

情報力学の数理とその応用

—量子情報から遺伝情報まで—

東京理科大学理工学部

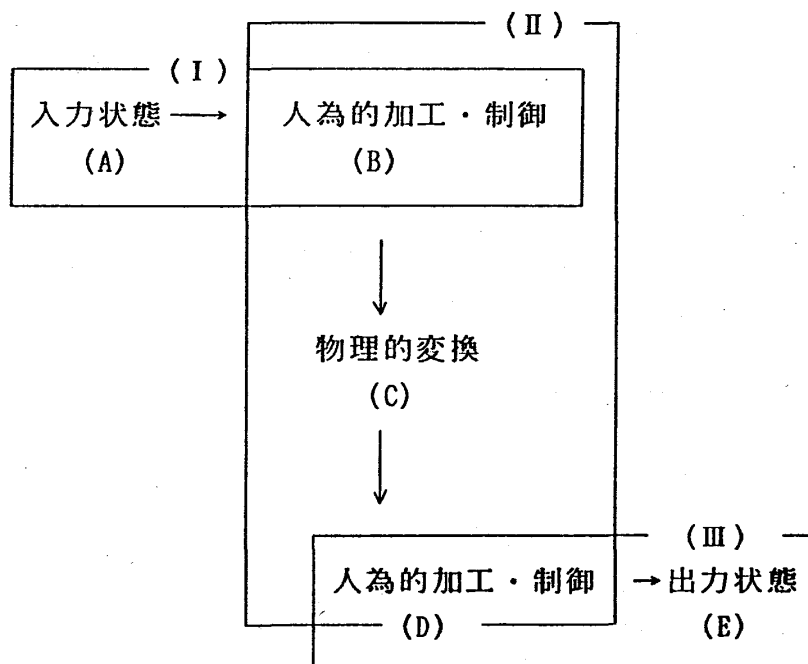
大矢雅則

序

様々な系は、それが物理的なものであっても、そうでなくても、状態という概念で記述され、その変化は状態の力学に依って記述される。また、系（状態）の特質を表すものの一つにエントロピーなど複雑さ（曖昧さ）を記述する科学量がある。この複雑さを系の力学的変化の記述に取り入れたものが情報力学である。本稿では、まず情報力学の数学的構造を説明し、それによって、いくつかの自然現象が捕らえられることを示す。

第1節 情報力学の数理構造

まず、情報力学の＜力学＞の意味から説明する。物理学では言うに及ばず、数学、工学、認識（知）科学、生物学などあらゆる分野の数理的研究では、その系の示す“関係”の一つである“系の力学”を考えることはごく普通のことである。系の在り様は“状態”という概念によって記述され、その力学は状態の変化によって記述されるが、ほとんどの系の在り様、状態、状態の変化の数理表現の基本は次の一次構造であると考えられる：



上の (I) (= A + B) を入力系, (II) (= B + C + D) を変換系 (チャネル), 特に

(C)を実変換系, (III)(= D + E)を出力系と呼ぶ. この一次構造が階層を成すと様々な系が出来上がることになるのである.

入力系は, 準備された状態, シグナル, 符号化されたシグナルなどと呼ばれる状態, 所為, "裸"の状態を人為的に加工したり制御したりして目的に応じたものに作り替える系で, こうして作られた状態を"衣を着た(入力)状態"と呼ぶ. この衣を着た状態が, 意図的には制御できない実変換系で外的変化を受け, それが再び人為的な加工を施され, 出力状態として取り出されるのである. なお, 最も基本的な構造は, DとEを除いた「 $A \rightarrow C \rightarrow E$ 」であることは断わるまでもないであろう.

さて, ここで, よく現われる力学の例をこの(I)~(III)に当てはめてみよう.

(例1) 因果系:

(I) = (A) $\cdots x \in \mathbb{R}$,

(II) = (C) $\cdots x = f(x)$,

(III) = (E) $\cdots x(t) = \Phi_t(x(0))$, ここで, Φ_t は f より得られる t をパラメータに持つ半群である($\Phi_{t+s} = \Phi_t \Phi_s$). なお, 微分方程式(C)が直接解けない多くの場合には, f の特質より, Φ_t を得る適当な近似方法を見つけることが問題になる.

(例2) シグナルの伝送:

(A) $\cdots$ 連続シグナル $x(t)$

(B) $\cdots$ 符号化されたシグナル x_n ($n \in \mathbb{N}$) (例えば, シャノンの標本化定理などによる)

(C) $\cdots$ ある変換, 例えば, 物理的チャネル(光ファイバーなど)を通してシグナルを送る: $y_n = f(x_n)$.

(III) $\cdots \{y_n\}$ の一種の補間(例えば, 逆フーリエ変換)により出力状態 $y(t)$ が得られる.

(例3) 離散確率系:

(A) $\cdots$ 事象系 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ に対する確率分布 $p = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$.

(C) $\cdots$ 二つの離散事象系 X, Y ($= X$ でもよい)間の遷移確率行列 ($p(i|j)$)

(E) $\cdots$ 出力事象系 Y の確率分布 $q = \{q_1, q_2, \cdots, q_m\}$. ただし, $q_i = \sum_j p(i|j)p_j$.

(例4) 連続確率系:

(A) $\cdots$ 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 μ

(C) $\cdots$ 入力空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ と出力空間 $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$ 間のマルコフ核, すなわち, $\Omega \times \bar{\mathcal{F}}$ から閉区間 $[0, 1]$ への写像 λ でつぎの条件を満たすものを言う: (1) 各 $x \in \Omega$ に対して, $\lambda(x, \cdot) \in P(\bar{\Omega})$ ($\bar{\Omega}$ 上の確率測度の全体), (2) 各 $A \in \bar{\mathcal{F}}$ に対して, $\lambda(\cdot, A) \in M(\Omega)$ (Ω 上の可測関数の全体).

(E) . . . 出力状態は

$$\bar{\mu}(\cdot) = \int_{\Omega} \lambda(x, \cdot) d\mu$$

(例5) 量子系(ベクトル状態):

(A) . . . $x \in \mathcal{H}$ (ヒルベルト空間)

(C) . . . ハミルトニアン H より生成されるユニタリー変換 U_t ($\equiv \exp itH$, $t \in \mathbb{R}$)

(E) . . . $y = U_t x \in \mathcal{H}$

(例6) 量子系(混合状態):

(A) . . . $\rho \in \mathcal{D}$ ($= T(\mathcal{H})_{+,1}$ (密度作用素(行列)の全体))

(C) . . . $\mathcal{D}$ から $\overline{\mathcal{D}}$ への写像 Γ , 例えば, ユニタリー変換 U に対して, $\Gamma = \text{Ad } U \equiv U^* \cdot U$.

