

Algebraic automorphic representations

(L. Clozel, Motifs et formes automorphes の紹介)

T. WATANABE

保型表現と Motif との関係を記述するための 1 つの定式化が 10 年程前 Langlands によって与えられた。それは、Isobaric 表現と呼ばれる GL_n の保型表現の或クラス $Isob$ を定義し、" $Isob$ を表現圏として持つ群 $\mathcal{G}_{Isob}$ と Motif のカテゴリーを表現圏として持つ群 $\mathcal{G}_{Mot}$ との間に或準同型 $\mathcal{G}_{Isob} \rightarrow \mathcal{G}_{Mot}$ が存在する。"

というものである。(ここで、 $\mathcal{G}_{Isob}$, $\mathcal{G}_{Mot}$, 及び、"Motif のカテゴリー" はまだ仮想的なものである)。しかしながら、 $Isob$ は Motif との対応を考える上で、まだ "大きすぎる" と思われる。(c.f. [5, p. 211], [3, p.189])。今回紹介する論文の中で Clozel は、Isobaric 表現の無限素点に於ける成分に或条件を付けることによって、Algebraic 表現と呼ばれる保型表現のクラス Alg を定義した。そして Alg の要素は " $\overline{\mathbf{Q}}$ 上定義" されかつ "Motif が対応" すると予想している。以下ではその定義と簡単な例、及び主な予想と結果について説明する。

体はすべて標数 0

$G_n = GL_n$

$P = P(n_1, \dots, n_r) \subset G_n$: standard parabolic subgroup with Levi part $\prod_i G_{n_i}$

1. Langlands subquotient.

L : local field

σ_i : $G_{n_i}(L)$ の 2 乗可積分表現 (modulo the center)

$\exists s_i \in \mathbf{R} : |\sigma_i(z)| = |z|_L^{s_i}, \forall z \in \text{the center of } G_{n_i}(L) \cong L^*$

$\sigma = \sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_r$: $P(L)$ の表現 (unipotent radical では trivial)

$\rho(\sigma) = \rho(\sigma_1, \dots, \sigma_r) = \text{Ind}_{P(L)}^{G_n(L)} \sigma$: ユニタリ誘導表現とするとき

Langlands subquotient

$\exists_1 J(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$: $\rho(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ の irr. subquotient

(1.1) $J(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \cong J(\sigma_{\tau(1)}, \dots, \sigma_{\tau(r)}), (\forall \tau \in S_r: \text{permutations})$

(1.2) $s_{\tau(1)} \geq s_{\tau(2)} \geq \dots \geq s_{\tau(r)} \implies J(\sigma_{\tau(1)}, \dots, \sigma_{\tau(r)})$ は $\rho(\sigma_{\tau(1)}, \dots, \sigma_{\tau(r)})$ の unique irr. quotient

逆に $G_n(L)$ の任意の irr. admissible rep. は適当な $J(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ と同型になる

2. Isobaric 表現

F : 代数体

$\mathbf{A}$: F のアデール

σ_i : $G_{n_i}(\mathbf{A})$ の cuspidal rep.

$\sigma = \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r$: $P(\mathbf{A})$ の表現 (unipotent radical では trivial)
 $\rho(\sigma) = \rho(\sigma_1, \dots, \sigma_r) = \text{Ind}_{P(\mathbf{A})}^{G_n(\mathbf{A})} \sigma = \otimes_v \rho(\sigma_v)$ (制限テンソル積)

このとき

$$(2.1) \quad \pi : G_n(\mathbf{A}) \text{ の irr. automorphic rep. } \iff \pi \text{ は } \exists \rho(\sigma) \text{ の irr. subquotient}$$

が成立。更に

$$\begin{aligned} \sigma_i = \otimes \sigma_{i,v} : \text{cuspidal rep.} &\implies \sigma_{i,v} : \text{generic} \\ &\implies \sigma_{i,v} = \text{Ind}_{P_i(F_v)}^{G_{n_i}(F_v)} \tau_{i,v} \quad \exists P_i \subset G_{n_i}, \exists \tau_{i,v} : \text{square int.} \end{aligned}$$

