

反応拡散系にあらわれる樹枝状パターン

広島大学大学院理学研究科数理分子生命理学専攻

上山大信

次の Gray-Scott モデル [1] は多種多様なパターンを産みだし、近年注目を集めている。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u - uv^2 + \alpha(1-u) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla^2 v + uv^2 - (\alpha + \beta)v. \end{cases} \quad (1)$$

このモデルは二種類の化学物質 U, V のゲル上（反応場）における $U + 2V \rightarrow 3V, V \rightarrow P$ という化学反応を表現していると考えることができる。化学物質 U は外部より絶えず α という率で反応場に供給されており、自己触媒的に生成される化学物質 V は $\alpha + \beta$ という率で理想的に反応場より取り除かれている。外部から絶えず供給されているという意味で、この系はオープンシステムであり、この様なオープンシステムにあらわれるパターンは、化学実験技術の確立と共に近年研究が盛んであり、化学実験、数値シミュレーション双方で数多くの新種のパターンが発見された [2][3]。この様な Gray-Scott モデルにあらわれる特徴的なパターンは図 1 に見られるような自己複製パターンである。シミュレーション結果から分かるよ

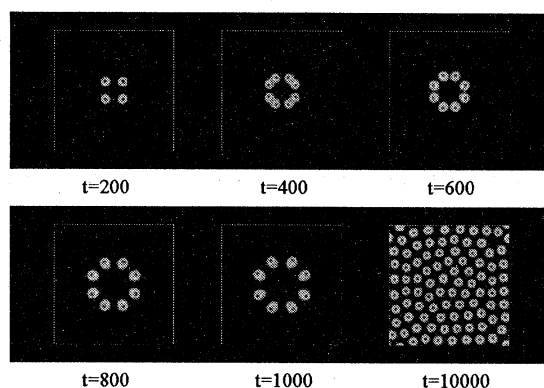


図 1: (1) 式の 2 次元シミュレーション結果。 v の時間発展。

うに、自己複製パターンは、空間一様な安定な状態に有限の大きさを持った刺激を加える事で発生し、最終的には空間非一様な定常状態に至る遷移過程にあらわれるパターンである。空間 1 次元自己複製パターンについては、大域的な解構造を調べることで、そのバックグラウンドとなる解構造の特徴がある程度分かっている [4] [5]。

それに対して、Gray-Scott モデルのパラメータである α を $\alpha = 0$ とした系は、外部からの供給の無い系であり、実験ではバッチ系と呼ばれるものである。 $\alpha = 0$ とした場合の (1) に対する数学的な結果は $u(0, x) = u_0 \geq 0, v(0, x) = v_0(x) \geq 0$ のとき $\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t, x), v(t, x)) = (u_\infty, 0)$ であり、この結果から、 $\alpha = 0$ という状況では、最終的にパターンは残らず、空間一様な解に漸近することが分かる。この結果から、一部ではこの系からは興味あるパターンは生成されないと考えられ、オープンシステムにあらわれる

パターンに特に興味が注がれてきた。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \nabla^2 u - uv^2 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla^2 v + uv^2 - \beta v \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \beta v. \end{cases} \quad (2)$$

しかしながら、(2) 式のように、新たに w という変数を導入し、先の化学式にあらわれた P の空間分布を見てやると図 2 のような樹枝状パターンが観察されることが判明した。この時、 $w(t, x) = \int_0^t v(\tau, x) d\tau$ で

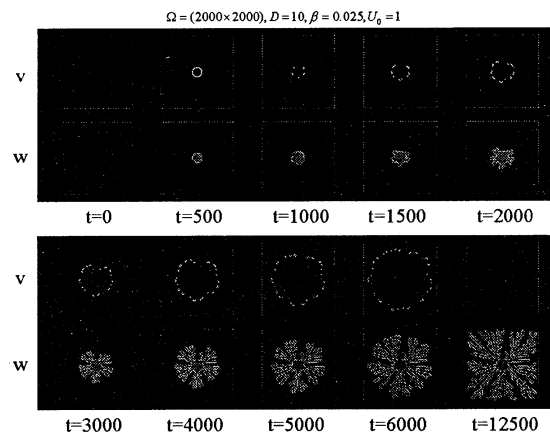


図 2: (2) 式の 2 次元シミュレーション結果。 v および w の時間発展。

ある。2 次元シミュレーション結果である図 2 の v の時間発展に注目すると、 $\alpha = 0$ という状況においても、自己複製パターンを産み出すという (1) の特性は保持されていることが分かる。但し、 u が外部から供給されないため、一方向的なパターンの時間発展となり、(1) のそれとは異なる。一方、新たに導入した w の時間発展を見ると、結晶成長に見られるような樹枝状パターンが観察される。自己複製プロセスは、結晶成長で言うところの先端分岐 (Tip Splitting) に対応しており、これらの関係に注目している。

参考文献

- [1] P.Gray and S.K.Scott, *Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor: oscillations and instabilities in the system $A + B \rightarrow 3B$, $B \rightarrow C$* , Chem. Eng. Sci. Vol.39(1984) 1087-1097.
- [2] J.E.Pearson., *Complex patterns in a simple system*, Science Vol.216(1993) 189-192.
- [3] P.De Kepper,J.J.Perraud,B.Rudovics and E.Dulos., *Experimental study of stationary turing patterns and their interaction with traveling waves in a chemical system*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.4,No.5(1994) 1215-1231.
- [4] Yasumasa Nishiura and Daishin Ueyama, *A skeleton structure of self-replicating dynamics*, Physica D, 130(1999) 73-104.
- [5] D.Ueyama,*Dynamics of self-replicating dynamics in the one-dimensional Gray-Scott model*,Hokkaido Mathematical Journal, Vol.28(1999) 175-210.