(E) . . . $\sigma = \Gamma \rho \in \mathcal{D}$

上記の例全てをその特別な場合として含むものとして次の C^* 系の記述があった。

(例7) C^* 系:

(A) . . . $\varphi \in \mathcal{G}$ (C^* 代数 $\mathcal{A}$ 上の状態の集合)

(B) . . . 自己同型写像 $\alpha: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

(C) . . . ある変換 $\Gamma: \mathcal{G} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$, ただし, $(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{G}})$ は出力系である。

(D) . . . 自己同型写像 $\alpha: \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$

(E) . . . $\varphi = \Gamma \varphi$

最初から数理構造を規定はせず, 集合 $\mathcal{A}$ を考察の対象(観測量など)となるものの全体とし, $\mathcal{A}$ の元にある科学的量(観測値など)を対応させる処方箋(仕方)の集合を $\mathcal{G}$, $\mathcal{A}$ の元や $\mathcal{G}$ の元の意図的(人為的)変化を表す, $g \in G$ をパラメータに持つ, 写像を $\alpha(g)$ とすると, (入力)系は一般に三組 $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \alpha(g))$ で記述されるといえる。そして,

『 $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \alpha(g))$ に数理構造を与える $\Leftrightarrow$ 系を記述する理論が決まる』

ということになるのである。例7は, この非数学的枠組み $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \alpha(g))$ に古典力学系と量子力学系を同時に含むように数理構造を定めたものである。

数理構造を付加する前の枠組みの議論をもう少し行なっておこう。

入力系と出力系を各々形式的に $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \alpha(g))$ と $(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{G}}, \bar{\alpha}(\bar{g}))$ で表し, $\mathcal{G}$ から $\overline{\mathcal{G}}$ への写像 Γ それ自体を以下チャンネルと呼ぶ。前述の(II)に対応するチャンネルは他の系を包含する階層性を持っているので, 物理学でよく出くわすいわゆる開放系の構造も有しているといえる。例えば, 第三の系 $(\mathcal{B}, \mathcal{G}', \beta)$ と $(\overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{G}'}, \bar{\beta})$ が

入出力系に影響を及ぼす次の形もその一例である。

$$\mathcal{G} \rightarrow \boxed{\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}' \rightarrow \bar{\mathcal{G}} \otimes \bar{\mathcal{G}}'} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$$

この種の相互作用は後でかなり重要なもので、後で述べる開放系の記述はこの一例である。なお、 $\mathcal{G}$ 全体ではなく、 $\mathcal{G}$ の一部である $\mathcal{S}$ を考えればよい場合が多いが、このとき $\mathcal{S}$ を以下基準系と呼ぶことにする。したがって、より一般的には力学系は組 $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \alpha(G))$ で表せることになる。 $\mathcal{S}$ として、例えば、次のようなものが重要である。

- (1) 古典系：定常状態の集合，エルゴード状態の集合
- (2) 量子系：定常状態の集合，KMS状態の集合

さて，“情報力学”の力学に次ぐ“情報”の意味についての話に移ろう。情報という概念が、曖昧さ、混沌さ、複雑さといった考えと深く関わっていることはすでに説明したが、こうした概念の中で最も汎用性があると思える複雑さを系の力学に付加したものが情報力学である。すなわち、基準系 $\mathcal{S}$ から見た状態 φ の有する複雑さを

$$C_{\mathcal{S}}(\varphi)$$

で表し、状態 φ が他の状態 $\bar{\varphi}$ へ変化したとき、 φ より $\bar{\varphi}$ へ遺伝した複雑さは

$$T_{\mathcal{S}}(\varphi; \bar{\varphi})$$

で表すことにする。特に、 φ がチャネル Γ を用いて

$$\bar{\varphi} = \Gamma \varphi$$

と書けるととき、上の遺伝した複雑さは

$$T_{\mathcal{S}}(\varphi; \Gamma)$$

と表すことが多い。

これらの複雑さは、それほど多くはないが、いくつかの形を取ることがある。例えば、エントロピー、相互エントロピー、ある種のフラクタル次元などその例である。

以上の準備の下で、情報力学を次のように定義する：

【定義】 情報力学とは組

$$(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \alpha(G); \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{S}}, \bar{\alpha}(\bar{G}); \Gamma; C_{\mathcal{S}}(\varphi), T_{\mathcal{S}}(\varphi; \Gamma); R)$$

のことをいう。ここで、 R は操作(観測)に関わる各要素間の“関係”である。

この定義における関係“ R ”は系に“特別”な在り方を決めるものであるが、ほとんどの系ではこの関係に注意を払う必要はないようである。なお、上記の定義では、入力系と出力系は一般に異なるものとしてあるが、当然同じものでも構わないこと

に注意しておく。例えば、 $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ の場合もかなり多いのである。このとき、情報力学は組

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{X}, \alpha(G); \Gamma; C^{\mathcal{X}}(\varphi), T^{\mathcal{X}}(\varphi; \Gamma); R\}$$

で与えられることになる。

従って、各系において、その系を数理的に取扱うためには

- (i) $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha(G); \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}}, \bar{\alpha}(\bar{G})\}$ に数学的な構造をあたえること
- (ii) Γ, R を決めること
- (iii) $C^{\mathcal{X}}(\varphi)$ と $T^{\mathcal{X}}(\varphi; \Gamma)$ を定めること

がまず必要になる。

対象となっている系に応じて、上の(i), (ii), (iii)決めることによって、すなわち、数学的構造を決定することによって、その系を理論的に扱う素地が出来上がるのである。

この情報力学という枠組みで多くの系が扱えるが、以下では、次のトピックスについて考えてみる。

- (1) 光通信などの量子通信過程の定式化
- (2) 分子進化や遺伝子の構造など
- (3) 状態のフラクタル次元とその複雑性

なお、情報力学の数理解構そのものの研究も、その応用のみならず、大切であることを注意しておく。その例として、以下述べるようなチャンネルや複雑量の個別の研究がある。

第2節 チャンネルとリフティング

入力系 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha)$ と、出力系 $(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}}, \bar{\alpha})$ に対して、写像 $\Lambda^*: \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathcal{B}}$ はチャンネルと呼んだが、これには次のようなものがある：

- (1) Λ^* がアフィンであるとき、 Λ^* は線形チャンネルであるという。
- (2) $\Lambda: \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$ が、

$$\sum_{i,j} B_i^* (A_i^* A_j) B_j \geq 0, \quad \forall B_j \in \mathcal{A}, \quad \forall A_j \in \overline{\mathcal{A}},$$

を満たすとき、 Λ^* は完全正チャンネルであるという。

このチャンネルと関わるものとして、リフティングという概念がある。

$\mathcal{A}$ から $\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}$ へのリフティングとは連続写像

$$\varepsilon^*: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}$$

のことであり、リフティング ε^* が状態 φ に関して非破壊であるとは、

$$(\varepsilon * \varphi)(A \otimes I) = \varphi(A), \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

の成り立つことをいう。

リフティング ε^* が与えられると、次のようにして二種類のチャンネルを構成することができる。

$$\Lambda^*: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \quad \Lambda^* \varphi(\bar{A}) = (\varepsilon * \varphi)(I \otimes \bar{A}), \quad \forall A \in \bar{\mathcal{A}}.$$

$$\bar{\Lambda}^*: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \quad \bar{\Lambda}^* \varphi(A) = (\varepsilon * \varphi)(I \otimes A), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

