

$GL(2, \mathbf{C})$ 上の新谷関数

東大・数理 平野 幹 (MIKI HIRANO)

Contents

1. Introduction
2. Shintani functions
3. Representations
4. Uniqueness of Shintani functions
5. Explicit formulas

1. Introduction

このノートでは、 $GL(2, \mathbf{C})$ 上の新谷関数の定義、重複度、および明示公式について述べる。この新谷関数は、村瀬氏・菅野氏による新谷関数 [7]、および Waldspurger による O_ξ -模型 [9] の一般化になっている。詳しい証明および計算については、[4] を見よ。また、 $GL(2, \mathbf{R})$ 上の新谷関数については、[3] を参照のこと。

2. Shintani functions

G を実簡約可能群 $GL(2, \mathbf{C})$ とし、 $\theta(g) = {}^t\bar{g}^{-1}$ ($g \in G$) を Cartan 対合とする。このとき、 θ の固定点の集合 $K \simeq U(2)$ は、 G の極大コンパクト群。また、 $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とし、 σ を $\sigma(g) = JgJ$ ($g \in G$) で定義される G の対合的自己同型とすると、 $\theta\sigma = \sigma\theta$ であり、 σ の固定点の集合 H は

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} \in G \mid h_i \in \mathbf{C}^\times \right\} \simeq GL(1, \mathbf{C}) \times GL(1, \mathbf{C})$$

で与えられる。 θ および σ (の微分) の $\mathfrak{g}$ における -1 固有空間をそれぞれ $\mathfrak{p}$ 、 $\mathfrak{q}$ と書くとき、 $\mathfrak{g}$ の分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ が成り立つ。また、

$$A = \left\{ a_r = \begin{pmatrix} \cosh r & \sinh r \\ \sinh r & \cosh r \end{pmatrix} \in G \mid r \in \mathbf{R} \right\}$$

とおくと、 $\mathfrak{a} = \text{Lie}(A)$ は $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ の極大可換部分環。一般に、Lie 群 L に対し、その Lie 環を $\mathfrak{l}$ と書き、 $\mathfrak{l}$ の複素化を $\mathfrak{l}^\mathbf{C}$ と書く。

さて、 η を H の既約ユニタリ表現とし、 $C^\infty \text{Ind}_H^G(\eta)$ を G への C^∞ -誘導表現とする。 $C^\infty \text{Ind}_H^G(\eta)$ の表現空間は

$$C_\eta^\infty(H \backslash G) = \{ F \in C^\infty(G) \mid F(hg) = \eta(h)F(g), (h, g) \in H \times G \}$$

で、 G は右移動で作用する。また、 $C^\infty \text{Ind}_H^G(\eta)$ は $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, K)$ -加群の構造を持つ。 G の既約な Harish-Chandra 加群 Π に対して、 $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, K)$ -加群の間の絡空間

$$\mathcal{I}_{\eta, \Pi} = \text{Hom}_{(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, K)}(\Pi^*, C^\infty \text{Ind}_H^G(\eta))$$

を考える。ここに、 Π^* は Π の反傾 $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, K)$ -加群。このとき、 $C_\eta^\infty(H \backslash G)$ における像の空間を

$$\mathcal{S}_{\eta, \Pi} = \bigcup_{T \in \mathcal{I}_{\eta, \Pi}} \text{Image}(T) \subset C_\eta^\infty(H \backslash G)$$

とおき、その元 $F \in \mathcal{S}_{\eta, \Pi}$ を type (η, Π) の G 上の新谷関数と呼ぶ。

任意の有限次元 K -加群 (τ, V_τ) に対し、 $C_{\eta, \tau}^\infty(H \backslash G/K)$ を性質

$$F(hgk) = \eta(h)\tau(k)^{-1}F(g), \quad (h, g, k) \in H \times G \times K$$

をみたす C^∞ -関数 $F : G \rightarrow V_\tau$ の空間とする。 Π の K -type (τ, V_τ) を一つ取り、 $i : \tau^* \rightarrow \Pi^*|_K$ をひとつの K -同変写像とする。ここに、 τ^* は τ の反傾加群。さらに、 i の pull back を i^* とする。このとき、写像

$$\mathcal{I}_{\eta, \Pi} \xrightarrow{i^*} \text{Hom}_K(\tau^*, C^\infty \text{Ind}_H^G(\eta)) \cong C_{\eta, \tau}^\infty(H \backslash G/K)$$