より、 $\tau_{i,v} = \tau_{i,v}^1 \otimes \cdots \otimes \tau_{i,v}^{r_i}$ とすれば

$$\rho(\sigma_v) = \rho(\sigma_{1,v}, \dots, \sigma_{r,v}) = \rho(\tau_{1,v}^1, \dots, \tau_{1,v}^{r_1}, \tau_{2,v}^1, \dots, \tau_{2,v}^{r_2}, \dots, \tau_{r,v}^1, \dots, \tau_{r,v}^{r_r})$$

だから、 $\rho(\sigma_v)$ の Langlands subquotient $J(\sigma_v)$ がある。このことから、

Definition

$\sigma = \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r$: $\prod_i G_{n_i}(\mathbf{A})$ の cuspidal rep. に対して π : irr. subquotient of $\rho(\sigma)$ s.t. $\pi_v \cong J(\sigma_v)$ for all v なる表現は $G_n(\mathbf{A})$ の irr. automorphic rep になる。この様な表現 π を isobaric 表現 と呼び $\pi = \sigma_1 + \cdots + \sigma_r$ とかく。ここで

$$(2.2) \quad \sigma_1 + \cdots + \sigma_r \cong \sigma'_1 + \cdots + \sigma'_t \iff r = t, \sigma_i = \sigma'_{\tau(i)} \quad (\exists \tau \in S_r)$$

が成立する。

$Isob(n)$: $G_n(\mathbf{A})$ の isobaric 表現 の集合

$$Isob = \coprod Isob(n)$$

$Isob$ のなかの和と積

$\pi^1 = \sigma_1^1 + \cdots + \sigma_r^1 \in Isob(a)$, $\pi^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_t^2 \in Isob(b)$ に対して

$$\pi^1 + \pi^2 = \sigma_1^1 + \cdots + \sigma_r^1 + \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_t^2 \in Isob(a+b)$$

とする。積については次の予想がある。 $\pi \in Isob(n)$ について π_v が不分岐のとき $t_{\pi,v}$ を π_v に対応する ${}^L G_n^0 = G_n(\mathbf{C})$ のなかの対角行列とすると

Conjecture A

$\pi^1 \in Isob(a)$, $\pi^2 \in Isob(b)$ に対して

$$\exists \pi \in Isob(ab) \quad \text{s.t.} \quad t_{\pi,v} = t_{\pi^1,v} \otimes t_{\pi^2,v} \quad \text{for almost all } v$$

このとき $\pi = \pi^1 \times \pi^2$ とかく。

3. Algebraic automorphic representations

簡単のため F は総実と仮定する。

$H_n \subset G_n$: diagonal matrices

${}^L H_n^0$: complex diagonal matrices

$X^*(H_n) = \text{Hom}(H_n, G_1) = X_*({}^L H_n^0) = \text{Hom}(G_1, {}^L H_n^0) \cong \mathbf{Z}^n$

$\mathcal{H} = X_*({}^L H_n^0) \otimes \mathbf{C} = \text{Hom}(\text{Lie}(H_n)_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^n$

$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathcal{H}$, $z \in \mathbf{C}^*$ に対して

$$z^\mu = \text{diag}(z^{\mu_1}, \dots, z^{\mu_n}) \in {}^L H_n^0$$

とかけば $r \in \text{Hom}(\mathbf{C}^*, {}^L H_n^0)$ は

$$r(z) = z^\mu \bar{z}^\nu \quad \mu, \nu \in \mathcal{H}, \quad \mu - \nu \in X^*(H_n)$$

と表せる。一方 Harish-Chandra isomorphism: $Z(\mathcal{G}) \cong \mathcal{U}(\text{Lie}(H_n)_{\mathbf{C}})^{S_n}$ より

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(Z(\mathcal{G}), \mathbf{C}) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}/S_n \\ \chi_\lambda & \longrightarrow & \lambda \end{array}$$

をもつ。さて

$W_{\mathbf{R}} = \mathbf{C}^* \times \{c\}$: Weil group of $\mathbf{R}$, $c^2 = -1$, $czc^{-1} = \bar{z}$

$\Phi_n(W_{\mathbf{R}})$: semisimple admissible rep. $W_{\mathbf{R}} \rightarrow {}^L G_n^0$ の同値類