逆に、チャンネル $\bar{\Lambda}^*: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ と $\varphi \in \mathcal{K} \subset \mathcal{G}$ が与えられたとき、状態空間 $\mathcal{K}$ 上に状態 φ を分解するある測度 μ ，すなわち，

$$\varphi = \int_{\mathcal{K}} \omega \, d\mu$$

に対して，

$$\varepsilon * \varphi = \int_{\mathcal{K}} \omega \otimes \Lambda^* \omega \, d\mu \quad (\text{合成状態 [1]})$$

は非破壊リフティングになる。従って，

$$[\text{チャンネル} \longleftrightarrow \text{リフティング}]$$

という関係が成立するといえる。ここで、良く用いられるチャンネルとリフティングの例を挙げておこう [2, 3]。

<チャンネルとリフティングの例>

ある分解 $\rho = \sum_n \lambda_n \rho_n$ が与えられたとする。

(1) ユニタリ発展：

$$\rho \rightarrow \Lambda_t^* \rho = \text{Ad } U_t(\rho) \equiv U_t^* \rho U_t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow \varepsilon^* \rho = \sum_n \lambda_n \rho_n \otimes \Lambda_t^* \rho_n$$

但し， U_t はユニタリ作用素 $U_t = \exp(itH)$ である。

(2) 半群発展：

$$\rho \rightarrow \Lambda_t^* \rho = \sum_n \lambda_n V_t \rho_n V_t$$

$$\Rightarrow \varepsilon^* \rho = \sum_n \lambda_n \rho_n \otimes \Lambda_t^* \rho_n$$

但し， $\{V_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ は $\mathcal{K}$ 上の 1 値数半群である。

(3) 量子測定: 状態 ρ における $A = \sum_n a_n P_n$ (スペクトル分解) の測定.

$$\begin{aligned}\rho &\rightarrow \Lambda^* \rho = \sum_n P_n \rho P_n \\ \Rightarrow \varepsilon^* \rho &= \sum_n \lambda_n \rho_n \otimes \Lambda^* \rho_n\end{aligned}$$

より一般的には, $\mathcal{A}$ は系の観測量のなす代数, $\overline{\mathcal{A}}$ は測定装置の観測量のなす代数とする, ε^* は装置の準備とともに系と装置との相互作用を記述する. もし $\varphi \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ が系で準備された状態, 即ち, 装置と相互作用する前の状態であるなら

ば, $\Lambda^* \varphi \in \mathcal{G}(\overline{\mathcal{A}})$ は測定後の系の状態であり, $\Lambda^* \varphi \in \mathcal{G}(\overline{\mathcal{A}})$ は測定後の装置の状態である. このことより, ここでは論じないがリフティングの概念は量子観測の問題に用いることができる.

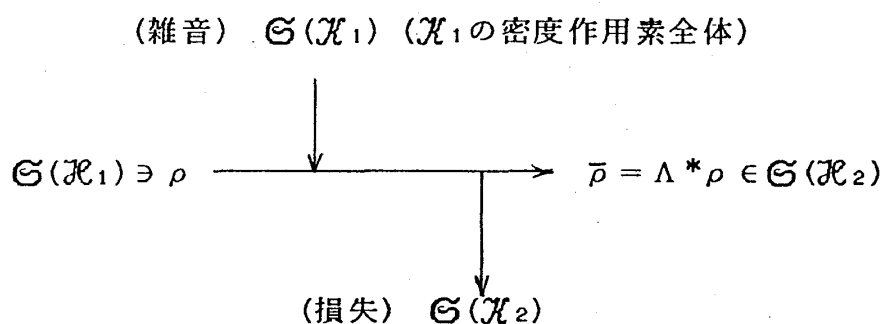
(4) 開放系 (リダクション):

$$\begin{aligned}\rho \in \Sigma_1 &\xrightarrow{\text{相互作用}} \sigma \in \Sigma_2 \\ \varepsilon_t^* \rho &\equiv \theta_t = U_t^*(\rho \otimes \sigma) U_t, \\ \rho &\rightarrow \Lambda_t^* \rho = \text{tr}_{\mathcal{H}} \theta_t,\end{aligned}$$

(5) 等長リフティング:

$$\begin{aligned}V: \mathcal{H}_1 &\rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad \text{等長作用素} \quad (V^* V = I_{\mathcal{H}_1}) \\ \varepsilon^* \rho &= V \rho V^*, \quad \forall \rho \in \mathcal{G}(\mathcal{H}_1),\end{aligned}$$

(6) 量子チャネル:



$\nu \in \mathcal{G}(\mathcal{H}_1)$ を雑音を表す状態とし, a, π, γ を次の写像とする:

- (1) $a: B(\mathcal{H}_2) \rightarrow B(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2)$, $a(A) = A \otimes I$, $\forall A \in B(\mathcal{H}_2)$.
- (2) $\pi: B(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2) \rightarrow B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1)$: 完全正写像で $\pi(I) = I$.
- (3) $\gamma: B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1) \rightarrow B(\mathcal{H}_1)$, $\gamma(Q) = \text{tr}_{\mathcal{H}_1} \nu Q$, $\forall Q \in B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1)$.

とおくと,

$$\begin{aligned}\Lambda &= \gamma \circ \pi \circ a \\ \Lambda^* &= a^* \circ \pi^* \circ \gamma^*\end{aligned}$$

これは,

$$\Lambda^* \rho = \text{tr}_{\mathcal{H}_2} \pi^*(\rho \otimes \nu), \quad \forall \rho \in \mathcal{G}(\mathcal{H}_1).$$

と表せる. とくに, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ のとき

$$\varepsilon^*: \rho \in \mathcal{G}(\mathcal{H}) \rightarrow \pi^*(\rho \otimes \nu) \in \mathcal{G}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$$

はリフティングを与え,

$$\Lambda^* \rho = \text{tr}_{\mathcal{H}} \varepsilon^* \rho.$$

より一般的には, 入力信号が伝送され装置によって受信され出力信号が生成される. このとき $\mathcal{A}$ は入力信号の観測量のなす代数, $\bar{\mathcal{A}}$ は出力信号の観測量のなす代数とすると, ε^* は受信側の準備とともに入力信号と受信側との相互作用を記述する. もし $\varphi_1 \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ が入力信号ならば, 状態 $\Lambda^* \varphi_1 \in \mathcal{G}(\bar{\mathcal{A}})$ は (観測された) 出力信号の状態である.

第3節 複雑さの記述としてのエントロピーとフラクタル次元

情報力学における二つの複雑さを表す一つの指標としてエントロピーによるものがある. ここでは, まず, このことを簡単に説明する. なお, C^* 力学系 $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \alpha(\mathbb{R}))$ においてエントロピーを議論することが最も汎用性があるが, 数学的に繁雑であるので, ここでは, 密度作用素を用いて説明することにする.

