

乱流と大偏差統計

崇城大学工学部総合教育物理 柴田 博史(Hiroshi Shibata)
 Department of General Education, Faculty of Engineering,
 Sojo University

1. はじめに

様々な乱流において, その乱流を記述する量が大偏差統計に従うことが示されてきている。[1]においては GOY シェルモデルで表される乱流のエネルギー流が大偏差統計に従うことが示された。また[2]では Kuramoto-Sivashinsky 方程式で表される位相乱流の解の絶対値を相関時間より長く粗視化した量は, 大偏差統計に従うことが示された。さらに[3]では乱流のモデルである 2 次元カップルドマップラティスで表される場の量が, 大偏差統計に従うことが示された。

References

- [1] 渡邊威, 名嘉山祥也, 藤坂博一, 乱流シェルモデルにおける間欠性の大偏差統計解析, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 10ME-S4(1999)25.
- [2] H.Shibata, Statistics of phase turbulence II, Physica A 317(2003)391.
- [3] H.Shibata, Universality in turbulence, preprint.

2. 大偏差統計から導かれる 2 時間相関関数の積分

まず大偏差統計について簡潔に説明する[4-7]。時系列 $\{x_j; j = 0, 1, 2, \dots\}$ に対して時

間粗視化量

$$X_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \quad (1)$$

を導入する。ここで q 次のモーメント

$$Z_q(n) = \langle \exp\{nqX_n\} \rangle \quad (2)$$

が漸近的に

$$Z_q(n) \propto \exp\{n\phi(q)\} \quad (3)$$

という振る舞いをするとき, “大偏差統計が成立する” という。またこのとき

$$P(X; n) \equiv \delta(X - X_n) > \quad (4)$$

$$\propto \exp\{-nS(n)\} \quad (5)$$

が成立する。ここで $\langle \dots \rangle$ は1つの解軌道に沿ったアンサンブル平均を表わし、 $\delta(\bullet)$ はDiracの分布を表す。つまり $P(X;n)$ は、時間粗視化量 X_n が X という値をとる確率を与える確率分布関数である。ここで関数 $\phi(q)$ と $S(X)$ とはLegendre変換で結ばれており、

$$S(X) = Xq(X) - \phi(q(X)) \quad (6)$$

および

$$q = \frac{dS(X)}{dX} \quad (7)$$

の関係が成立する。(3)式は

$$\phi(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_q(n) \quad (8)$$

とも書かれる。(8)式の成立は

$$X(q) = \frac{d\phi(q)}{dq} \quad (9)$$

さらに

$$\chi(q) = \frac{dX(q)}{dq} \quad (10)$$

が存在することを示唆する。ここで $\chi(0)$ をもとの量を使って書くと

$$\chi(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} (\langle x_{j_1} x_{j_2} \rangle - \langle x_{j_1} \rangle \langle x_{j_2} \rangle) \quad (11)$$

となり、これは2時間相関関数の時間積分が存在することを意味する。ここで

$$\chi(q) = \frac{d^2 \phi(q)}{dq^2} = \frac{dX(q)}{dq} = \frac{1}{\frac{dq}{dX(q)}} = \frac{1}{\frac{d^2 S}{dX^2}} \quad (12)$$

が成立し、(7)式より

$$\chi(q)|_{q=0} = \frac{1}{\left. \frac{d^2 S}{dX^2} \right|_{X=\hat{X}}} \quad (13)$$

を得る。ここで $\hat{X}$ は $S(X)$ の極値を与える X の値である。

References

- [4] P.Gaspard, Chaos, Scattering and Statistical Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [5] C.Beck, F.Schlogl, Thermodynamics of chaotic systems, an introduction, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[6] H.Mori, Y.Kuramoto, Dissipative Structures and Chaos, Springer, Berlin, 1998

[7] 藤坂博一, 非平衡系の統計力学, 産業図書, 1998.

