつてきめられる (極があるときは漸近形がきめられる) ということは, 注目してよいことである。