通常量子系, 即ち, $\mathcal{A}$ が全代数 $B(\mathcal{H})$ で正規状態 φ が密度作用素で $\varphi(\cdot) = \text{tr} \rho \cdot$ と記述される場合の系の複雑さを表す量 $C(\varphi)$ の一つの表現はフォンノイマンのエントロピーである:

$$C(\varphi) = S(\varphi) = -\text{tr} \rho \log \rho$$

である. さらに, チャンネル Λ^* による第二の複雑量 (遺伝した複雑さ) $T(\varphi; \Lambda^*)$ は相互エントロピーであると考えてよい: すなわち, 状態 ρ のシャッテン分解を

$$\rho = \sum_n \lambda_n E_n, \quad E_n = |x_n\rangle \langle x_n|$$

(即ち, λ_n は ρ の固有値であり, x_n はそれに対応する固有ベクトルである) とすると, 全ての固有値が非縮対でない限り, このシャッテン分解は一意ではないので, 合成状態 Φ は

$$\Phi_E(Q) = \text{tr} \sigma_E Q, \quad Q \in \mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}},$$

と表される. 但し,

$$\sigma_E = \sum_n \lambda_n E_n \otimes \Lambda^* E_n,$$

であり, E は シャッテン分解 $\{E_n\}$ を表す. このとき φ とチャンネル Λ^* に関する

相互エントロピーは

$$I(\rho; \Lambda^*) (\equiv I(\varphi; \Lambda^*)) = \sup \{ I_E(\rho; \Lambda^*); E = \{E_n\} \}$$

で与えられる。但し,

$$I_E(\rho; \Lambda^*) = S(\sigma_E | \sigma_0) = \text{tr} \sigma_E (\log \sigma_E - \log \sigma_0),$$

であり, $\sigma_0 = \rho \otimes \Lambda^* \rho$ である。相互エントロピーのこの形式は光通信過程の研究のために導入された [4] もので, 次の基本的性質を有している。

<定理1> 密度作用素 ρ で与えられる状態 φ に対して

$$0 \leq I(\varphi; \Lambda^*) \leq \min \{ S(\varphi), S(\Lambda^* \varphi) \}.$$

以上の複雑さの古典力学版はシャノンのエントロピーと相互エントロピーである。

エントロピーによる複雑さを用い, フラクタル次元の考えを借りると新しい複雑さが定められ, それらに依ってエントロピーとは異なった (エントロピーではできなかった) 状態の分類が可能になる。

フラクタル次元の一つに容量次元と言われるものがある。 n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の集合 X を, 直径 ε のある種の凸集合で被覆する。このとき必要な凸集合の最小個数を $N(\varepsilon)$ とすると, 集合 X の ε -エントロピー

$$S(\varepsilon) = \log N(\varepsilon)$$

を用いて, 容量次元 (0 次エントロピー次元) を次のように定義する。

$$d_c(X) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log (1/\varepsilon)}$$

この ε -エントロピーはコロモゴルフ等によって相互エントロピーを用いて定式化されているが, そのコロモゴルフの考えと上記の容量次元を定義より, 状態のフラクタル次元が以下のように定められる [5, 6]。

$\mathcal{C}$ をチャンネルの集合とし, $\mathcal{C}(\rho; \varepsilon)$ を $\|\rho - \Lambda^* \rho\| \leq \varepsilon$ を満たす全てのチャンネルの集合とする。このとき状態 ρ の ε -エントロピーは

$$S(\rho; \varepsilon) \equiv \inf \{ J(\rho; \Lambda^*); \Lambda^* \in \mathcal{C}(\rho; \varepsilon) \}.$$

で定義される。なお, $J(\rho; \Lambda^*)$ は極大相互エントロピーで次のように定められるものである:

$$J(\rho; \Lambda^*) \equiv \sup \{ I(\rho; \Gamma^*); \Gamma^* \in \mathcal{C}, \Lambda^* \rho = \Gamma^* \rho \}.$$

である。

この状態 ρ の ε -エントロピーを用いて 2 つのフラクタル次元を定義する。
ひとつは、

$$d_c(\rho) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(\rho; \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

である。これは容量次元を直接一般化したもので、量子力学系における状態 ρ の量子状態の容量次元という。

もうひとつは、

$$d_I(\rho; \varepsilon) = \frac{S(\rho; \varepsilon)}{I(\varepsilon)}$$

である。ここで $I(\varepsilon)$ は極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ で規格化する関数であり、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_I(\rho; \varepsilon) = 1.$$

である。多くの場合 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon) = S(\rho)$ となる。この $d_I(\rho; \varepsilon)$ を

量子力学系における ρ のオーダー ε での量子状態の情報次元という。

更に一般的な量子状態 φ の ε -エントロピーとフラクタル次元は [6] で詳しく説明してある。

このフラクタル次元は離散的な古典系では次のようになる。 n 個の事象から構成されている集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ に対し、 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ を事象 X の状態(確率分布)とする。この時、この事象系のエントロピーは

$$S(X) (= S(P)) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

であるが、この古典系での ε -エントロピーは以下のように書くことが出来る。まず状態 P を、別の状態 Q へ移すチャンネル Λ^* は

$$q_j = (\Lambda^* P)_j = \sum_i p(j|i) p_i$$

であるような、遷移確率行列 $\{p(j|i)\}$ と見なせる。つまり

$$\Lambda^* = \{p(j|i)\}$$

である。この時、相互エントロピーは

$$I(P; \Lambda^*) = \sum_{i,j} p(j|i) p_i \log \frac{p(j|i)}{q_j}$$

である。従って ε -エントロピーは

$$S(P; \varepsilon) = \inf \{ J(P; \Lambda^*); \Lambda^* \in \mathcal{C}(P; \varepsilon) \}$$

となる。ここで

$$J(P; \Lambda^*) \equiv \sup \{ I(P; \Gamma^*); \Gamma^* \in \mathcal{C}, \Gamma^* P = \Lambda^* P \}$$

$$\mathcal{C}(P; \varepsilon) \equiv \{ \Lambda^* \in \mathcal{C}; \| P - \Lambda^* P \| \leq \varepsilon \}$$

である。

この古典系では、任意の状態(確率分布) P に対するフラクタル次元は次のようになる：

$$d_c(P; \varepsilon) \equiv \frac{S(P; \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

$$d_l(P; \varepsilon) \equiv \frac{S(P; \varepsilon)}{S(P)} \quad (\text{i.e., } I(\varepsilon) = S(P))$$

この場合、0 以外の最小の ε の値は $2/n$ であることに注意する。更に d_c と d_l は本質的に同じであるから、ここでは d_l だけを計算する。系の複雑さを表すと期待されるこのフラクタル次元 d_l を使うとエントロピーでは区別できない状態も区別できるようになる。例えば、次のような例が容易に作れる。