は $T \in \mathcal{I}_{\eta, \Pi}$ の τ^* への制限 $T_i \in C_{\eta, \tau}^\infty(H \backslash G/K)$ を与える。そこで、

$$\mathcal{S}_{\eta, \Pi}(\tau) := \bigcup_i \{T_i \mid T \in \mathcal{I}_{\eta, \Pi}\} \subset C_{\eta, \tau}^\infty(H \backslash G/K)$$

とおき、 $F \in \mathcal{S}_{\eta, \Pi}(\tau)$ を type $(\eta, \Pi; \tau)$ の新谷関数と呼ぶ。

このように定義した新谷関数について、次の問題を考える。

Problems.

- (1) 新谷関数の空間 $\mathcal{S}_{\eta, \Pi}$ の次元を求めよ。
- (2) 新谷関数 $F \in \mathcal{S}_{\eta, \Pi}(\tau)$ の明示公式を与えよ。

以下において、上の問題を既約ユニタリ表現（から定まる Harish-Chandra 加群） η 、 Π 、および Π の極小 K -type τ に対して扱う。特に、分解 $G = HAK$ により、関数 $F \in C_{\eta, \tau}^\infty(H \backslash G/K)$ の値は A への制限 $F|_A$ によって定まる（cf. Flensted-Jensen [1; Theorem 4.1]）ので、新谷関数を A 上の関数、従って一変数関数として考える。

3. Representations

ここでは、 H 、 K 、および G の既約ユニタリ表現について復習する。

パラメーター $s = (s_1, s_2)$ ($s_i \in \sqrt{-1}\mathbf{R}$) および $k = (k_1, k_2)$ ($k_i \in \mathbf{Z}$) に対し、 H の 1 次元表現 η_s^k を

$$\eta_s^k \left(\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} \right) = h_1^{k_1} h_2^{k_2} |h_1|^{s_1 - k_1} |h_2|^{s_2 - k_2}, \quad \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} \in H$$

で定義する。明らかに η_s^k はユニタリであり、 H の既約ユニタリ表現の同値類の集合を $\hat{H}$ と書けば、

$$\hat{H} = \{ \eta_s^k | s = (s_1, s_2), s_i \in \sqrt{-1}\mathbf{R}, k = (k_1, k_2), k_i \in \mathbf{Z} \}$$

である。

$\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ を $\mathfrak{t}$ のひとつのカルタン部分環とする。このとき、 $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ と $\mathbf{C}^2$ の適当な同一視により、 $(\mathfrak{t}_\mathbb{C}, \mathfrak{t}_\mathbb{C}^\mathbb{C})$ の正ルート系として $\Delta^+ = \{(1, -1)\}$ がとれ、 Δ^+ -支配的な整ウェイトの集合は $\Lambda = \{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) | \lambda_i \in \mathbf{Z}, \lambda_1 \geq \lambda_2 \}$ で与えられる。最高ウェイトの理論によれば、 K の既約表現の同値類の集合 $\hat{K}$ は Λ でパラメーターづけられる (cf. Knapp[6; Theorem 4.28])。各 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$ に対して $d_\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ とおき、 $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ で対応する K の既約表現をあらわせば、 $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ は $d_\lambda + 1$ 次元表現である。以下の議論において、 V_λ の基底としてスタンダード基底 $\{v_i^\lambda\}_{0 \leq i \leq d_\lambda}$ をとる (cf. Oda[8])。

$P = N_P A_P M_P$ を上三角行列からなる G の部分群 P の Langlands 分解とする。パラメーター $z = (z_1, z_2)$ ($z_i \in \mathbf{C}$) および $l = (l_1, l_2)$ ($l_i \in \mathbf{Z}$) に対し、

$$\begin{aligned} \sigma_l \left(\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \right) &= \varepsilon_1^{l_1} \varepsilon_2^{l_2}, & \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} &\in M_P, & \varepsilon_i &\in \mathbf{C}^{(1)}, \\ \nu_z \left(\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \right) &= z_1 t_1 + z_2 t_2, & \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} &\in \mathfrak{a}_P = \text{Lie}(A_P), & t_i &\in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