$\text{Irr}(G_n(\mathbf{R}))$: $G_n(\mathbf{R})$ の irr. admissible rep. の同値類

とおけば、全単射

$$\begin{array}{ccc} \text{Irr}(G_n(\mathbf{R})) & \longleftrightarrow & \Phi_n(W_{\mathbf{R}}) \\ \pi & \longleftrightarrow & r \\ \chi_\pi = \chi_\mu & & r(z) = z^\mu \bar{z}^\nu \quad (z \in \mathbf{C}^*) \end{array}$$

がある。 $(\chi_\pi$ は π の infinitesimal character). この対応で

$$p(\pi) = \mu - \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}, \dots, \frac{n-1}{2} \right) = \left(\mu_1 - \frac{n-1}{2}, \mu_2 - \frac{n-1}{2}, \dots, \mu_n - \frac{n-1}{2} \right) \in \mathcal{H}/S_n$$

とおく。

Definition

I : set of all real places of F

$\pi = \otimes \pi_v \in \text{Isob}(n)$ について

$$\pi : \text{algebraic} \xLeftrightarrow{\text{def}} p(\pi_v) \in X^*(H_n)/S_n \quad (\forall v \in I)$$

と定義する。このとき $p(\pi) = (p(\pi_v))_{v \in I} \in (\mathbf{Z}^n/S_n)^I$ を π の "infinite type" という。

$\text{Alg}(n)$: $G_n(\mathbf{A})$ の algebraic 表現の集合。

$\text{Alg}^0(n)$: $G_n(\mathbf{A})$ の cuspidal algebraic 表現の集合。

$$Alg = \coprod Alg(n)$$

Alg のなかの和と積

$\pi \in Isob(n)$ のとき、 $\pi|\cdot|^s : g \mapsto \pi(g)|g|^s$ とする。

$\pi^1 \in Alg(a), \pi^2 \in Alg(b)$ に対して、

$$\pi^1 \overset{T}{+} \pi^2 = \left(\pi^1|\cdot|^{\frac{1-a}{2}} + \pi^2|\cdot|^{\frac{1-b}{2}} \right) |\cdot|^{\frac{a+b-1}{2}} \in Alg(a+b)$$

Conjecture A のもとで、

$$\pi^1 \overset{T}{\times} \pi^2 = \left(\pi^1|\cdot|^{\frac{1-a}{2}} \times \pi^2|\cdot|^{\frac{1-b}{2}} \right) |\cdot|^{\frac{ab-1}{2}} \in Alg(ab)$$

と定義する。次が成立。

$$(3.1) \quad \forall \pi \in Alg(n) \quad \exists \pi^i \in Alg^0(n_i) \quad ; \quad \pi \cong \pi^1 \overset{T}{+} \pi^2 \overset{T}{+} \cdots \overset{T}{+} \pi^r$$

Examples

(1) $n=1$ の場合。

$\pi = \otimes \pi_v : G_1(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}^*$: Grössencharakter

$\pi_v \longleftrightarrow r_v \in \Phi_1(W_{\mathbf{R}}), \quad (v \in I)$

$S = (W_{\mathbf{R}} : W_{\mathbf{R}}) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z|=1\}$: derived group of $W_{\mathbf{R}}$

従って、

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbf{C}^* & \longrightarrow & W_{\mathbf{R}} & \longrightarrow & \text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & \mathbf{C}^*/S & \longrightarrow & W_{\mathbf{R}}/S & \longrightarrow & \text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & \mathbf{R}_+^* & & \mathbf{R}^* & & \end{array}$$

より、 $r_v|_{\mathbf{C}^*} = \pi_v|_{\mathbf{R}_+^*} = |\cdot|^{\mu_v}$. 故に

$$\pi \in Alg(1) \iff \mu_v \in \mathbf{Z}, \quad (v \in I) \iff \pi : \text{algebraic Hecke character}$$

(2) $n=2, \quad F=\mathbf{Q}$ の場合。

$G_2(\mathbf{R})$ の irr. admissible rep. の分類。 $SL_2(\mathbf{R})$ への制限がユニタリのものを考える。