分布 ($n=20$)	(8/20, 6/20, 6/20, 0)	(12/20, 4/20, 2/20, 2/20)
エントロピー	1.0889	1.0889
$d_l(\cdot; 2/n)$	0.8558	0.8381

分布 ($n=20$)	(9/20, 8/20, 2/20, 1/20)	(12/20, 3/20, 3/20, 2/20)
エントロピー	1.1059	1.1059
$d_l(\cdot; 2/n)$	0.8530	0.8406

分布 ($n=22$)	(9/22, 8/22, 4/22, 1/22)	(12/22, 4/22, 3/22, 3/22)
エントロピー	1.1840	1.1840
$d_l(\cdot; 2/n)$	0.8752	0.8647

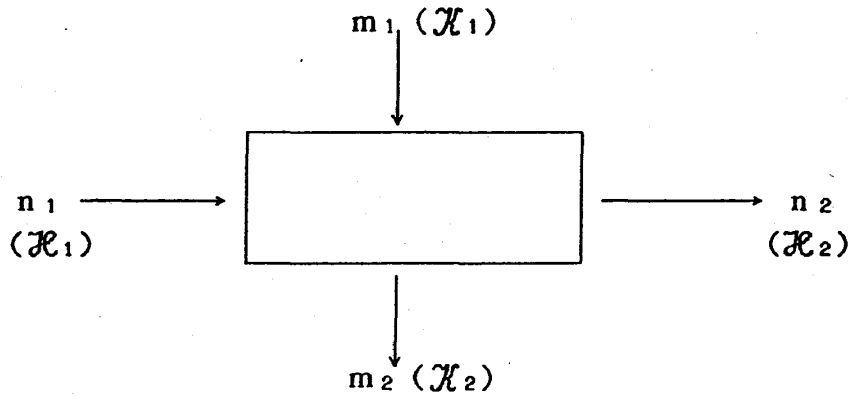
分布 ($n=23$)	(9/23, 8/23, 5/23, 1/23)	(12/23, 5/23, 3/23, 3/23)
エントロピー	1.2025	1.2025
$d_l(\cdot; 2/n)$	0.8825	0.8725

従って、 $S(P) = S(Q)$ のとき、 d_l によって状態 P と Q の間の複雑さの新しい順序が与えられるのである。すなわち、情報力学の複雑さ C として上記の d_c や d_l を選ぶことができるのである。

第4節 チャネルの光通信課程への応用

第2節で構成した量子チャネルを光通信過程の数学的定式化に応用してみる。

(1) 減衰過程の一般的表現：



このモデルの概略は次の通りである。いま、 n_1 個の光子が入力系から送られ、 m_1 個の光子が雑音系から信号に加えられるとし、チャネルを通して m_2 個の光子が損失系に失われ、 n_2 個の光子が出力系で検出されたとする。エネルギー保存則 ($n_1 + m_1 = n_2 + m_2$) より、入力系、雑音系、出力系、損失系の各座標 q_1, t_1, q_2, t_2 の間に次の線形変換を仮定する：

$$\begin{cases} q_2 = \alpha q_1 + \beta t_1 \\ t_2 = -\beta q_1 + \alpha t_1 \end{cases} \quad (\alpha^2 + \beta^2 = 1)$$

ここで、簡単のため、 $m_1 = 0$ とし、さらに、写像 $U: \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2 \otimes \mathcal{K}_2$ および写像 π^* を次のように定める：

$$\begin{aligned} U(x_n^{(1)} \otimes y_0^{(1)})(q_2, t_2) \\ &= x_n^{(2)} \otimes y_0^{(2)}(\alpha q_2 - \beta t_2, \beta q_2 + \alpha t_2) \\ &= \sum_{j=0}^n \sqrt{\frac{n!}{(n-j)! j!}} \alpha^j (-\beta)^{n-j} x_j^{(2)} \otimes y_{n-j}^{(2)}(q_2, t_2) \end{aligned}$$

ここで、

$$x_{n1}^{(1)}(q_1) = \{2^{n1} \pi(n1!)\}^{-1/2} \exp\left\{-\frac{q_1^2}{2}\right\} H_{n1}(q_1)$$

である。 π^* は

$$\pi^* = U(\cdot) U^*$$

で与えられる。この π^* により定められる次のチャネル Λ^* が減衰過程を表している。

$$\Lambda^* \rho = \text{tr}_{\mathcal{K}_2} \varepsilon^* \rho = \text{tr}_{\mathcal{K}_2} U^* (\rho \otimes \nu) U$$

ここで、雑音 ν は電磁場の零点ゆらぎによる真空状態をとるものとする。すなわ

ち、雑音 ν は、 $\mathcal{H}_1$ の真空状態ベクトル $y_0^{(1)}$ を用いて

$$\nu = |y_0^{(1)}\rangle\langle y_0^{(1)}| \in \mathcal{G}(\mathcal{H}_1)$$

と表せる。ただし、以下では簡単に

$$\nu = |0\rangle\langle 0|$$

と表すことにする。

(2) 減衰過程の新しい表現[3]:

$\mathcal{H} = \Gamma(C)$ (フォック空間) とし、

$$|\theta\rangle = \exp\left(-\frac{|\theta|^2}{2}\right) \sum_n \frac{\theta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \theta \in C$$

をコヒーレント状態ベクトルとする。写像 $V: \Gamma(C) \rightarrow \Gamma(C) \otimes \Gamma(C)$ を次のように定義する:

$$V|\theta\rangle = |\alpha\theta\rangle \otimes |\beta\theta\rangle$$

ただし、 $\alpha, \beta \in C$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

定義域の $\Gamma(C)$ は入力系における単一モードの電磁場と考えられる。そして、写像 V は他の装置やあるいは受信機との信号の相互作用を表している。すなわち、 $\Gamma(C) \otimes \Gamma(C)$ における第2の要素は他の装置の場であるから、その相互作用の影響によって、入力光であるコヒーレント光は2つの信号光に分かれ、そしてそのいずれもがコヒーレント光であり、その強度はどちらも入力光に比べ弱いということを上記の V の式は表わしている。また、入力系、雑音系、出力系、損失系を1つの系とみなしたとき、エネルギーは保存されていることもわかる。

ここで、この作用素 V が従来用いてきた作用素 U と同値であることを示す。

$$\begin{aligned} V|\theta\rangle &= |\alpha\theta\rangle \otimes |\beta\theta\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{|\alpha\theta|^2}{2}\right) \sum_n \frac{(\alpha\theta)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \exp\left(-\frac{|\beta\theta|^2}{2}\right) \sum_m \frac{(\beta\theta)^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{|\theta|^2}{2}\right) \sum_n \sum_m \frac{(\alpha\theta)^n (\beta\theta)^m}{\sqrt{n! m!}} |n\rangle \otimes |m\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{|\theta|^2}{2}\right) \left\{ \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\theta^N}{\sqrt{N!}} \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \beta^{N-n} \sqrt{\frac{N!}{n! (N-n)!}} |n\rangle \otimes |N-n\rangle \right\} \end{aligned}$$