とおく。このとき、 G の非ユニタリ主系列表現 $\text{Ind}_P^G(1_{N_P} \otimes \exp \nu_z \otimes \sigma_l)$ を π_z^l であらわせば、 C^∞ -ベクトルからなる π_z^l の表現空間における稠密な部分空間は

$$\{ f \in C^\infty(G) | f(namx) = e^{(\nu_z + \rho) \log a} \sigma_l(m) f(x) \}$$

で、ノルムは

$$\|f\|^2 = \int_K |f(k)|^2 dk$$

で与えられる。また、 G は $\pi_z^l(g)f(x) = f(xg)$ によって作用する。ここに、

$$\rho \left(\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \right) = t_1 - t_2$$

は N_P -正な $(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{g})$ のルートの半分和。Frobenius 相互律によれば、 π_z^l の K -type は次のようになる。

$$\pi_z^l|_K = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \tau_{(l_1+j, l_2-j)}, & \text{if } l_1 \geq l_2 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \tau_{(l_2+j, l_1-j)}, & \text{if } l_1 < l_2. \end{cases}$$

パラメーター $z = (z_1, z_2)$ が $z_i \in \sqrt{-1}\mathbf{R}$ なるとき、表現 π_z^l は既約ユニタリであり、これはユニタリ主系列表現と呼ばれる。この系列において、 $\pi_z^l \cong \pi_{\bar{z}}^{\bar{l}}$ なのは $\bar{z} = (z_2, z_1)$ および $\bar{l} = (l_2, l_1)$ のとき、そのときに限る。また、パラメーター z および l が $z_1 + z_2 \in \sqrt{-1}\mathbf{R}$ 、 $-2 < z_1 - z_2 < 0$ および $l_1 - l_2 = 0$ をみたすとき、 π_z^l は既約、かつ無限小ユニタリである。これと無限小同値なユニタリ表現は補系列表現と呼ばれる。 G の既約ユニタリ表現は、ユニタリ指標とこの二つの系列によって尽くされることが知られている (cf. Wallach[10; 8.12])。特に、 G は離散系列表現を持たない。

4. Uniqueness of Shintani functions

ここでは、新谷関数の空間 $\mathcal{S}_{\eta, \Pi}(\tau_\lambda)$ の微分方程式による特徴付け、および重複度について調べる。

対応 $X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \leftrightarrow X \oplus \bar{X}$ によって $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ と同一視できる。ここに、 $\bar{X}$ は X の複素共役。従って、 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の包絡環 $U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ は $U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g})$ と同型。 $Z(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ を $U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ の中心とすると、 $Z(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ は $U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g})$ の部分環として次の四つの元で生成される (cf. Jacquet-Langlands [5; p.221])。

$$\Omega_1 := \Omega_{\mathbf{R}} \otimes 1, \quad Z_1 := Z_{\mathbf{R}} \otimes 1,$$

$$\Omega_2 := 1 \otimes \Omega_{\mathbf{R}}, \quad Z_2 := 1 \otimes Z_{\mathbf{R}}.$$

ここに、 $\Omega_{\mathbf{R}}$ は $U(\mathfrak{g})$ の Casimir 元、 $Z_{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。よく知られているように、 $u \in Z(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ は Π 上、従って $\mathcal{S}_{\eta, \Pi}(\tau_\lambda)$ 上無限小指標 χ_u で作用する。また、 Ω_1, Ω_2 はともに 2 階の微分作用素であるが、 $\Omega_1 - \Omega_2$ は 1 階の微分作用素であることに注意する。

ベクトル空間 $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ は、 K の随伴表現 Ad によって K -加群であり、その既約分解を

$$\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_S \oplus \mathfrak{p}_0$$

とする。ここに、

$$(\text{Ad}, \mathfrak{p}_S) \cong (\tau_{(1, -1)}, V_{(1, -1)}), \quad (\text{Ad}, \mathfrak{p}_0) \cong (\tau_{(0, 0)}, V_{(0, 0)})$$

