

Subnormal operator に関する Scott Brown の定理について

神奈川大 工 泉池 敬司

§ 0. 序. H を separable, 無限次元のヒルベルト空間とする。ここでは作用素はすべて有界とする。作用素の不変部分空間の問題は色々と研究されているが、今までに解かれるに至っていない。normal 作用素に對しては自明でない不変部分空間が存在することはよく知られている。最近 subnormal 作用素も自明でない不変部分空間を持つことが, S. Brown によって示された。その後その idea が拡張されていく。ここでは S. Brown とその後の動きを紹介したい。

§ 1. Subnormal 作用素の Conway and Olin の結果.

S を H 上の subnormal 作用素とする。あるいは, H を含むヒルベルト空間 K とその上の normal 作用素 N で $NH \subset H$, $N|_H = S$ なるものが存在する。今後 N は S の minimal normal extension (m.n.e.) とする。normal 作用素 N に對して次を

みたす正測度 μ が存在する。

- 1) μ の support は N の スペクトル $\sigma(N)$ と一致する。
- 2) $\exists \rho: L^\infty(\mu) \rightarrow W^*(N)$ $*$ -isomorphism, $\equiv \equiv$ $W^*(N)$ は N 生成の von Neumann algebra である。
- 3) $\rho(z) = N, \quad \rho(1) = I$
- 4) $L^\infty(\mu)$ と $W^*(N)$ は弱*位相と弱作用素位相にて homeo である。

この μ を N の scalar spectral measure といい。 $L^\infty(\mu)$ は多項式の $L^\infty(\mu)$ にての弱*位相での閉包とする。 $L^\infty(\mu)$ の f に対し $f(N) \equiv \rho(f)$ とかく。 $f(N)H \subset H$ より $f(S) \equiv f(N)|_H$ とする。 $L^\infty(\mu)$ の構造は Sarason [11] により与えられている。これを用いて subnormal 作用素の性質を導くのが Conway and Olin [5] の仕事である。S. Brown がう見るとこれは、不変部分空間の問題を reduce するためのものである。

Sarason 定理. compact set $\tilde{K}$ と $\tilde{\mu} \leq \mu$ に対しみたすものが存在する。 $L^\infty(\mu) = L^\infty(\mu - \tilde{\mu}) \oplus H^\infty(\text{int } \tilde{K}, \tilde{\mu})$ かつ $R(\tilde{K})$ は Dirichlet algebra. $\equiv \equiv$ $R(\tilde{K})$ は $\tilde{K}$ の外に pole を持つ rational fts の一様近似で、 $H^\infty(\text{int } \tilde{K}, \tilde{\mu})$ は簡単に書くと $\text{int } \tilde{K}$ で有界正則関数を $\tilde{\mu}$ に制限したものの全体である。

$f \in L^\infty(\mu)$ ならば $f(S)S = Sf(S)$ より $f(S)H$ は S の不変部分空間である。よって: $L^\infty(\mu - \tilde{\mu})$ -part あり 又は $\text{int } \tilde{K}$

の component が2以上あるならば, S は自明でない不変部分空間を持つことになる。よって subnormal 作用系の不変部分空間は次の時を考えればよい。

① $P^\infty(\mu) = H^\infty(\text{int } \tilde{K}, \mu)$ で $\text{int } \tilde{K}$ は simply connected.

次に明らかに自明でない不変部分空間を持つ場合を除くことにする。Bram 定理より $\alpha(S)$ は $\alpha(N)$ の hole のいくつかをうめたものである。 $\alpha(N) \neq \alpha(S)$ ならば $\lambda \in \alpha(S) \setminus \alpha(N)$ に対し $(S - \lambda)H$ は自明でない S の不変部分空間になる。

② $\alpha(S) = \alpha(N)$ と仮定してよい (= support (μ))

$a \in H$ が cyclic とは $\{S^n a \mid n=0,1,2,\dots\}$ より生成される内部分空間が H と一致する時にいう。

③ S は cyclic vector を持つと仮定してよい。

すると複素平面上の測度 λ が存在して S は $H^2(\lambda)$ 上の z を乗算する作用系 M_z と unitary equivalent になる。ここで $H^2(\lambda)$ は多項式の $L^2(\lambda)$ -closure である。よって $S = M_z$ on $H^2(\lambda)$ と仮定してよい。よって $N = M_z$ on $L^2(\lambda)$ であり, λ はその scalar spectral measure である。