よって、非負整数 N に対して

$$V | N \rangle = \sum_{n=0}^N \alpha^n \beta^{N-n} \sqrt{\frac{N!}{n! (N-n)!}} | n \rangle \otimes | N-n \rangle$$

が成り立つ。故に、 β を $-\beta$ に置き換えると、 U が V に等しいことがわかる。
以上より、減衰チャネルは次のように書き表すことができることになる。

$$\Lambda^* \rho = \text{tr}_{\mathcal{H}_2} V \rho V^*.$$

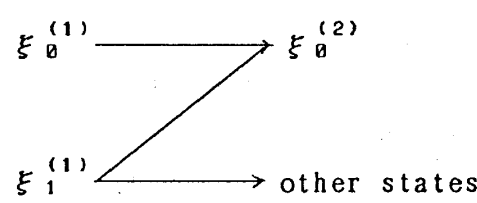
(3) 誤り確率の定式化[2, 7]

量子チャネルの一般表現から誤り確率の一般表現が得られる。まず、 ξ_i を符号シンボル $c_i \in C$ に対応する量子符号とする：

$$C = \{0, 1\} \iff \Xi = \{\xi_0, \xi_1\}$$

この量子符号化の1例として、 ξ_0 を真空状態、 ξ_1 をコヒーレント状態、スクイズド状態などの状態をとってることができる。

入力系における2つの状態（量子符号語） $\xi_0^{(1)}$ と $\xi_1^{(1)}$ はチャネル Λ^* を通して出力系に送られる。ここで、Z型の通信路をを考える。つまり、状態 $\xi_0^{(1)}$ に対応する信号 "0" は、常に正しく状態 $\xi_0^{(2)}$ に対応する信号 "0" として受信され、状態 $\xi_1^{(1)}$ に対応する信号 "1" は、状態 $\xi_0^{(2)}$ あるいはこれ以外の状態として受信されるものとする。このとき、誤り確率 q_e は、信号 "1" が信号 "0" として受信される確率だから、それを与える式は次のようになる：

$$\begin{aligned} q_e &= \text{tr}_{\mathcal{H}_2} \Lambda^* (\xi_1^{(1)}) \xi_0^{(2)} \\ &= \text{tr}_{\mathcal{H}_2} (\text{tr}_{\mathcal{H}_2} \pi^* (\xi_1^{(1)} \otimes \nu)) \xi_0^{(2)} \\ &= \text{tr}_{\mathcal{H}_2} (\text{tr}_{\mathcal{H}_2} \varepsilon^* (\xi_1^{(1)})) \xi_0^{(2)}. \end{aligned}$$


この誤り確率 q_e を用いて、符号長 N 、誤り訂正能力 t_0 の PCM の誤り確率および PPM の誤り確率を求める式が次のように与えられる。

$$P_e^{\text{PCM}} = \sum_{j=t_0+1}^N {}^N C_j q_e^j (1-q_e)^{N-j},$$

$$P_e^{\text{PPM}} = q_e,$$

ただし、 ${}^N C_j = \frac{N!}{(N-j)! j!}$

この誤り確率をいくつかの場合に計算を試みよう。

(I) $\xi_1^{(1)} = |\theta\rangle\langle\theta|$ かつ $\xi_0^{(2)} = |0\rangle\langle 0|$ の場合:

$$\begin{aligned} q_0 &= \text{tr}_{\mathcal{H}} (\text{tr}_{\mathcal{H}} V^* |\theta\rangle\langle\theta| V) |0\rangle\langle 0| \\ &= \text{tr}_{\mathcal{H}} (\text{tr}_{\mathcal{H}} |\alpha\theta\rangle\langle\alpha\theta| \otimes |\beta\theta\rangle\langle\beta\theta|) |0\rangle\langle 0| \\ &= \text{tr}_{\mathcal{H}} |\alpha\theta\rangle\langle\alpha\theta| |0\rangle\langle 0| \\ &= |\langle 0|\alpha\theta\rangle|^2 \\ &= \exp(-|\alpha\theta|^2), \end{aligned}$$

これは、従来の結果に一致しており、この新しい導出の方が簡単である。

(II) $\xi_1^{(1)} =$ スクイズド状態 かつ $\xi_0^{(2)} = |0\rangle\langle 0|$ の場合:

スクイズド状態はユニタリー作用素 $U(z)$ を用いて次のように表される。

$$\xi_1^{(1)} = U(z) |\theta\rangle\langle\theta| U(z)^*$$

ただし、 z はある複素数を表す。このとき、誤り確率 q_0 は次のように、表される。

$$\begin{aligned} q_0 &= \text{tr}_{\mathcal{H}} (\text{tr}_{\mathcal{H}} V U(z) |\theta\rangle\langle\theta| U(z)^* V^*) |0\rangle\langle 0| \\ &= \text{tr} V^* (|0\rangle\langle 0| \otimes I) V U(z) |\theta\rangle\langle\theta| U(z)^* \\ &= \langle U(z)\theta | V^* (|0\rangle\langle 0| \otimes I) V | U(z)\theta \rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2w \langle U(z)\theta | V^* (|0\rangle\langle 0| \otimes I) V | w \rangle \langle w | U(z)\theta \rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2w \langle U(z)\theta | |\beta|^2 w \rangle \langle 0 | \alpha w \rangle \langle w | U(z)\theta \rangle \end{aligned}$$

以下、これを計算すると

$$q_0 = \sqrt{\tau} \exp \left[\{ (1-\eta)\tau - 1 \} |\gamma|^2 + [1 - (1-\eta)^2 \tau] \left\{ \frac{\bar{\mu} \gamma^2}{2\lambda} + \frac{\mu \bar{\gamma}^2}{2\lambda} \right\} \right],$$

ただし、

$$\tau = \{ |\lambda|^2 - (1-\eta)^2 |\mu|^2 \}^{-1},$$

$$\begin{aligned}
\eta &= |\alpha|^2, \\
\gamma &= \lambda \theta + \mu \theta^*, \\
\lambda &= \cosh r, \\
\mu &= \exp(-i\rho) \sinh r.
\end{aligned}$$

この計算をするためには、 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 上の作用素 V^* の次の関係式が必要である。

$$\begin{aligned}
\langle \theta | V^* | \theta' \rangle \otimes | \theta'' \rangle &= \langle V \theta | \theta' \rangle \otimes | \theta'' \rangle \\
&= \langle \alpha \theta | \otimes \langle \beta \theta | | \theta' \rangle \otimes | \theta'' \rangle \\
&= \langle \alpha \theta | \theta' \rangle \langle \beta \theta | \theta'' \rangle \\
&= \frac{\exp(-|\alpha \theta|^2 - |\theta|^2 + 2\alpha^* \theta^* \theta') \exp(-|\theta''|^2 - |\beta \theta|^2 + 2\beta^* \theta^* \theta'')}{2} \\
&= \frac{\exp(-|\alpha \theta'|^2 - |\beta \theta''|^2)}{2} \langle \theta | \alpha^* \theta' + \beta^* \theta'' \rangle \exp(\alpha^* \beta \theta' \theta''), \\
\text{これより}
\end{aligned}$$

$$V^* | \theta' \rangle \otimes | \theta'' \rangle = \exp(\alpha^* \beta \theta' \theta'') | \alpha^* \theta' + \beta^* \theta'' \rangle.$$