である。 $\{Y_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ を Killing 形式に関する $\mathfrak{p}_S$ のひとつの正規直交基底とする。このとき、1 階の微分作用素 $\nabla_{\eta, \tau_\lambda}^S : C_{\eta, \tau_\lambda}^\infty(H \backslash G/K) \rightarrow C_{\eta, \tau_\lambda \otimes \text{Ad}_{\mathfrak{p}_S}}^\infty(H \backslash G/K)$ を

$$\nabla_{\eta, \tau_\lambda}^S F = \sum_{i=1}^3 R_{Y_i} F \otimes Y_i, \quad F \in C_{\eta, \tau_\lambda}^\infty(H \backslash G/K)$$

によって定義する。ここに、

$$R_X F(g) = \left. \frac{d}{dt} F(g \cdot \exp(tX)) \right|_{t=0}, \quad X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \quad g \in G$$

は右微分。この微分作用素 $\nabla_{\eta, \tau_\lambda}^S$ は Schmid 作用素と呼ばれる。また、任意の既約 K -加群 $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$) に対し、テンソル積 $V_\lambda \otimes \mathfrak{p}_S$ の既約分解は

$$V_\lambda \otimes \mathfrak{p}_S \cong \begin{cases} V_{\lambda-(1,-1)} \oplus V_\lambda \oplus V_{\lambda+(1,-1)}, & d_\lambda \geq 2, \\ V_\lambda \oplus V_{\lambda+(1,-1)}, & d_\lambda = 1, \\ V_{\lambda+(1,-1)}, & d_\lambda = 0. \end{cases}$$

となる。そこで、各既約成分への射影子を

$$P^\pm(\lambda) : V_\lambda \otimes \mathfrak{p}_S \rightarrow V_{\lambda \pm (1,-1)}, \quad P^0(\lambda) : V_\lambda \otimes \mathfrak{p}_S \rightarrow V_\lambda$$

と表わし、 $\nabla_{\eta, \tau_\lambda}^S$ との合成

$$\begin{aligned} \nabla_{\eta, \tau_\lambda}^\pm &= P^\pm(\lambda) \circ \nabla_{\eta, \tau_\lambda}^S : C_{\eta, \tau_\lambda}^\infty(H \backslash G/K) \rightarrow C_{\eta, \tau_\lambda \pm (1,-1)}^\infty(H \backslash G/K), \\ \nabla_{\eta, \tau_\lambda}^0 &= P^0(\lambda) \circ \nabla_{\eta, \tau_\lambda}^S : C_{\eta, \tau_\lambda}^\infty(H \backslash G/K) \rightarrow C_{\eta, \tau_\lambda}^\infty(H \backslash G/K). \end{aligned}$$

をシフト作用素と呼ぶ。

これらの微分作用素によって $\text{type}(\eta, \Pi; \tau_\lambda)$ の新谷関数の空間 $\mathcal{S}_{\eta, \Pi}(\tau_\lambda)$ は次のように特徴づけられる。

Theorem 1. $\eta \in \hat{H}$ 、 Π^* を G の既約ユニタリ表現とし、 $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ を Π の極小 K -type とする。このとき、 $\text{type}(\eta, \Pi, \tau_\lambda)$ の新谷関数の空間 $\mathcal{S}_{\eta, \Pi}(\tau_\lambda)$ は $C_{\eta, \tau}^\infty(H \backslash G/K)$ における次の微分方程式系の解空間として特徴づけられる。

- (1) $d_\lambda = 0$ のとき、 $u \cdot F = \chi_u F$ ($u = \Omega_1 + \Omega_2, Z_1 \pm Z_2$)
- (2) $d_\lambda = 1$ のとき、 $u \cdot F = \chi_u F$ ($u = \Omega_1 - \Omega_2, Z_1 \pm Z_2$)
- (3) $d_\lambda \geq 2$ のとき、 $u \cdot F = \chi_u F$ ($u = \Omega_1 - \Omega_2, Z_1 \pm Z_2$)、および $\nabla_{\eta_s, \tau_\lambda}^- F = 0$

Proof. 新谷関数 $F \in \mathcal{S}_{\eta, \Pi}(\tau_\lambda)$ がこの方程式系をみたすことは、 $Z(\mathfrak{g}^C)$ の元がスカラーで作用すること、および Π^* の K -type の分布により明らか。十分性は、方程式系の一つの零でない解 F を含む最小の $C_\eta^\infty(H \backslash G)$ における $(\mathfrak{g}^C, K)$ -部分加群 Π_F が Π^* と同型であることを示せばよい。これは、+ および - シフト作用素の合成と 0 シフト作用素がスカラー作用素となること（自明でない）を用いて示される。□