以上より次の場合に不変部分空間の問題を考えなければならない。

④ $S = M_z$ on $H^2(\mu)$ かつ $P^\infty(\mu) = H^\infty(\text{int } \tilde{K}, \mu)$ ($\text{int } \tilde{K}$ は simply connected)

今少し問題を reduce する。 $\text{int } \tilde{K}$ が simply connected より

$U = \{z \mid |z| < 1\}$ とすると conformal map $\varphi: \text{int } K \rightarrow U$ が存在する。 φ により導かれる $\bar{U}$ 上の measure $\varphi(\mu)$ により $H^2(\mu) \ni f \rightarrow f \circ \varphi \in H^2(\varphi(\mu))$ は isometry となり, かつ不変部分空間も保存される。よって subnormal 作用素の不変部分空間の問題は次に変形される。

問題: $L^\infty(\mu) = H^\infty(U, \mu)$ なる時 M_π on $H^2(\mu)$ は不変部分空間を持つか?

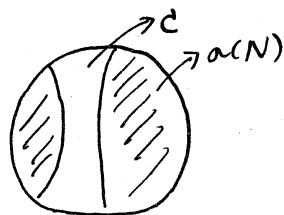
さて $L^\infty(\mu) = H^\infty(U, \mu)$ なる時次の2つの場合が考えられる。

$$[1] \quad \exists f \in H^\infty(U) \quad \text{s.t.} \quad \|f\|_\infty^U > \|f\|_\infty^{U \cap \alpha(N)}$$

$$[2] \quad \forall f \in H^\infty(U) \quad \|f\|_\infty^U = \|f\|_\infty^{U \cap \alpha(N)}$$

定理. [1] の場合 S は reducing subspace を持つ。

(略証) 条件より $\alpha(N) = \alpha(S)$ の hole C で $\bar{C} \cap \partial U$ が2点以上になるものがある。 $R(\bar{U} \setminus C)$ は D -algebra である。その



harmonic measure を m とする。

$$\mu|_{\partial(\bar{U} \setminus C)} \ll m \quad \text{又は} \quad \mu|_{\partial(\bar{U} \setminus C)} \not\ll m$$

$$\text{である。} \quad \overline{R(\bar{U} \setminus C)}^{w* L^\infty(\mu)} H^2(\mu) \subset H^2(\mu)$$

に注意する。 $\mu|_{\partial(\bar{U} \setminus C)} \not\ll m$ ならば $\overline{R(\bar{U} \setminus C)}$ は L^∞ -summand を含み, $H^2(\mu)$ は L^2 -summand を含む。故に reducing subspace を持つ。もし $\mu|_{\partial(\bar{U} \setminus C)} \ll m$ ならば m は $\partial(\text{int}(\bar{U} \setminus C))$ に台をもつから $\bar{U} \setminus C$ は内集をもつ2つの部分に分かれる。

$$f = -\bar{f} \text{ 且 } \bar{f} \geq 0 \text{ であるとすると } f \in \overline{R(\bar{U} \setminus C)} \text{ となり } f \in H^2(\mu)$$

は reducing subspace となる。

[2] の時, S が不変部分空間を持つ ということが S. Brown の定理である。

§ 2. S. Brown 定理の証明. ([3])

$C_1 \subset B(H)$ を trace class とする。 $C_1^* = B(H)$ である。

$B(H)$ に入る w^* 位相を α - w -top ということにする。これは $B(H) \ni A \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\langle Ax_i, y_i \rangle|$ ($\sum \|x_i\|^2 < \infty, \sum \|y_i\|^2 < \infty$) を連続にするもの、と弱い位相である。 $T \in B(H)$ に對して

$\{p(T) \mid p \text{ は多項式}\}$ の α - w -閉包を $\mathcal{O}_T$ とかく。 $C_T \equiv C_1 / \mathcal{O}_T^\perp$

とする。その norm を $\|\cdot\|_2$ とかく。 $\mathcal{O}_T$ は C_T の dual である。

す。 $x, y \in H$ に對して $x \otimes y \in C_T$ 且 $[x \otimes y](B) = \langle Bx, y \rangle$

($\forall B \in \mathcal{O}_T$) により定まる。 $\|x \otimes y\|_2 \leq \|x\| \|y\|$ であり

$H \times H \ni (x, y) \rightarrow x \otimes y \in C_T$ は連続である。

$T \in B(H)$ に對して 2 次の性質をもつものを考える。

(a) $H^{\infty}(U) \rightarrow \mathcal{O}_T$ なる onto isometry isomorphism なる

($w^* \rightarrow \alpha$ - w -top) なる homeo なるものを存在する。

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ に對して $T - \lambda, (T - \lambda)^*$ は dense range をもつ