この計算には、次の公式とガウス型積分を用いる。

$$\begin{aligned}
\langle w | U(z) \theta \rangle &= \langle \exp(-i\varphi) w | U(r) | \exp(-i\varphi) \theta \rangle \\
&= \exp \left\{ -\frac{|w|^2 + |\theta|^2}{2} \right\} (\cosh r)^{-1/2} \\
&= \exp \left\{ w^* \theta (\cosh r) - 1 + \frac{\tanh r (\exp(-2i\varphi) \theta^2 - \exp(2i\varphi) w^{*2})}{2} \right\} \\
\frac{1}{\pi} \int d^2 w \exp \{ -|w|^2 + aw + bw^* + cw^2 + dw^{*2} \} &= \frac{1}{\sqrt{1-4cd}} \exp \left\{ \frac{a^2 d + ab + b^2 c}{\sqrt{1-4cd}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{III}) \quad \xi_i^{(1)} &= U(p) | \theta \rangle \langle \theta | U(p)^* \text{ かつ} \\
\xi_0^{(2)} &= U(q) | \sigma \rangle \langle \sigma | U(q)^* \text{ の場合:}
\end{aligned}$$

(II)と同様にして、

$$\begin{aligned}
q_0 &= \text{tr}_{\mathcal{H}} (\text{tr}_{\mathcal{H}} V U(p) | \theta \rangle \langle \theta | U(p)^* V^*) U(q) | \sigma \rangle \langle \sigma | U(q)^* \\
&= \langle U(p) \theta | V^* (| U(q) \sigma \rangle \langle U(q) \sigma | \otimes I) V | U(p) \theta \rangle \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int \int d^2 w d^2 z \langle U(p) \theta | w \rangle \langle w | V^* (| U(q) \sigma \rangle \langle U(q) \sigma | \otimes I) V | z \rangle \langle z | U(p) \theta \rangle
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int \int d^2 w d^2 z \langle U(p) \theta | w \rangle \langle \alpha w | U(q) \sigma \rangle \langle \beta w | \beta z \rangle \langle U(q) \sigma | \alpha z \rangle \langle z | U(p) \theta \rangle$$

(II) で与えられた上の式を用いると、誤り確率 q_0 は次のように計算できる。

q_0

$$= \frac{1}{\pi^2} \int \int U(p) \theta | w \rangle \langle \alpha w | U(q) \sigma \rangle \langle \beta w | \beta z \rangle \langle U(q) \sigma | \alpha z \rangle \langle z | U(p) \theta \rangle d^2 w d^2 z$$

$$= \frac{1}{(\cosh q)(\cosh p)} \times$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2)(\tanh q)(\tanh p) + |\alpha|^4(\tanh q)^2(\tanh p)^2 - |\beta|^4(\tanh p)^2}}$$

$$\times \exp \left[- (|\alpha \theta|^2 + |\sigma|^2 - \frac{(\alpha \theta)^2 + (\bar{\alpha} \bar{\theta}^2) - \sigma^2 - \bar{\sigma}^2}{2} (\tanh q)) \right.$$

$$\left. - \frac{(\bar{\sigma} \alpha)^2 + (\sigma \bar{\alpha})^2 + (|\alpha|^4 - 2|\alpha|^2)(\theta^2 + \bar{\theta}^2)}{2} (\tanh p) \right]$$

$$+ ((\alpha^2 |\alpha|^2 + \alpha^2 + \bar{\alpha}^2) |\theta|^2 + (2\alpha^2 + \bar{\alpha}^2) |\sigma|^2) (\tanh q)(\tanh p)$$

$$+ ((|\alpha|^4 - |\alpha|^2) |\theta|^2 + (2|\alpha|^4 - 3|\alpha|^2 + 1) |\sigma|^2) (\tanh p)^2$$

$$+ \frac{1}{2} ((\alpha^4 + |\alpha|^4) \theta^2 + 2|\alpha|^4 \bar{\theta}^2 - 2\alpha^2 \sigma^2 - (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2) \bar{\sigma}^2) (\tanh q)^2 (\tanh p)$$

$$+ \frac{1}{2} ((\alpha^2 |\alpha|^4 - 2\alpha^2 |\alpha|^2 - \bar{\alpha}^2) \theta^2 + (\alpha^2 |\alpha|^4 - 2\alpha^2 |\alpha|^2 - \alpha^2) \bar{\theta}^2$$

$$+ (|\alpha|^4 + 2|\alpha|^2 - 1) \sigma^2 + (\alpha^4 + 2|\alpha|^2 - 1) \bar{\sigma}^2) (\tanh p)(\tanh q)^2$$

$$- ((\alpha^4 + 2|\alpha|^4) |\theta|^2 + (\alpha^4 + |\alpha|^4 + |\alpha|^2) |\sigma|^2) (\tanh q)^2 (\tanh p)^2$$

$$+ ((\alpha^2 |\alpha|^2 - \alpha^2 |\alpha|^4) |\theta|^2 + (\alpha^2 |\alpha|^2 - \alpha^2) |\sigma|^2) (\tanh q)(\tanh p)^3$$

$$+ \frac{1}{2} (\alpha^4 \sigma^2 + |\alpha|^4 \bar{\sigma}^2 - \alpha^2 |\alpha|^4 (\theta^2 + \bar{\theta}^2)) (\tanh q)^3 (\tanh p)^2$$

$$+ \frac{1}{2} (|\alpha|^4 \theta^2 + \alpha^4 \bar{\theta}^2 + \alpha^2 (1 - 2|\alpha|^2) (\sigma^2 + \bar{\sigma}^2)) (\tanh q)^2 (\tanh p)^3$$

$$+ \alpha^2 |\alpha|^2 (|\alpha|^2 + 1) (|\theta|^2 + |\sigma|^2) (\tanh q)^3 (\tanh p)^3 \Big]$$

$$\times \exp \left[\left[\bar{\sigma} \alpha \theta + \sigma \bar{\alpha} \bar{\theta} + (|\alpha|^2 - 1) (\bar{\sigma} \alpha \bar{\theta} + \sigma \bar{\alpha} \theta) (\tanh p) \right. \right.$$

$$\left. - (\bar{\sigma} \alpha (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2) \theta + 2\sigma \bar{\alpha} \alpha^2 \bar{\theta}) (\tanh q)(\tanh p) \right.$$

$$\left. + \alpha^2 (1 - |\alpha|^2) (\bar{\sigma} \alpha \bar{\theta} + \sigma \bar{\alpha} \theta) (\tanh q)(\tanh p)^2 \right]$$

$$\left. + (\bar{\sigma} \alpha | \alpha |^4 \theta + \sigma \bar{\alpha} \alpha^4 \bar{\theta}) (\tanh q)^2 (\tanh p)^2 \right] \frac{1}{(\cosh q)(\cosh p)} \Bigg].$$

