

Norm Inequality for Operator Monotone Functions

大阪教育大 藤井 淳一 (Jun Ichi FUJII)

昨年末から、Loewner-Heinz の不等式と同値な不等式：

$$(1) \quad \|A^r B^r\| \leq \|AB\|^r \quad (0 \leq r \leq 1) \quad A, B \text{ は正作用素}$$

を巡ってさまざまな議論がなされたが、ここではその一般化について見てみたい。

すぐに考えられることは、 r 乗の作用素単調性から、作用素単調関数 f による

$$(2) \quad \|f(A)f(B)\| \leq f(\|AB\|)$$

という形であるが、これはあまりよくないことが、簡単な例によってわかる。ここで、作用素単調関数とは次を満たす 0 でない非負連続関数 f とし、そのクラスを OM とかく：

$$(3) \quad 0 \leq A \leq B \Rightarrow 0 \leq f(A) \leq f(B)$$

一般化がうまくいかない原因は、(2) が一般には homogeneous でないことにあり、それに代わるある種の条件が f について必要と思われる。さらに、(1)において、作用素単調関数として、 r 乗の特殊性に注意する必要があるだろうか。

実は、久保-安藤による作用素平均の理論において、 r 乗は self-adjoint な作用素単調関数になっているという事情がある。adjoint $*$ の典型的な例は、代表的な平均、算術平均 a 、幾何平均 g 、調和平均 h においてみられ、 $a^*=h$ 、 $h^*=a$ 、 $g^*=g$ という関係がある。adjoint $*$ の定義を関数的に述べるならば、

$$(4) \quad f^*(t) = 1/f(1/t).$$

このとき、次のことがわかる：

【定理1】 submultiplicative な作用素単調関数 f に対して、

$$(5) \quad \|f(A)f^*(B)\| \leq f(\|AB\|) \quad (A, B \geq 0).$$

ここで、 f が submultiplicative とは、次を満たすことをいう：

$$(6) \quad f(ts) \leq f(t)f(s).$$

submultiplicative な作用素単調関数 f については、次のことがわかる：

- ① $f(1) \geq 1, f(1) = 1 \Leftrightarrow f: \text{multiplicative}$
- ② $f^*: \text{anti-submultiplicative}$
- ③ $F_{c,d}(t) \equiv c + df(t): \text{submultiplicative} \quad (c, d \geq 1)$

これより、一見自明でないような正作用素のノルム不等式がえられる。たとえば：

$$\|(1+A)B(1+B)^{-1}\| \leq 1 + \|AB\|$$

submultiplicative でないような関数 (例えば $\log 1+t$) でも、③の変換によって、submultiplicative になることがある ($1 + \log 1+t$)。例に対応するノルム不等式は：

$$\|(1+\log(1+A))(1+\log(1+B^{-1}))^{-1}\| \leq 1 + \log(1 + \|AB\|)$$

また、(1) の不等式と同様に、一般の作用素 X, Y に対しては、次のように一般化できる：

$$(5') \quad \|f(|X|)f^*(|Y^*|)\| \leq f(\|XY\|).$$

一方、定理1の証明において、作用素単調性の次の性質が利用されたのだった：

$$(7) \quad 0 \leq A^2 \leq B^2 \Rightarrow 0 \leq f(A)^2 \leq f(B)^2$$

この性質を満たすような submultiplicative な単調関数であれば定理1は成立する。

たとえば、 $\sqrt{1+t}$ などがそれであるが、これは作用素単調でないので(7)を満たすクラスは

properly に、作用素単調のクラスよりも大きい。このような作用素単調関数の一般化は、既に Hansen によっても試みられているが、ここでもそれに習って一般化を試みる。(7)と同様に、

$$(8) \quad 0 \leq A^n \leq B^n \Rightarrow 0 \leq f(A)^n \leq f(B)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

を満たす非負連続関数を n-作用素単調 と呼び、そのクラスを OM_n と書く。そのとき、次のことがわかる：

【定理 2】 次のように定められた $\Phi_n: OM_n \rightarrow OM$ は、bijection である：

$$\Phi_n(F)(t) = F(t^{1/n})^n.$$

【定理 3】 非負関数 F が、定数関数でないとき、 $F \in OM_n$ の同値条件は、

F が、角領域 $\{z \mid 0 < \text{Arg } z < \pi/n\}$ への解析接続を持ち、これを不変にすることである。

これらのことから、 $OM_n \subseteq OM_{n+1}$ がわかるし、また、 OM_n が、合成によって閉じていることもすぐにわかる。したがって、作用素単調関数のさまざまな積分表示を利用すれば、n-作用素単調関数の積分表示もわかる。たとえば、久保-安藤理論のそれを利用すれば、

$$F(t) = a + b t^n + \int_0^\infty \frac{t^n(1+x)}{t^n+x} d\mu(x)$$

(ここで $a, b \geq 0$ で、 $d\mu$ は、 $[0, \infty)$ 上の正 Radon 測度) とかける。

References

- [1] H.O.Cordes: *Spectral Theory of Linear Differential Operators and Comparison algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Series 76, 1987.
- [2] W.F.Donoghue, Jr.: The interpolation of quadratic norms, *Acta Math.*, 118(1967), 251-270.
- [3] W.F.Donoghue, Jr.: *Monotone matrix functions and analytic continuation*, Berlin, Heiderberg, New York, Springer 1974.
- [4] J.I.Fujii: Operator monotone functions and Donoghue's theorem, *Math. Japon.*, 31(1986), 319-328.
- [5] J.I.Fujii, F.Kubo and K.Kubo: A parametrization between operator means, *Math. Japon.*, 33(1988), 201-208.
- [6] J.I.Fujii and M.Fujii: A norm inequality for operator monotone functions, to appear.
- [7] J.I.Fujii and M.Fujii: An analogue to Hansen's theory of generalized Loewner's functions, to appear.
- [8] T.Furuta: Norm inequalities equivalent to Loewner-Heinz theorem, *Reviews in Math. Phys.*, 1
- [9] F.Hansen: Selfadjoint means and operator monotone functions, *Math. Ann.*, 256(1981), 29-35.
- [10] F.Kubo and T.Ando: Means of positive linear operators, *Math. Ann.*, 246(1980), 205-224.
- [11] G.K.Pedersen: Some operator monotone functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 36(1972), 309-310.