(c) $\forall \lambda \in \sigma(T), \exists x_i \in H$ s.t. $\|x_i\| = 1, \|(T - \lambda)x_i\| + \|(T - \lambda)^*x_i\| \rightarrow 0$

(d) $\|h\|_{\infty}^{\alpha(T) \cap U} = \|h\|_{\infty}^U \quad \forall h \in H^{\infty}(U)$

S. Brown 定理: T が (a) $\sim$ (d) をみたす.

$$\Rightarrow \forall \lambda \in C_T \quad \exists x, y \in H \text{ s.t. } \lambda = x \otimes y$$

系. subnormal 作用素は自明でない不変部分空間をもつ.

(証明) S の reduction より subnormal 作用素 S は (d)

をみたすと仮定してよい. (b) と (c) も成立すると仮定してよい.

さもないとすでに自明でない不変部分空間を持つことがわかる.

(Conway and Olin より) $H^\infty(U) \ni f \rightarrow f(S) \in \mathcal{O}_S$ は (1) をみたす.

すなわち $C_0: \mathcal{O}_S \ni f(S) \rightarrow f(0)$ は α -w 連続である. よって

定理より $\exists x, y \in H$ s.t. $C_0 = [x \otimes y]$ ($x \neq 0, y \neq 0$ である).

$M \subseteq \{S^n x \mid n=1, 2, \dots\}$ より生成される部分空間とする.

$\langle S^n x, y \rangle = C_0(S^n) = z^n(0) = 0$ より $M \perp y$ である. よって

$M \subsetneq H$ である. もし $M = \{0\}$ ならば $Sx = 0, x \neq 0$ より

$\ker S$ が自明でない不変部分空間である. したがって (2) も自明でない不変部分空間をもつ.

次に定理の証明に移ろう. $\lambda \in U$ に対して

$C_\lambda: \mathcal{O}_T \ni f(T) \rightarrow f(\lambda)$ とする.

Lemma 1. T は (a) をみたし, $\exists x_i \in H$ s.t. $\|x_i\|=1$,

$\|(T-\lambda)x_i\| \rightarrow 0 \ (i \rightarrow \infty)$ とする. $\lambda \in U$

$$\Rightarrow \|x_i \otimes x_i - C_\lambda\|_2 \rightarrow 0$$

(証明) $h(T) \in \mathcal{O}_T, \|h(T)\|=1$ とする. $\|h\|_w=1$ である.

$h(z) - h(\lambda) = (z-\lambda)g(z)$ と書けて $d = \text{dist}[\lambda, \partial U]$ とすると

$$\|g(z)\|_\infty \leq 2\|h\|_\infty d^{-1} \quad \text{よって} \quad \|g(T)\| \leq 2\|h\|_\infty d^{-1}.$$

$$\begin{aligned} |\langle x_i \otimes x_i - c_\lambda \rangle (h(T))| &= |\langle h(T) x_i, x_i \rangle - h(\lambda)| \\ &= |\langle \{h(T) - h(\lambda)\} x_i, x_i \rangle| = |\langle g(T)(T-\lambda) x_i, x_i \rangle| \\ &= \|(T-\lambda) x_i\| \|g(T)^* x_i\| \leq \|(T-\lambda) x_i\| 2\|h\|_\infty d^{-1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Lemma 2. T は (b), (c) を満たすとする. (c) より異なる

$\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(T)$ には $\exists \neq$ して unit vectors x_i, y_i を

$$\|(T-\lambda_1) x_i\|, \|(T-\lambda_1)^* x_i\|, \|(T-\lambda_2) y_i\|, \|(T-\lambda_2)^* y_i\| \rightarrow 0$$