3. 大偏差統計に従う乱流

拡散定数 D は

$$D \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}{2t} \quad (14)$$

で定義されるが,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t ds v(s) \quad (15)$$

を考慮すると

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 (\langle v(s_1)v(s_2) \rangle - \langle v(s_1) \rangle \langle v(s_2) \rangle) \quad (16)$$

が成立する。

(16)式の時間離散版は

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} (\langle v_{j_1} v_{j_2} \rangle - \langle v_{j_1} \rangle \langle v_{j_2} \rangle) \quad (17)$$

となり(11)式と同じ形式で表されている。

いまカオス系

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ p \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -\sin q + \gamma_0 + B \sin \phi \\ \omega_0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

あるいは

$$\ddot{q} = -\sin q + \gamma_0 \dot{q} + B \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (19)$$

を例にとり, 拡散係数を計算する。この系は振り子に重力と周期外力が働くものでパ

ラメータのとり方によりカオスを表す。 $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{15}}$, $\omega_0 = 0.65$, $B = 0.72834 \times (1 + 0.01)$

とすると, p の時系列は図 1 のようになる。

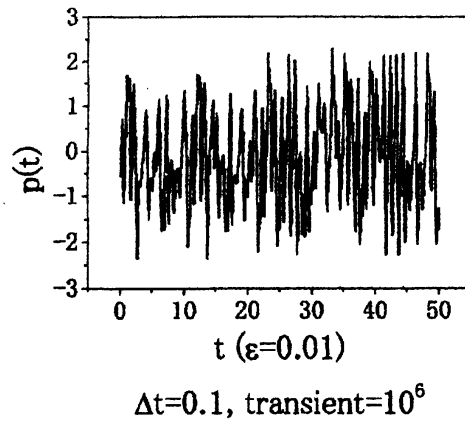


図 1

ここで時間粗視化量

$$P_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} p_j \quad (19)$$

を導入する。いま(19)式で 1 ステップ間隔の時間は

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_0} \times 0.1$$

とした。 P_n が P という値をとる確率を与える確率分布関数

$$P(P; n) \equiv \langle \delta(P - P_n) \rangle \quad (20)$$

を 10^8 のアンサンブルより計算すると

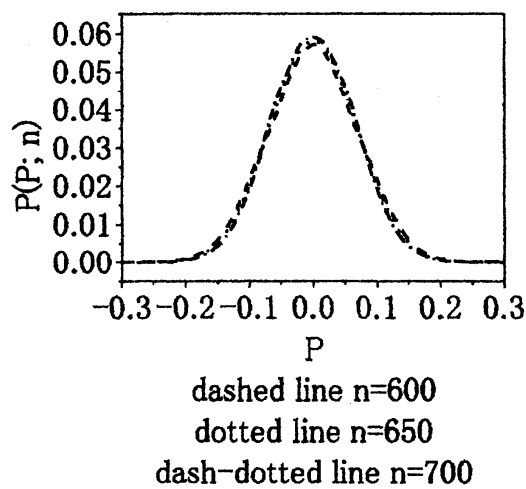


図 2

のようになる。ここで $n = 600, 650, 700$ とした。図 2 を書きかえると図 3 のようになる。

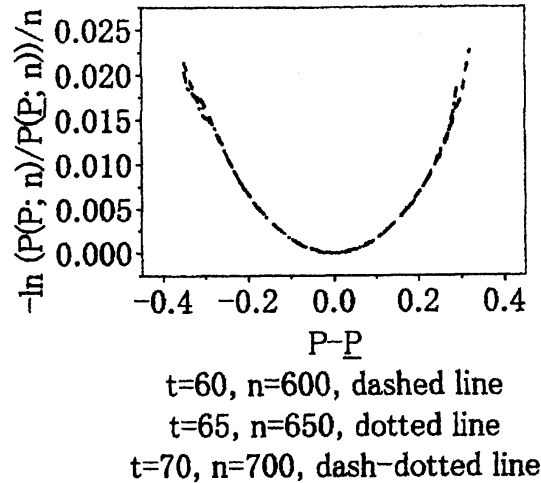


図 3

ここで P は確率分布関数 $P(P; n)$ の最大値を与える P の値である。 n の値を変えても確率分布関数が図 3 の 1 つの曲線に一致してくるのは、関数 $S(P)$ が存在することの証拠であり、最小値での曲率より $D = 1.307$ を得る ((13) 式参照)。