$\alpha = |\cdot|_{\mathbf{R}}$

$\pi(\xi_1, \xi_2) = J(\xi_1, \xi_2), \quad \xi_i = \alpha^{s_i} \text{sgn}^{\epsilon_i} \quad (s_i \in \mathbf{C}, \epsilon_i \in \mathbf{Z})$: Langlands subquotient

$\sigma(\xi_1, \xi_2) = \rho(\xi_1, \xi_2)/\pi(\xi_1, \xi_2) \quad \text{if } |s_1| \leq |s_2|$

$$\text{principal series :} \quad \pi(\xi_1, \xi_2) \quad \begin{cases} s_1 - s_2 \in \sqrt{-1}\mathbf{R} & \epsilon_1 = \epsilon_2 \\ s_1 - s_2 \in \sqrt{-1}\mathbf{R} - \{0\} & \epsilon_1 \neq \epsilon_2 \end{cases}$$

$$\text{complementary series :} \quad \pi(\xi_1, \xi_2) \quad s_1 - s_2 \in (-1, 1) - \{0\} \quad \epsilon_1 = \epsilon_2$$

$$\text{limit of discrete series :} \quad \pi(\xi_1, \xi_2) \quad s_1 - s_2 = 0 \quad \epsilon_1 \neq \epsilon_2$$

$$\text{trivial rep. :} \quad \pi(\xi_1, \xi_2) \quad s_1 - s_2 = 1 \quad \epsilon_1 = \epsilon_2$$

$$\text{discrete series :} \quad \sigma(\xi_1, \xi_2) \quad 0 > s_1 - s_2 \in \mathbf{Z} \quad \epsilon_1 + \epsilon_2 \equiv s_1 - s_2 - 1 \pmod{2}$$

π : irr automorphic rep. of $G_2(\mathbf{A})$

π_∞ : infinity component of π は上記の表現の一つと同型になり、このとき $p(\pi) = (s_1 - 1/2, s_2 - 1/2)$ だから、

$$\pi \in \text{Alg}(2) \iff p(\pi) \in \mathbf{Z}^2 \implies s_1 - s_2 \in \mathbf{Z}$$

故に、 π_∞ は次のいずれかになる。

- | | | | | |
|-----|---|---|-----------------------|--------------------|
| (1) | $\pi(\alpha^s, \alpha^s)$ | $s \in \frac{1}{2} + \mathbf{Z}$ | $\longleftrightarrow$ | weight 0 の保型形式 |
| (2) | $\pi(\alpha^s, \alpha^s \text{sgn})$ | $s \in \frac{1}{2} + \mathbf{Z}$ | $\longleftrightarrow$ | weight 1 の保型形式 |
| (3) | $\sigma(\alpha^s, \alpha^{s+k} \text{sgn}^{k+1})$ | $1 \leq k \in \mathbf{Z}, s \in \frac{1}{2} + \mathbf{Z}$ | $\longleftrightarrow$ | weight $k+1$ の保型形式 |
| (4) | $\alpha^s \circ \det$ | $s \in 2\mathbf{Z}$ | | |

4. The field of rationality of an automorphic representation

一般に

G : totally disconnected topological group

(π, V) : smooth representation of G over $\mathbf{C}$

$\sigma \in \text{Aut}(\mathbf{C})$ について $({}^\sigma \pi, {}^\sigma V)$: smooth rep. of G を ${}^\sigma V = V \otimes_{\mathbf{C}, \sigma^{-1}} \mathbf{C}$, ${}^\sigma \pi(g)(v \otimes z) = (\pi(g)v) \otimes z$ で定義して、 $\mathbf{Q}(\pi)$ を $\mathbf{C}$ の $\{\sigma \mid {}^\sigma \pi \cong \pi\}$ による固定体とする。とくに $G = G_n(\mathbf{A}_f)$ or $G_n(F_v)$ (v : finite place) の場合を考える。今

$\pi = \otimes \pi_v$: irr. admissible rep. of $G_n(\mathbf{A})$

$\pi_f = \otimes_{v:\text{finite}} \pi_v$: irr. smooth rep. of $G_n(\mathbf{A}_f)$

に対して $E = \mathbf{Q}(\pi) = \mathbf{Q}(\pi_f)$ を the field of rationality of π_f という。次が証明できる。

(4.1) $\exists V_E \subset V$: $G_n(\mathbf{A}_f)$ -invariant subspace over E such that $V = V_E \otimes_E \mathbf{C}$