$F \in C_{\eta, \tau}^\infty(H \backslash G/K)$ とする。 F の A への制限 $F|_A$ は V_λ -値の関数であるから、これをスタンダード基底に関してベクトル表示する。すなわち、 $d_\lambda + 1$ 個の C^∞ 関数 $c_0(r) \cdots c_{d_\lambda}(r)$ によって $F|_A(a_r) = {}^t(c_0(r), \dots, c_{d_\lambda}(r))$ と表わす。そこで、Theorem 1 における微分方程式系をこのように表示された $F|_A(a_r)$ に対して明示的に書き下し、原点 $r = 0$ （この点は確定特異点）における特性根を調べることにより、次の定理を得る。

Theorem 2. $\eta \in \hat{H}$ 、 Π^* を G の既約ユニタリ表現とする。このとき、

$$\dim \mathcal{S}_{\eta, \Pi} \leq 1$$

が成り立つ。

Remark. 下からの評価 $\dim \mathcal{S}_{\eta, \Pi} \geq 1$ は、 G の開 $H \times P$ -両側剰余類に台をもつ Poisson 核の積分 (Poisson 積分) によって零でない新谷関数を構成することによって (パラメーターがある条件をみたすとき) 示される (cf. [4])。

5. Explicit formula

ここでは、 $d_\lambda = 0$ 、すなわち極小 K -type $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ が 1 次元表現である場合の新谷関数の明示公式について述べる。 $\eta_s^k \in \hat{H}$ 、および 1 次元の極小 K -type を持つ G の既約ユニタリ表現 $\Pi^* = \pi_z^l$ を固定し、 $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ を Π の極小 K -type とする。このとき、 $l = (l_0, l_0)$ とすると、 $\lambda = (-l_0, -l_0)$ である。Theorem 1 における微分方程式を $F|_A(a_r) = c_0(r) \in C_{\eta, \tau}^\infty(H \backslash G/K)|_A$ に対して書き下すと、次のようになる。

$$\begin{cases} \left(4\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + 4\xi \frac{3\xi^4 + 1}{\xi^4 - 1} \frac{d}{d\xi} + \gamma_0(\xi) \right) c_0(r) = (z'^2 - 4)c_0(r) \\ (s_1 + s_2)c_0(r) = (z_1 + z_2)c_0(r) \\ (k_1 + k_2)c_0(r) = 2l_0 c_0(r) \end{cases}$$

ここに、 $\xi = e^{2r}$ 、 $z' = z_1 - z_2$ 、 $s' = s_1 - s_2$ 、 $k' = k_1 - k_2$ とし、

$$\gamma_0(\xi) = \frac{4\xi^2}{(\xi^2 + 1)^2} s'^2 - \frac{4\xi^2}{(\xi^2 - 1)^2} k'^2$$

とおいた。上の微分方程式系の第 1 式において、 $x = \tanh^2 2r = \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}\right)^2$ と変数変換し、さらに $c_0(r) = x^{\frac{|k'|}{4}} (1-x)^{\frac{2-z'}{4}} u(r)$ とおけば、 $u(r)$ は Gauss の超幾何方程式

$$x(1-x) \frac{d^2 u}{dx^2} + \{c - (a+b+1)x\} \frac{du}{dx} - abu = 0$$

をみたす。ここに、パラメーター a 、 b 、 c は

$$a = \frac{|k'| + 2 - z' + s'}{4}, \quad b = \frac{|k'| + 2 - z' - s'}{4}, \quad c = \frac{|k'| + 2}{2}$$

で与えられる。第 3 式により k' は偶数であるから、パラメーター c は正整数、従って、 $u(r) = {}_2F_1(a, b; c; x)$ が $x = 0$ の近傍における (定数倍を除き) 唯一の C^∞ 解である。以上の議論をまとめると、次の定理を得る。