が存在する. このとき

$$1) \quad \|x_i \otimes y_i\|_Q \rightarrow 0$$

$$2) \quad \|x_i \otimes s\|_Q \rightarrow 0 \quad (\forall s \in H)$$

$$3) \quad \|s \otimes x_i\|_Q \rightarrow 0 \quad (\forall s \in H)$$

(証明) 1) $\exists B_i \in \mathcal{O}_T$ ($\|B_i\|=1$) s.t. $\|x_i \otimes y_i\|_Q = \langle B_i x_i, y_i \rangle$

$$\text{よって} \quad |\langle B_i (T-\lambda_2) x_i, y_i \rangle - \langle B_i (\lambda_1 - \lambda_2) x_i, y_i \rangle| \rightarrow 0$$

$$|\langle B_i (T-\lambda_2) x_i, y_i \rangle| = |\langle B_i x_i, (T-\lambda_2)^* y_i \rangle| \rightarrow 0$$

$$\therefore (\lambda_1 - \lambda_2) \langle B_i x_i, y_i \rangle \rightarrow 0 \quad \therefore \|x_i \otimes y_i\|_Q \rightarrow 0$$

$$2) \quad \exists B_i \in \mathcal{O}_T \quad (\|B_i\|=1) \quad \text{s.t.} \quad \|x_i \otimes s\|_Q = \langle B_i x_i, s \rangle$$

(b) より $\forall \varepsilon > 0$ には $\exists t \in H$ s.t. $\|(T-\lambda_1)^* t - s\| < \varepsilon$

$$\therefore |\langle B_i x_i, s \rangle - \langle B_i x_i, (T-\lambda_1)^* t \rangle| < \varepsilon$$

$$|\langle B_i x_i, s \rangle - \langle B_i (T-\lambda_1) x_i, t \rangle| < \varepsilon$$

$$\therefore \exists \varepsilon_0 \quad \text{s.t.} \quad \forall \varepsilon > \varepsilon_0, \quad |\langle B_i x_i, s \rangle| < \varepsilon$$

$$\therefore \|x_i \otimes s\|_Q \rightarrow 0$$

$$3) \exists B_i \in \mathcal{O}_T \ (\|B_i\|=1) \text{ s.t. } \|S \otimes x_i\|_0 = [S \otimes x_i](B_i) = \langle B_i, S, x_i \rangle$$

$$\text{条件より } \forall \varepsilon > 0 \exists t \in H \text{ s.t. } \|(T - \lambda_1)t - s\| < \varepsilon$$

$$\therefore 2 |\langle B_i, (T - \lambda_1)t, x_i \rangle - \langle B_i, s, x_i \rangle| < \varepsilon$$

$$-\bar{\rho} \langle B_i, (T - \lambda_1)t, x_i \rangle = \langle B_i, t, (T - \lambda_1)^* x_i \rangle \rightarrow 0$$

$$\therefore 2 \exists \delta_0 > 0 \text{ s.t. } \forall \delta > \delta_0 \quad |\langle B_i, s, x_i \rangle| < \varepsilon$$

$$\therefore \|S \otimes x_i\|_0 \rightarrow 0$$

Lemma 3. T は (d) を満たすとはす。

$$\Sigma(T) = \{C_\lambda \mid \lambda \in a(T) \cap U\} \subset C_T \text{ とする。}$$

$$\Rightarrow \overline{\bigcup_{|\lambda|=1} (\lambda \Sigma(T))} = \text{closed unit ball of } C_T$$

(証明) 左辺は β' , 右辺は β とする。 $\beta' \subset \beta$ は明らか。

$K \in \beta - \beta'$ とする。

$$\exists \psi \in H^0(U) \text{ s.t. } \begin{cases} [\psi(T)](K) = 1 \\ \exists r < 1 \text{ s.t. } |[\psi(T)](K')| < r < 1 \ (\forall K' \in \beta') \end{cases}$$

$$\text{すると } \|\psi(T)\| = \|\psi\|_0 \geq 1, \text{ したがって (d) より } \|\psi\|_{\psi}^{a(T) \cap U} \geq 1$$

$$\therefore |\psi(\lambda)| > r \quad \therefore |[\psi(T)](C_\lambda)| = |\psi(\lambda)| < r \text{ 矛盾}$$

Lemma 4. $\mathcal{L} \in C_T$ として $s_n, s'_n \in H$ と $\|s_n \otimes s'_n - \mathcal{L}\|_0 < \frac{1}{2^{2n}}$ とする。 T は (a) ~ (d) を満たす。

$$\Rightarrow \exists s_{n+1}, s'_{n+1} \in H \text{ s.t. } \|s_n - s_{n+1}\| < \frac{1}{2^n}, \|s'_n - s'_{n+1}\| < \frac{1}{2^n}$$

$$\|s_{n+1} \otimes s'_{n+1} - \mathcal{L}\| < \frac{1}{2^{2(n+1)}}$$

(略証) $K = \mathcal{L} - s_n \otimes s'_n$ とする。 Lemma 3 より

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in U \cap a(T)$ と $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ なる数がある