(4.2) V_E is unique up to complex homotheties

(4.3) $\mathbf{Q}(\pi) = \prod_{v:\text{finite}} \mathbf{Q}(\pi_v)$

不分岐表現の場合

L : p-adic field

$\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$: unramified character of $H_n(L)$

$\pi^T(\chi) = J(\chi_1 \mid \cdot|^{\frac{n-1}{2}}, \dots, \chi_n \mid \cdot|^{\frac{n-1}{2}})$: Langlands subquotient

$t_\chi = (\chi_1(\varpi_L), \dots, \chi_n(\varpi_L)) \in {}^L H_n^0$

とおく。このとき

(4.4) ${}^\sigma(\pi^T(\chi)) \cong \pi^T({}^\sigma \chi)$ for any $\sigma \in \text{Aut}(\mathbf{C})$

(4.5) $\mathbf{Q}(\pi^T(\chi)) = \mathbf{C}$ の $\{\sigma \mid \sigma(t_\chi) \in S_n t_\chi\}$ による固定体

が成立。 $\pi = \pi^T(\chi)$ のとき $t_\pi^T = q_L^{\frac{1-n}{2}} t_\chi \in {}^L H_n^0 / S_n$ とおく。

Euler factor との関係

π : irr. admissible rep. of $G_n(L)$

$L(\pi, s)$: (Godement - Jacquet type) Euler factor of π , i.e.

$$\text{P.G.C.D.} \left\{ \int_{G_n(L)} \Phi(g) f(g) |\det g|^{s + \frac{n-1}{2}} d^\times g \mid \begin{array}{l} \Phi \in \text{Schwartz space of } M_n(L) \\ f : \text{coefficient of } \pi \end{array} \right\}$$

次が証明できる。

(4.6) $L(\pi, s + \frac{1-n}{2}) = P(q_L^{-s})^{-1}$, ($P \in \mathbb{C}[X]$, $P(0) = 1$) とするとき $L({}^\sigma \pi, s + \frac{1-n}{2}) = {}^\sigma P(q_L^{-s})^{-1} \quad \forall \sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. (${}^\sigma P$ は P の係数に σ を作用させたもの)

Infinite type π の $\text{Aut}(\mathbb{C})$ の作用

$\pi \in \text{Alg}(n)$

$p(\pi) = p = (p_i)_{i \in I} \in (\mathbb{Z}^n / S_n)^I$: infinite type of π

$\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ に対して、 ${}^\sigma p$ を $({}^\sigma p)_i = p_{\sigma^{-1}i}$ ($i \in I$) で定義する。

5. 予想と結果

Conjecture B

$\pi \in \text{Alg}^0(n)$ のとき、

(1) $E = \mathbb{Q}(\pi)$ は有限次代数体になる。

(2) $\forall \sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, $\exists {}^\sigma \pi \in \text{Alg}(n)$ s.t. $({}^\sigma \pi)_f = {}^\sigma \pi_f$ and $p({}^\sigma \pi) = {}^\sigma p(\pi)$

和 " + " と $\text{Aut}(\mathbb{C})$ の作用との compatibility 及び (3.1) から、予想がすべての $\pi \in \text{Alg}^0$ について正しいならば、同じ事がすべての $\pi \in \text{Alg}$ についても成立することが分る。また上の予想が正しいとき、(4.6) と合せて π の L-関数の有限部分 $L_f(\pi, s + \frac{1-n}{2})$ は E に係数をもつ Dirichlet 級数と成ることが分る。特に、不分岐素点では

$$t_{\pi, v}^T \in ({}^L H_n^0 / S_n)(E)$$

を導く。逆に次が予想される。

Conjecture C

π : irr. automorphic rep. of $G_n(\mathbf{A})$ について

$\exists E$: 有限次代数体 s.t. $t_{\pi, v}^T \in ({}^L H_n^0 / S_n)(E)$ for almost all $v \implies \pi \in \text{Alg}(n)$