Theorem 3. $\eta_s^k \in \hat{H}$ とし、 $\Pi^* = \pi_z^l$ を $l = (l_0, l_0)$ なる G の主系列、または補系列表現とする。 Π の極小 K -type を $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ ($\lambda = (-l_0, -l_0)$) とするとき、 $\text{type}(\eta_s^k, \Pi; \tau_\lambda)$ の新谷関数の空間 $\mathcal{S}_{\eta_s^k, \Pi}(\tau_\lambda)$ が空でないのは、

$$s_1 + s_2 = z_1 + z_2, \quad k_1 + k_2 = 2l_0$$

なるとき、その時に限る。また、パラメーター s, k, z 、および l が上の関係をみたすとき、

$$\dim \mathcal{S}_{\eta_s^k, \Pi}(\tau_\lambda) = 1$$

であり、その基底として

$$F|_A(a_r) = x^{\frac{|k'|}{4}} (1-x)^{\frac{2-z'}{4}} {}_2F_1\left(\frac{|k'|+2-z'+s'}{4}, \frac{|k'|+2-z'-s'}{4}; \frac{|k'|+2}{2}; x\right) v_0^\lambda$$

なる関数 $F \in C_{\eta, \tau}^\infty(H \backslash G/K)$ がとれる。ここに、 $x = \tanh^2 2r$ 、 $z' = z_1 - z_2$ 、 $s' = s_1 - s_2$ 、 $k' = k_1 - k_2$ である。また、 ${}_2F_1(a, b; c; x)$ は Gauss の超幾何関数。

最後に、極小 K -type $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ が $d_\lambda \geq 1$ なる場合について、 $F \in \mathcal{S}_{\eta_s^k, \Pi}(\tau_\lambda)$ ($\Pi^* = \pi_z^l$) を特徴付ける微分方程式を書き下しておく。 $d_\lambda = 1$ のとき、 $F|_A(a_r) = {}^t(c_0(r), c_1(r)) \in C_{\eta, \tau}^\infty(H \backslash G/K)|_A$ に対して Theorem 1 における微分方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} 2\xi \frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} c_0(r) \\ c_1(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0(\xi) + z'l' & R_1(\xi) \\ P_0(\xi) & Q_1(\xi) + z'l' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0(r) \\ c_1(r) \end{pmatrix} \\ (s_1 + s_2)^t(c_0(r), c_1(r)) = (z_1 + z_2)^t(c_0(r), c_1(r)) \\ (k_1 + k_2)^t(c_0(r), c_1(r)) = (l_1 + l_2)^t(c_0(r), c_1(r)) \end{cases}$$

ここに、 $l' = l_1 - l_2$ とし、

$$\begin{aligned} Q_0(\xi) &= -\frac{2\xi}{\xi^2 + 1} s', & Q_1(\xi) &= \frac{2\xi}{\xi^2 + 1} s', \\ P_0(\xi) &= -\frac{2\xi}{\xi^2 - 1} k' - \frac{4\xi^2}{\xi^4 - 1} + 2 \cdot \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1}, \\ R_1(\xi) &= \frac{2\xi}{\xi^2 - 1} k' - \frac{4\xi^2}{\xi^4 - 1} + 2 \cdot \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1}. \end{aligned}$$

とおいた。

$d_\lambda \geq 2$ のときは、 $F|_A(a_r) = {}^t(c_0(r), \dots, c_{d_\lambda}(r)) \in C_{\eta, \tau}^\infty(H \backslash G/K)|_A$ に対する以下の方程式系が新谷関数を特徴付ける。

$$\begin{cases} -A_0 2\xi \frac{d}{d\xi} {}^t(c_0(r), \dots, c_{d_\lambda}(r)) = X_0(\xi) {}^t(c_0(r), \dots, c_{d_\lambda}(r)) \\ -B_0 2\xi \frac{d}{d\xi} {}^t(c_0(r), \dots, c_{d_\lambda}(r)) = Y_0(\xi) {}^t(c_0(r), \dots, c_{d_\lambda}(r)) \\ (s_1 + s_2)^t(c_0(r), \dots, c_{d_\lambda}(r)) = (z_1 + z_2)^t(c_0(r), \dots, c_{d_\lambda}(r)) \\ (k_1 + k_2)^t(c_0(r), \dots, c_{d_\lambda}(r)) = (l_1 + l_2)^t(c_0(r), \dots, c_{d_\lambda}(r)) \end{cases}$$