のが存在する。 $\sum_{j=1}^m |c_j| < \frac{1}{2^{2n}}$, $\|K - \sum_{j=1}^m c_j c_j\|_Q < \frac{1}{2^{2(n+1)}}$

各 j に対し 2 unit vector $\{t_{j,i}\}_{i=1}^\infty$ を $\|(T - \lambda_j) t_{j,i}\| \rightarrow 0$

$\|(T - \lambda_j)^* t_{j,i}\| \rightarrow 0$ であるように取る。 $\beta_j \equiv \frac{c_j}{|c_j|}$ とおく。

$K_i \equiv (s_n + \sum_{j=1}^m \sqrt{c_j} \beta_j t_{j,i}) \otimes (s'_n + \sum_{j=1}^m \sqrt{c_j} t_{j,i}) \in C_T$ とおく。

Lemma 1, Lemma 2 より $K_i \rightarrow s_n \otimes s'_n + \sum_{j=1}^m c_j c_j$ ($\|\cdot\|_Q$ -norm)

$\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta$ となる i に対して

$$\|L - s_n \otimes s'_n - (K_i - s_n \otimes s'_n)\|_Q < \frac{1}{2^{2(n+1)}}$$

$$\therefore \|L - K_i\| < \frac{1}{2^{2(n+1)}}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \quad \begin{cases} s_{n+1} \equiv s_n + \sum_{j=1}^m \sqrt{c_j} \beta_j t_{j,i_0} \\ s'_{n+1} \equiv s'_n + \sum_{j=1}^m \sqrt{c_j} t_{j,i_0} \end{cases}$$

とおくと十分大なる i_0 に対して Lemma を満たす。

(S. Brown の定理の証明) $\|L\|_Q < 1$ と仮定してよい。

$s_0 = 0, s'_0 = 0$ より出発して Lemma 4 より $\{s_n\}, \{s'_n\}$ が作れる。

$\{s_n\}$ 及び $\{s'_n\}$ は Cauchy 列より $s_n \rightarrow x, s'_n \rightarrow y$ とする

と x, y は定理を満たす。

§ 3. S. Brown, B. Chevreau and C. Pearcy による振動 ([4]).

S. Brown 定理に引き続くて, Agler が次を示した。証明の方

針は Brown の idea と同じである。

J. Agler 定理: $T \in B(H)$ に対して $\alpha(T) = \overline{U}$, $\|T\| = 1$ とする。

$\Rightarrow T$ は自明でない不変部分空間を持つ。

緩い 2 次の形に拡張された。

S. Brown, B. Chevreau and C. Pearcy: $T \in B(H)$ で $\|T\|=1$ が

(*) $\sup_{\lambda \in \alpha(T) \cap U} |h(\lambda)| = \|h\|_\infty \quad (\forall h \in H^\infty(U))$ とする。

$\Rightarrow$ T は自明でない不変部分空間をもつ。

証明の方針はだいたい Brown 定理と同じであるが比較しながら見ることにする。まず T は unitary と completely nonunitary contraction に分解出来るから, T は completely nonunitary contraction と仮定してよい。当然分解 (2.6) をみたす。

① ([7], Ⅲ章定理 2.1) § 2 の (a) がみたされる。

(注意) Nagy & Foias の $\phi: H^\infty(U) \rightarrow \mathcal{O}_T$ の作り方において (*) より ϕ が isometry となり, $\phi(w \mapsto a \cdot w)$ は homomorphism である。

よって $\lambda \in U$ に対し $C_\lambda: \mathcal{O}_T \ni h(t) \mapsto h(\lambda)$, $C_\lambda \in C_T$ が得られる。

② $\alpha(T) = \text{left essential spectrum } \alpha_e(T)$ と仮定してよい。

もしなければ T または T^* は固有値をもつかうである。([10])

よって $\forall \lambda \in \alpha(T)$ に対し $\exists x_i \in H$ s.t. $\|x_i\|=1$, $x_i \perp x_j$ ($i \neq j$)

$\|(T-\lambda)x_i\| \rightarrow 0$ (cf. (c)).