これは $n = 1$ のとき、Weil によって予想され Waldschmidt によって証明された。
Conjecture B に関する結果を述べる。

Definition

$\pi \in \text{Alg}(n)$

$p(\pi) = (p_i)_{i \in I} = ((p_{i,1}, \dots, p_{i,n}))_{i \in I}$: infinite type of π とするとき、

$$\pi : \text{regular} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall i \in I, p_{i,i} \neq p_{i,j} \text{ if } i \neq j$$

と定義する。

(例: $\pi \in \text{Alg}(2) : \text{regular} \implies \pi_\infty \cong \sigma(\alpha^s, \alpha^{s+k} \text{sgn}^{k+1}) \text{ or } \alpha^s \circ \det$)

Theorem(Clozel)

$\pi \in \text{Alg}^0(n) : \text{regular} \implies \pi$ について Conjecture B は正しい。

6. 定理の証明の概略

簡単のため $F = \mathbf{Q}$, $n = 2m$ の場合を説明する。以下のように記号を定める。

A = connected component of the center of $G_n(\mathbf{R})$

$\mathcal{A} = \text{Lie}(A)_{\mathbf{C}}$

$\mathcal{G} = \text{Lie}(G_n(\mathbf{R}))_{\mathbf{C}} = \mathcal{G}^1 \oplus \mathcal{A}$: Langlands decomposition

$K_\infty = O_n(\mathbf{R})$: maximal compact subgroup of $G_n(\mathbf{R})$

$K \subset G_n(\mathbf{A}_f)$: open compact subgroup

$S_K = G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}) / K_\infty K$, $\tilde{S} = \varprojlim S_K$

$S_K^1 = AG(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}) / K_\infty K$

さて

$\pi \in \text{Alg}^0(n) : \text{regular}$

$p(\pi) = (p_1, \dots, p_n)$: infinite type of π ($p_1 > p_2 > \dots > p_n$ としてよい)

$(\bar{\tau}, \bar{V})$: rational representation of G_n of highest weight $(p_1, p_2 + 1, \dots, p_n + (n - 1))$

(このとき $\bar{\tau}$ と π は同じ infinitesimal character を持ち、また $\bar{\tau}|_A = \pi|_A$ となる)

(τ, V) : contragredient representation of $(\bar{\tau}, \bar{V})$

$\mathcal{V}$: local system on S_K (or S_K^1) defined by V

とする。このとき V に係数を持つ各種のコホモロジーは次の関係を持つ。

$$(6.1) \quad \begin{array}{ccc} & H_{\text{cusp}}^\bullet(\tilde{S}, \mathcal{V}) & \hookrightarrow H^\bullet(\tilde{S}, \mathcal{V}) \cong H_B^\bullet(\tilde{S}, \mathcal{V}_{\mathbf{Q}}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \\ & \parallel & \\ \bigoplus_{\substack{\xi \\ \text{cuspidal rep.} \\ \xi|_A = \bar{\tau}|_A}} & H^\bullet(\mathcal{G}^1, K_\infty; \xi_\infty \otimes V) \otimes \xi_f^K & \end{array}$$

$$(6.2) \quad \begin{array}{ccc} H_{\text{cusp}}^\bullet(S_K^1, \mathcal{V}) & \hookrightarrow H_!^\bullet(S_K^1, \mathcal{V}) \hookrightarrow & \overline{H}_{(2)}^\bullet(S_K^1, \mathcal{V}) \\ \parallel & & \parallel \\ \bigoplus_{\substack{\xi \subset L_{\text{cusp}}^2(G_n(\mathbf{Q}) \backslash G_n(\mathbf{A})) \\ \xi|_A = \bar{\tau}|_A}} \xi & H^\bullet(\mathcal{G}^1, K_\infty; \xi_\infty \otimes V) \otimes \xi_f^K & \bigoplus_{\substack{\xi \subset L_{\text{disc}}^2(G_n(\mathbf{Q}) \backslash G_n(\mathbf{A})) \\ \xi|_A = \bar{\tau}|_A}} \xi & H^\bullet(\mathcal{G}^1, K_\infty; \xi_\infty \otimes V) \otimes \xi_f^K \end{array}$$

ここで

$H_B^\bullet(S_K, \mathcal{V}_{\mathbf{Q}})$: Betti cohomology with coefficients in the $\mathbf{Q}$ -vector space $\mathcal{V}_{\mathbf{Q}}$