ここに、 $A_0 = (a_{ij}^0)$ 、 $B_0 = (b_{ij}^0)$ 、 $X_0(\xi) = (x_{ij}^0(\xi))$ 、 $Y_0(\xi) = (y_{ij}^0(\xi))$ は、次で定義される大きさ $d_\lambda + 1$ の正方行列。

$$a_{ij}^0 = \begin{cases} d_\lambda + 1 - i, & (j = i + 1, 1 \leq i \leq d_\lambda) \\ i - 1, & (j = i - 1, 2 \leq i \leq d_\lambda + 1) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$$b_{ij}^0 = \begin{cases} -1, & (j = i + 1, 2 \leq i \leq d_\lambda) \\ 1, & (j = i - 1, 2 \leq i \leq d_\lambda) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$$x_{ij}^0(\xi) = \begin{cases} R_i(\xi), & (j = i + 1, 1 \leq i \leq d_\lambda) \\ Q_{i-1}(\xi) + z'l', & (j = i, 1 \leq i \leq d_\lambda + 1) \\ P_{i-2}(\xi), & (j = i - 1, 2 \leq i \leq d_\lambda + 1) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$$y_{ij}^0(\xi) = \begin{cases} U_i(\xi), & (j = i + 1, 2 \leq i \leq d_\lambda) \\ T_{i-1}(\xi), & (j = i, 2 \leq i \leq d_\lambda) \\ S_{i-2}(\xi), & (j = i - 1, 2 \leq i \leq d_\lambda) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

ただし、

$$P_i(\xi) = (i + 1) \left\{ -\frac{2\xi}{\xi^2 - 1} k' + 2 \cdot \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} - \frac{4\xi^2}{\xi^4 - 1} (2i + 2 - d_\lambda) \right\},$$

$$Q_i(\xi) = \frac{2\xi}{\xi^2 + 1} s' (2i - d_\lambda),$$

$$R_i(\xi) = (d_\lambda - i + 1) \left\{ \frac{2\xi}{\xi^2 - 1} k' + 2 \cdot \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} + \frac{4\xi^2}{\xi^4 - 1} (2i - 2 - d_\lambda) \right\},$$

$$S_i(\xi) = \frac{2\xi}{\xi^2 - 1} k' + \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} (2i - d_\lambda) - 2 \cdot \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1} (i + 1), \quad T_i(\xi) = -\frac{4\xi}{\xi^2 + 1} s',$$

$$U_i(\xi) = \frac{2\xi}{\xi^2 - 1} k' + \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} (2i - d_\lambda) + 2 \cdot \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1} (d_\lambda - i + 1)$$

とおいた。

REFERENCES

1. Flensted-Jensen, M., *Spherical Functions on a Real Semisimple Lie Group. A Method of Reduction to the Complex Case*, J. Funct. Anal. **30** (1978), 106–146.
2. Heckman, G., Schlichtkrull, H., *Harmonic analysis and special functions on symmetric spaces*, Perspectives in Math., vol.16, Academic Press, 1994.
3. Hirano, M., *Shintani Functions on $GL(2, \mathbf{R})$* , Trans. of Amer. Math. Sci. (to appear).
4. ———, *Shintani Functions on $GL(2, \mathbf{C})$* , preprint.
5. Jacquet, H., Langlands, R. P., *Automorphic forms on $GL(2)$* , Lecture Note in Math., vol.114, Springer Verlag, 1970.

6. Knapp, A. W., *Representation Theory of Semisimple Groups; An Overview Based on Examples*, Princeton Univ. Press, 1986.
7. Murase, A., Sugano, T., *Shintani functions and automorphic L-functions for $GL(n)$* , Tôhoku Math. J. **48** (1996), 165–202.
8. Oda, T., *An Explicit Integral Representation of Whittaker Functions on $Sp(2, \mathbf{R})$ for the Large Discrete Series Representations*, Tôhoku. Math. J. **46** (1994), 261–279.
9. Waldspurger, J. L., *Correspondance de Shimura*, J. Math. Pures Appl. (9) **59** (1980), 1–133.
10. Wallach, N. R., *Representations of reductive Lie groups*, Proc. Symp. Pure Math. **33** (1979), 71–86.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO, TOKYO, 153-0041, JAPAN

E-mail address: hirano@ms406ss5.ms.u-tokyo.ac.jp