Lemma 1 はこのままの場合に用いることを主張しておこう。

Lemma 2' の 2). $\lambda \in \alpha(T) \cap U$, x_i : orthonormal sequence

s.t. $\|(T-\lambda)x_i\| \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \|x_i \otimes s\|_Q \rightarrow 0 \quad (\forall s \in H) \quad (\text{Lemma 2 の 2}).$$

$$(\text{証明}) \quad \exists h_i \in H^0(U), \|h_i\|=1 \text{ s.t. } \|x_i \otimes s\| = \langle h_i(T)x_i, s \rangle$$

$$h_i(t) = h_i(\lambda) + (t-\lambda)k_i(t) \quad (k_i \in H^0(U)) \text{ とおく。}$$

$$\|x_i \otimes s\|_Q = h_i(\lambda) \langle x_i, s \rangle + \langle k_i(T)(T-\lambda)x_i, s \rangle \rightarrow 0$$

③ $T^n \rightarrow 0$ (s) と仮定してよい。(completely nonunitary contraction たり $T^n \rightarrow 0$ 又は $T^{*n} \rightarrow 0$, $T^{*n} \rightarrow 0$ の時不変部分空間をもち T をもつからでない)

Lemma 2' の 3) $\{x_i\}$ orthonormal sequence

$$\Rightarrow \|s \otimes x_i\|_Q \rightarrow 0 \quad (\forall s \in H) \quad (\text{Lemma 2 の 3})$$

証明は略すが少々面倒かしこい事ではな。③を使う。

Lemma 2' の 1). $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \sigma(T) \cap U$ とする。

$$\Rightarrow \exists \{x_i^j\}, \dots, \{x_i^n\} \text{ mutually orthonormal sequence}$$

$$\text{s.t. } \lim_{i \rightarrow \infty} \|(T-\lambda_j)x_i^j\| = 0 \quad (1 \leq j \leq n) \text{ かつ } \|x_i^j \otimes x_i^k\|_Q \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty)$$

証明は [2] より $\|(T-\lambda_j)x_i^j\| \rightarrow 0$ をおいたすところからとれる。

後半は, $\exists h_i \in H^0(U)$ s.t. $\|h_i\|_\infty = 1$, $\|x_i \otimes y_i\|_Q = \langle h_i(T)x_i, y_i \rangle$

$$h_i(t) = h_i(\lambda) + (t-\lambda)g_i(t) \quad (g_i \in H^0(U)) \text{ とおく}$$

$$\|x_i \otimes y_i\|_Q = \langle g_i(T)(T-\lambda)x_i, y_i \rangle \text{ より従う。}$$

Lemma 3 は § 2 と同様に成立する。

Lemma 4 も同様に証明出来る。ただし途中の unit vector

$\{y_i\}_{i=1}^n$ を取る時は Lemma 2' の 1) を使って取り出せば後はスル

-スに過ぎないからよい。

後の証明の残りは §2 の定理とその系と同じく進めばよい。

(注) この § の T も (a) がみたされた。しかし (a) における isometry の条件は $\|h\|_\infty \leq \|h(T)\| \leq K \|h\|_\infty$ ($\forall h \in H^p(U)$) であつても証明は同じく進められる。この点に注目して次章に進いていく。

§4. J. G. Stampfli による拡張 ([12])

まず定義をしよう。コンパクト $M \subset \mathbb{C}$ が $T \in B(H)$ の K -スペクトラル集合とは $\|f(T)\| \leq K \|f\|_\infty^K$ ($\forall f \in R(K)$) の時にいう。ここで $R(K)$ は K の外に pole をもつ有理関数近似とする。 $K=1$ の時単にスペクトラル集合という。 subnormal 作用素 T に対して $\sigma(T)$ はスペクトラル集合である。 J. Agler 定理の T に対して $\sigma(T) = \overline{U}$ はやはりスペクトラル集合である。

J. G. Stampfli 定理: $\sigma(T)$ が T の K -スペクトラル集合とする。

$\Rightarrow T$ は自明でない不変部分空間をもつ。

この証明も本質的には Brown の方法と同じである。

J. G. Stampfli の証明においては次の Lemma が重要な役割をする。

Lemma 5. $\sigma(T)$ が T の K -スペクトラル集合とする。

T が complemented subspace 上

$\Rightarrow$ 次にわたす simply connected 領域 G で次を満たすものが

存在する。 $\bar{G} \supset \alpha(T)$, $R(\bar{G})$ D-algebra

$$\|h\|_{\infty} = \sup \{|h(\lambda)|; \lambda \in \alpha(T) \cap G\} \quad \forall h \in H^{\infty}(G).$$