$H^\bullet(S_K, \mathcal{V}) \cong H^\bullet(\mathcal{G}, K_\infty; C^\infty(S_K) \otimes V)$

$$H_{\text{cusp}}^*(S_K, \mathcal{V}) = \text{Im}(H^*(\mathcal{G}, K_\infty; C^\infty(S_K) \cap L_{\text{cusp}}^2(S_K) \otimes V) \rightarrow H^*(\mathcal{G}, K_\infty; C^\infty(S_K) \otimes V))$$

$$H_!^*(S_K, \mathcal{V}) = \text{Im}(H_c^*(S_K, \mathcal{V}) \rightarrow H^*(S_K, \mathcal{V}))$$

$$\overline{H}_{(2)}^i(S_K^1, \mathcal{V}) = \{\phi \in \Omega_{(2)}^i(S_K^1, V); d\phi = 0\} / \overline{d\Omega_{(2)}^{i-1}(S_K^1, V)}$$

$$\Omega_{(2)}^i(S_K^1, V) = \{\phi; V\text{-valued } i\text{-form on } S_K^1 \text{ s.t. } \phi \text{ and } d\phi \text{ are square integrable}\}$$

また、 $H^*(\tilde{S}, \mathcal{V}) = \varinjlim H^*(S_K, \mathcal{V}), \dots$ e.t.c. とする。 $(S_K^1$ についても同様)。

さて π の regularity の仮定は次を導く。

$$(6.3) \quad H^i(\mathcal{G}^1, K_\infty; \pi_\infty \otimes V) \cong \wedge^{i-m^2} \mathbb{C}^{m-1}$$

従って、 π_f, π_f^K は、それぞれ、 $H^*(\tilde{S}, \mathcal{V}), H^*(S_K^1, \mathcal{V})$ の中に実現される。このとき、(6.1) と次の事実は $\mathbb{Q}(\pi)$ が有限次代数体になることを示す。

(6.4) If W is a $G(\mathbf{A}_f)$ -irreducible subquotient of $H^*(\tilde{S}, \mathcal{V})$, then there exists a finite extension E of $\mathbb{Q}$ such that W is defined over E

次に $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ に対して Conjecture B (2) の条件をみたす $\sigma\pi \in \text{Alg}^0(n)$ を構成する。 K を $\pi^K \neq \{0\}$ と取る。 $H_!^*(S_K^1, \mathcal{V})$ は $\mathbb{Q}$ 上定義されているから σ で不変。よって、 $\sigma\pi_f^K$ も $H_!^*(S_K^1, \mathcal{V})$ の中に実現される。(6.2) より、 $\overline{H}_{(2)}^*(S_K^1, \mathcal{V})$ に現れる既約部分表現 $\xi \in L_{\text{disc}}^2(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbf{A}))$ で $\xi_f^K = \sigma\pi_f^K$ と成るものを取れば、それが求める $\sigma\pi$ である。実際、既約性と $H^*(\mathcal{G}^1, K_\infty; \xi_\infty \otimes V) \neq 0$ より $\sigma\pi_f = \xi_f, p(\pi) = p(\xi)$ が従う。また、誘導表現についての議論から ξ が cuspidal であることも分る。

7. ℓ -進表現との対応

以下、基礎体 F を明示するために、 $\text{Alg}, \text{Alg}(n), \dots$ の代りに $\text{Alg}(F), \text{Alg}(n, F), \dots$ とかく。

Motif

F 上の smooth projective variety (の圏) に付随する各種のコホモロジー理論を統合する object (の圏) が存在すると予想されている。その conjectural な圏を $\mathcal{M}(F)$ とかく。

Algebraic 表現の weight

$$\pi \in \text{Alg}(n, F)$$

$$\pi_\iota \longleftrightarrow r_\iota \in \Phi_n(W_{\mathbf{R}}), (\iota \in I)$$

$$r_\iota(z) = z^{\mu_\iota} \bar{z}^{\nu_\iota}, (z \in \mathbb{C}, \mu_\iota, \nu_\iota \in \mathcal{H})$$

とする。もし

$$\exists \omega \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad \mu_\iota + \nu_\iota = (\omega + n - 1, \dots, \omega + n - 1) \quad \text{for all } \iota \in I$$