次に 2 次元カップルドマップラティスを取り上げる。これは 2 次元乱流の 1 つのモデルである [8]。空間サイト (i, j) 、離散時間 n における場の量を $X_{i,j}^n$ で表わし、 $X_{i,j}^{n+1}$ は

$$X_{i,j}^{n+1} = (1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) f(X_{i,j}^n) + \frac{\varepsilon_1}{2} (f(X_{i+1,j}^n) + f(X_{i-1,j}^n)) + \frac{\varepsilon_2}{2} (f(X_{i,j+1}^n) + f(X_{i,j-1}^n)) \quad (21)$$

および

$$f(X) = 1 - aX^2 \quad (22)$$

で与えられる。ここでは $a = 1.9999$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.24$ とする。また系のサイズは $i = 1 \sim 32$, $j = 1 \sim 32$ つまり $N = 32 \times 32$ とし、周期境界条件を採用した。

一方、輸送係数は一般に

$$\eta = \frac{1}{k_B T} \int_0^\infty dt \int d^3x \langle j_{xy}(\vec{x}, t) j_{xy}(\vec{0}, 0) \rangle - \langle j_{xy}(\vec{x}, t) \rangle \langle j_{xy}(\vec{0}, 0) \rangle$$

のように書くことができる。ここでは輸送係数に対応するものとして、

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} \left[\sum_{(i,k)} \langle X_{i,k}^{j_1} X_{i,k}^{j_2} \rangle - \langle X_{i,k}^{j_1} \rangle \langle X_{i,k}^{j_2} \rangle \right] \quad (23)$$

を考える。

$$\begin{aligned}
\langle \sum_{(i,k)} X_{i,k}^{j_1} X_{i,k}^{j_2} \rangle &= \langle \sum_{(i,k)} X_{i,k}^{j_1} X_{i',k'}^{j_2} \rangle = \sum_{(i,k)} \sum_{(i',k')} \frac{1}{N} \langle X_{i,k}^{j_1} X_{i',k'}^{j_2} \rangle \\
&= N \langle \frac{\sum_{(i,k)} X_{i,k}^{j_1}}{N} \frac{\sum_{(i',k')} X_{i',k'}^{j_2}}{N} \rangle
\end{aligned} \tag{25}$$

を考慮すると,

$$u_j \equiv \frac{\sum_{(i,k)} X_{i,k}^j}{N} \tag{26}$$

としたとき

$$d = N \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} (\langle u_{j_1} u_{j_2} \rangle - \langle u_{j_1} \rangle \langle u_{j_2} \rangle) \tag{27}$$