よって今考えている T に対して上の G が存在する。次に

$H^{\infty}(G) \longrightarrow B(H)$ の map がうまく作られれば Brown の証明にうまく乗せられる。Lemma 5 の証明もそうであるが、ここで $Mlak [6]$ の道具を使う。まず $R(\bar{G}) \ni f \longrightarrow f(T) \in B(H)$ は representation である。 $R(\bar{G})$ が D-algebra であるから唯一の spectral dilation $C(\partial \bar{G}) \ni g \longrightarrow U_g \in B(K)$ ($K \supset H$) が存在する。任意の $x, y \in K$ に対して測度 $\mu(x, y) \in M(\partial \bar{G})$ が

$$(U_g x, y) = \int g d\mu(x, y) \quad (\forall g \in C(\partial \bar{G})) \text{ なるものがある。}$$

ここで $\mu(x, y)$ は G の harmonic measure m_G に対して絶対連続であることに注意する。 $R(\bar{G})$ は $H^{\infty}(G) = H^{\infty}(m_G)$ の pointwise bdy dense (w* topology) であることに注意する。

よって $\forall h \in H^{\infty}(G)$ に対して $\int h d\mu(x, y)$ が定義される。

$(h(T)x, y) = \int h d\mu(x, y) \quad (x, y \in H)$ とおくことにすると $h(T) \in B(H)$ が得られる。これは次をみたす。

$$\text{Lemma 6.} \quad \|h\|_{\infty} \leq \|h(T)\| \leq \|h\|_{\infty} \quad (\forall h \in H^{\infty}(G))$$

初めの不等式は Lemma 5 より、後半は $\|\mu(x, y)\| \leq 1$ より得られる。

Lemma 6 より $\mathcal{R}_T \equiv \{h(T); h \in H^{\infty}(G)\}$ は $B(H)$ の π -w 位相で閉になっている。そこで $\psi: G \longrightarrow D$ を conformal

map とし $\phi = \psi^T: D \rightarrow G$ とし $S \equiv \psi(T)$ とおく.

$H^{\infty}(U) \ni f \longrightarrow f \circ \psi \longrightarrow f \circ \psi(T) = f(S) \in B(H)$ であり

$\|f\|_{\infty}^U = \sup \{ |f(z)| ; z \in \alpha(S) \cap U \}$ である.

S と T は同じ不変部分空間を持つことを証明する. 又 S は polynomial bounded より $S^n \rightarrow 0(s)$ と仮定してよい.

後は S と $\{f(S); f \in H^{\infty}(U)\}$ に対して §3 の T と α_T と同様に話して進めよう. 以下 Lemma 3 は次の様になる.

Lemma 3'.

$\overline{\text{co}} \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j c_j ; \sum |\alpha_j| = K, \lambda_j \in \alpha(S) \cap U \right\} \supset \text{int ball } \{f(S); f \in H^{\infty}\}_*$

Lemma 4 に当る所は Lemma 3' を使って進めればよい.

この定理の応用として次の系を得る.

系. 次の各条件を満たす T は自明でない不変部分空間を持つ.

a) 1) $\alpha U \subset \alpha(T) \subset \overline{U}$

2) $\|(T-\lambda)^T\| \leq \frac{1}{\text{dist}[\lambda, \alpha(T)]} \quad \forall \lambda \notin \alpha(T)$

b) T : hyponormal かつ $\alpha U \subset \alpha(T) \subset \overline{U}$

c) T : polynomial bounded かつ $\alpha(T) = \overline{D}$

d) $\text{Re } \alpha(f(T)) = \alpha(\text{Re } f(T)) \quad (\forall f \in \text{Re } \alpha(T)) \quad \alpha(T) = \text{hole}$ かつ

e) normal β -dilation を持つ

§ 5. R.F. Olin and J.E. Thomson の結果. ([8], [9])

ここでは結果のみを述べる事にする.