が成立つとき π は pure weight ω を持つという。次が証明できる。

$$(7.1) \quad \forall \pi \in \text{Alg}^0(n, F), \quad \exists \omega \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad \pi \text{ は pure weight } \omega \text{ を持つ}$$

(この結果は一般の基礎体における (6.3) の証明にも使われている。)

Conjecture B が正しいとの仮定のもとで、motif と algebraic 表現との対応関係を示す次の予想がある。

Conjecture D

$\pi \in \text{Alg}^0(n, F)$

ω : weight of π

$E \subset \overline{\mathbf{Q}}$: field of definition of π

とする。このとき

$\exists E'$: finite extension of E

$\exists M \in \mathcal{M}(F)$: irreducible motif of degree n and weight ω with coefficients in E' s.t.

$$L(\pi_v, s + \frac{1-n}{2}) = L_v(M, s) \quad \text{for all finite place } v \text{ of } F$$

ここで

$$L_v(M, s) = \det((1 - \mathcal{F}_v q_v^{-s})|_{H_\lambda(M)_{I_v}})^{-1}$$

但し

$H_\lambda(M)$: λ -adic realization of M

$I_v \subset \text{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$: inertia group

$\mathcal{F}_v$: Frobenius element of v

とする。

最後に、Conjecture D との関連で、algebraic 表現に対応する ℓ -進表現の構成についての結果を述べる。

Theorem (Clozel)

$\pi \in \text{Alg}^0(n, \mathbf{Q})$: regular かつ $\pi \cong \tilde{\pi}$ で次をみたすとする。

$$\begin{aligned} 4 \nmid n &\implies \exists p_0 = p_1 \quad \text{s.t. } \pi_{p_0} \text{ is square integrable} \\ 4 \mid n &\implies \exists p_0 \neq p_1 \quad \text{s.t. } \pi_{p_0} \text{ and } \pi_{p_1} \text{ are square integrable} \end{aligned}$$

更に

F : imaginary quadratic field in which p_0 and p_1 split

π_F : base change lift of π to F

とする。このとき

$\exists E$: 有限次代数体

$\exists S$: 素数の有限集合

$\exists a(\pi) > 0$: 整数

$\exists (W_\lambda, r_\lambda)$: compatible system of λ -adic representations of $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ s.t.

if $p \notin S$ and $\lambda \nmid p$,

$$\text{trace}(r_\lambda(\mathcal{F}_v^m)) = a(\pi) \text{trace}((t_{\pi_F, v}^T)^m q_v^{m(n-1)})$$

for all finite places $v \mid p$ of F and $m \geq 0$.

この結果の証明は現時点では詳しく述べられていないが、概略は、Jacquet - Langlands 対応により π_F に対応する division algebra の乗法群の表現 τ_F を考えると、これが $\mathbb{Q}$ 上定義されたユニタリ群の表現 τ の base change lift によって得られる事が分り、一方、ユニタリ群の表現 τ には最近の Kottwitz の結果 (まだ未発表) により l -進表現を対応させることができるというものである。

Remark. 論文では上と同様の結果が $\mathbb{Q}$ を総実体で置き換えても成立すると注意されている。

REFERENCES

1. A. Borel and N. Wallach, "Continuous Cohomology, Discrete Subgroups and Representations of Reductive Groups," Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1980.
2. L. Clozel, *Motifs et formes automorphes : Applications du principe de fonctorialité*, in "Automorphic Forms, Shimura Varieties and L-Functions Conference," Academic Press.
3. N. Kurokawa, 波動形式の代数性, in "整数論と保型形式," 数理研講究録 689, 1989, pp. 185 - 194.
4. G. Harder, *Eisenstein cohomology of arithmetic groups : The case GL_2* , Inv. Math. **89** (1987), 37 - 118.
5. R. P. Langlands, *Automorphic representations, Shimura varieties and motives, Ein Märchen*, in "Automorphic Forms, Representations and L-Functions," Proc. Symp. Pure Math. **33**, 1979, pp. 205 - 246.
6. M. Waldschmidt, *Sur certains caractères du groupe des classes d'idèles d'un corps de nombres*, Seminaire Theories des Nombres (1980/81), 323 - 335.