が成立する。

まず u_j の時系列を図 4 に示す。

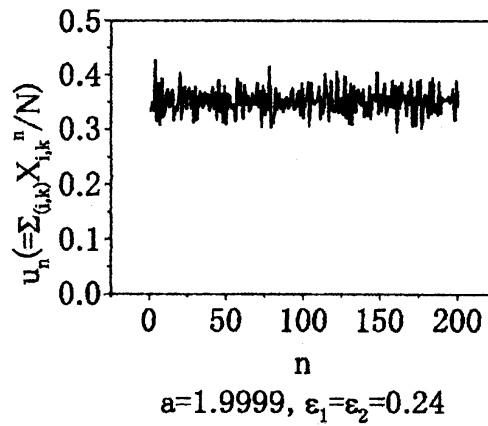


図 4

また, u_j の 2 時間相関関数を図 5 に示す。

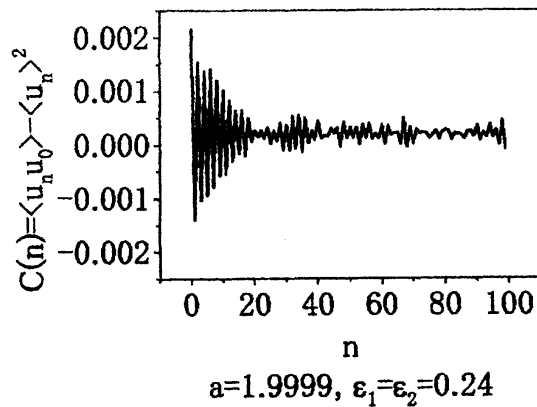


図 5

図 5 より u_j の相関時間は 20 ぐらいだと見積もっておき、時間粗視化量

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u_j \quad (28)$$

を導入する。 n は 20 より大きな数を選び、 U_n が U という値をとる確率を与える確率分布関数を計算する。結果を図 6 に示す。

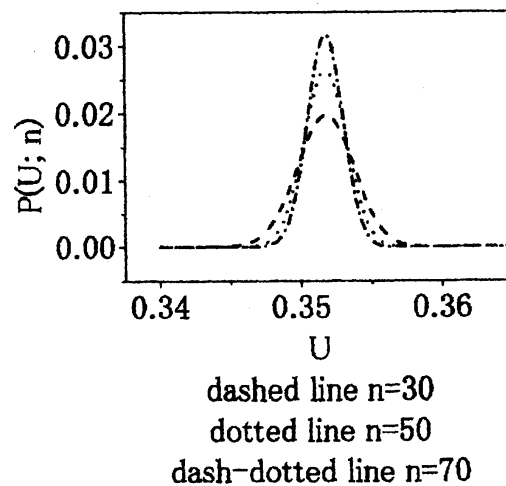


図 6

ここでアンサンブル数は 10^7 とした。図 6 を先と同じように書きかえると

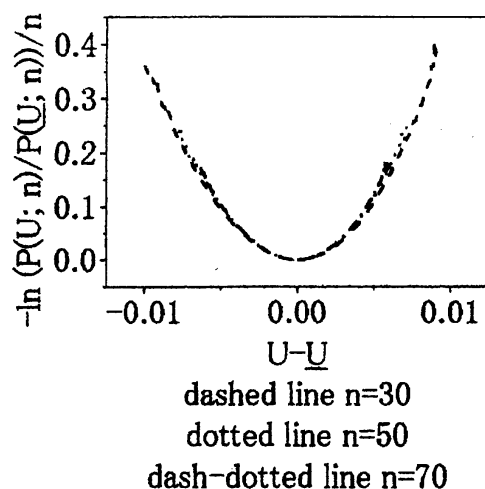


図 7

のようになる。ここで $\bar{U}$ は $P(U; n)$ の最大値を与える U の値である。図 7 で 3 つの確率分布関数は 1 つの曲線 $S(U)$ を与える。この $S(U)$ の最小値を与える $\bar{U}$ 近傍での 2 次関数フィットを図 8 に示す。

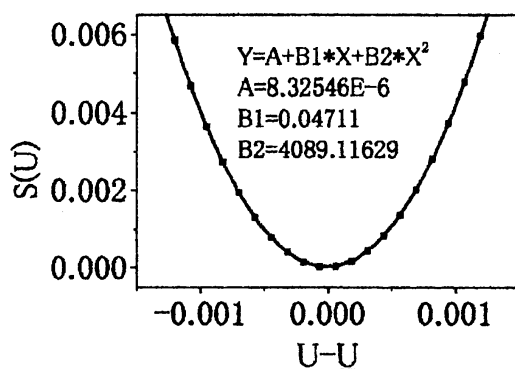


図 8

実線が最小自乗法で 2 次関数フィットしたものである。これより、 d の値として 0.1252 を得る。

Reference

- [8] T.Bohr, M.H.Jensen, G.Paladin, A.Vulpiani, Dynamical Systems Approach to Turbulence, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

4. 結語

様々な乱流について、拡散係数や輸送係数は時間粗視化量の確率分布関数が大偏差統計に従うとき、エントロピー関数の曲率より求まる。

つまり、様々な乱流に対して場の量の2時間相関関数を調べると、ある時間で飽和する場合がある。このとき、この飽和時間より長い時間で場の量を粗視化すると、場の量は大偏差統計に従う。大偏差統計より得られるエントロピー関数の極値での曲率は、場の量の2時間相関関数の積分を与える。輸送係数が場の量の2時間相関関数の積分で与えられることを考慮すると、乱流における輸送係数は上述の手続きで得られるものと思われる。

謝辞

この研究は応用力学研究所共同研究 14ME-8 にサポートされており、特に応用力学研究所非線形力学分野のスタッフには常日頃お世話になっております。深く感謝いたします。