Olin and Thomson 定理1. T が subnormal, $\lambda \in C_T$ とする。

$$\Rightarrow \exists x, y \in H \quad \text{s.t.} \quad \lambda = x \otimes y$$

N は normal 作用素とする。 N を m.n.e に持つ pure subnormal 作用素全体を $\mathcal{S}_p(N)$ と書く。 μ は N の scalar spectral measure とする。

Olin and Thomson 定理2. $N = M_\infty$ on $L^2(\mu)$, $L^\infty(\mu) = H^\infty(U)$ とする。

$$(1) \quad \text{もし } f_0 \in H^\infty(U) \quad \text{で} \quad \|f_0\|_\infty^U > \|f_0\|_\infty^{U \cap \alpha(N)} \quad \text{ならば,}$$

$$U \setminus \alpha(N) \text{ の hole } \Omega \text{ で } \exists \lambda \in \Omega \text{ s.t. } |f_0(\lambda)| > \|f_0\|_\infty^{U \cap \alpha(N)}$$

$$\text{なるものに対して, } \alpha(S) \supset \Omega, \quad \text{ind}(S - \lambda) = -1$$

$$(\forall S \in \mathcal{S}_p(N)) \quad \text{である。}$$

$$(2) \quad \text{もし } \|f\|_\infty^U = \|f\|_\infty^{U \cap \alpha(N)} \quad (\forall f \in H^\infty(U)) \quad \text{ならば,}$$

任意の $U \setminus \alpha(N)$ の component Ω と任意の自然数 m に

$$\text{対して } \text{ind}(S - \lambda) = -m \quad (\forall \lambda \in \Omega) \quad \text{なる } S \in \mathcal{S}_p(N)$$

が存在する。

§6. 今後の問題集

1) Brown, Chevreau and Pearcy 定理の★の条件を弱めること。たとえば(★)の代わりに『 $\alpha(T) \supset \partial U$ 』に出来ないか? もう少し一般化して, $\alpha(T)$ の polynomial convex hull が T のスペクトラム集合の時はどうか? (これは Stampfli の問題に

も関係している)。

2) $H = H^2(\mu)$ の時 $L^\infty(\mu)$ -不変部分空間が存在するというのが Brown 定理である。では $H^p(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ -不変部分空間は存在するのか? これは cyclic vector を持つ subnormal 作用素の hyperinvariant subspace の問題と同じである。

3) いかなる T に対して Olin and Thomson 定理 I が成立するか? Brown, Chevreau and Pearcy, Stampfli 定理の T ではどうか?

4) Olin and Thomson 定理 2 の (1) において, $L^\infty(N)$ の hole Ω で $\|f\|_\infty^{Una(N)} = |f(\lambda)| \ \forall \lambda \in \Omega$ なるものに対して $\min(S-\lambda)$ ($S \in \mathcal{S}_p(N), \lambda \in \Omega$) に対して何かいえるか? 任意の自然数 k に対して μ と上の性質をもつ hole Ω で $\min(S-\lambda) \geq -k$

($\forall S \in \mathcal{S}_p(N), \forall \lambda \in \Omega$) なるものの存在は示ぐべから。この逆は逆に μ と Ω で決まるわけであるがこの関係をはっきりさせた!!。このことと関係して次の Olin and Thomson 問題がある:

$\mu = \mu_1 + \mu_2$ ($\mu_1 \perp \mu_2$) に対して $\lambda \notin \tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2$ ならば (ただし $\tilde{K}_i$ は $L^\infty(\mu_i)$ に対応して Sarason 定理より得られるもの) $\min(S-\lambda) \geq -1$ ($\forall S \in \mathcal{S}_p(N)$) ?

References

1. J. Agler, An invariant subspace theorem, to appear.

2. A. Brown and C. Pearcy, Jordan loops and decompositions of operators, *Canad. J. Math.* 29 (1977), 1112-1119.
3. S. Brown, Some invariant subspaces for normal operators, *J. of Integral eq. and Operator theory* (to appear).
4. S. Brown, B. Chevreau and C. Pearcy, An invariant subspace theorem, to appear.
5. J.B. Conway and R.F. Olin, A functional calculus for subnormal operators II, *Memo. A.M.S.* 184 (1977).
6. W. Mlak, Decompositions and extensions of operator valued representations of function algebras, *Acta Sci. Math.* 22 (1969) 181-193.
7. Sz-Nagy and C. Foias, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, *Akademiai Kiado* 1970.
8. R. Olin and J. Thomson, Some index theorems for subnormal operators.
9. ———, Algebras of subnormal operators, to appear.
10. C. Pearcy, Some recent developments in operator theory, *CBMS*, 36 (1978).
11. D. Sarason, Weak-star density of polynomials, *J. Reine Angew. Math.* 252 (1972), 1-15.
12. J.G. Stampfli, An extension of Scott Brown's invariant subspace theorem: K -spectral sets, to appear.
13. ———, Recent developments on the invariant subspace problem, to appear.