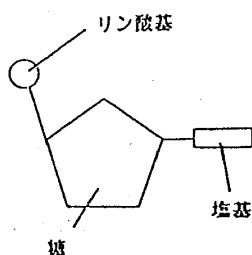
第5節 情報力学の遺伝子解析への応用

次に、情報力学の一つの応用として数学的には最もシンプルである遺伝子進化の情報論的取扱いについて考えてみる。

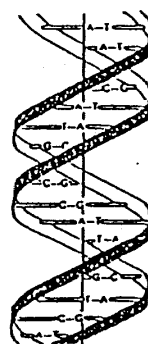
(1) 遺伝子とは

この節では、後の話の準備として、DNAの構造と働き、遺伝情報の発現やタンパク質合成などについて教科書風にその基礎的な部分を解説することにする。

1944年AveryとGriffithの生化学的な実験により、遺伝子の本体がDNAと呼ばれる核酸（デオキシリボ核酸）であることがわかり、その後 Watson と Crick によりその構造は、2重螺旋となっていることが判明している。このDNAの二重螺旋の両側の棒に当たる主鎖は、デオキシリボースと呼ばれる糖と、リン酸が交互に規則正しくつながってできていて、この糖の部分に、4種類の塩基（アデニン(A)、チミン(T)、グアニン(G)、シトシン(C))のひとつが結合してヌクレオチドという物質を作っているのである(図5.1.1: 塩基は四種類あるのでヌクレオチドも四種類できる)。これらの塩基のうちTはAと、CはGとのみ水素結合により結びつき、いわゆる塩基対を作り、二重螺旋の両側的主鎖を結び付けている(図5.1.2)。この結合の特異性を“Watson-Crickの相補性”と呼ぶが、この相補性により、一方の主鎖の塩基配列がわかれば、もう一方の主鎖の塩基配列も完全に決定まってしまうのである。



〔図5.1.1 ヌクレオチド〕



〔図5.1.2 DNA分子〕

一方、生物の相違や個体の特異性を直接与えているのはタンパク質である。タンパク質は20種類のアミノ酸のいくつかがつながってできており、タンパク質の性質はアミノ酸の列によって決定される。このアミノ酸列の決定を行うのがDNAの塩基A, T, C, Gの列である。従って、DNAはタンパク質の構造を決定する情報、すなわち遺伝情報をもっていることになる。以下にDNAからタンパク質が合成される過程を見て行くことにしよう。

DNAのもつ遺伝情報はメッセンジャーRNA (m-RNA) と呼ばれる核酸に転写される (RNAは一本鎖でTの代わりにウラシル(U)を用いA, U, C, G

の塩基で列をつくる)。DNAの情報を写し取ったm-RNAはリボソームという細胞質内の小器官に付着し遺伝情報が読み取られる。m-RNA上の互いに隣りあった3つの塩基(コドンと呼ばれアミノ酸を1つ指定する(表5.1.3))は、t-RNA(細胞質内に存在し、特定のアミノ酸と結合しそのアミノ酸をリボソームに運搬する)と結合、さらに各アミノ酸同士のペプチド結合(1つのアミノ酸にカルボキシル基とアミノ基で結合させること)によりタンパク質が合成される(図5.1.4)。この合成はホルミルメチオニンと呼ばれる開始コドン(AUG)から始まり終止コドン(UAA, UAG, UGAのいずれか)に至るまで行われる。

1. st	2. nd				3. rd
	T	C	A	G	
T	フェニルアラニン	セリン	チロシン	システイン	T
	ロイシン		STOP	STOP トリプトファン	C A G
C	ロイシン	プロリン	ヒスチジン	アルギニン	T
			グルタミン		C A G
A	イソロイシン	スレオニン	アスパラギン	セリン	T
	メチオニン		リジン	アルギニン	C A G
G	バリン	アラニン	アスパラギン酸	グリシン	T
			グルタミン酸		C A G

[表5.1.3 遺伝暗号表]

DNA	ATG	TGG	GGA	GCA	TAA	GGT	CTA	ATG	TCC
	TAC	ACC	CCG	CGT	ATT	CCA	GAT	TAC	AGG
m-RNA	AUG	UGG	GGA	GCA	UAA	GGU	CUA	AUG	UGG
タンパク質	Het	Trp	Gly	Ala	Stop			Het	Ser

[図5.1.4 タンパク質合成の過程]

以上のDNAとRNAの働きをもう一度要約しておくと次の(図5.1.5)のようになる。



[図5.1.5 DNAとRNAの役割]

上図で、転写の点線の部分は、TeminとBaltimoreによって発見された逆転写を表しており、これは、ある種のウィルス等が持っている逆転写酵素によって行われるものである。なお、この逆転写酵素は癌研究などにおいて現在注目されているものでもある。

以上でDNAの主たる性質の解説を終えるが、こういった話を聞くとすぐに次の疑問(問題)が起こってくるであろう：

(1) ここで説明したDNA(遺伝子)やRNAの振舞いはどのような力学法則(原理)の下で行なわれているのであろうか。

(2) 遺伝子、すなわち、塩基の配列からどのようにしてそれが示す情報を読みとればよいのであろうか。

(3) 生体の変化は遺伝子やタンパク質の変化によって起こされると思われているが、遺伝子の変化と生体の変化はどのように対応しているのであろうか。

DNAはこんな性質をもつ、RNAはこんな働きをするといわれれば、それは『なぜか?』と誰でも思うであろう。したがって、疑問(1)はごく自然な疑問であるが、非常に大きな問題でまだその影すら掴めてはいないといった現状である。それ故、ここでは(1)の一部分といえる(2)と(3)を数理情理的見地から考えてみよう。

(2)生物の類似度の測定とエントロピーの導入

前節は、遺伝子とは何かを概説したにすぎなかったが、この節からいよいよ情報力学を生物の進化や分類に役立てる方法を見て行くことにしよう。

遺伝子のレベルから生体の進化を論じるには対象となる生体の遺伝子列を比較しなければならない。このために、置換、欠落、挿入を考慮し、遺伝子列を整列化をすることが必要となる。今、2種の生物A, Bのアミノ酸配列が

A: M P Q R S T V W P Y T

B: M N P Q Y S T W Q Y T

であったとすると、このままでは2つの列の類似、相違がはっきりしない。そこで列の間にギャップ" *"を挿入することによって整列化を行うと、

A: M * P Q R S T V W P Y T

B: M N P Q Y S T * W Q Y T

となる。*(ギャップ)は他方に対応するアミノ酸がない場合に挿入される。この処理により、AのRと2番目のPがBではY, Qに変わったことがわかり、BにおいてNが挿入され、Vが欠落していることがわかる。整列化の方法についてここでは詳しく述べないが、コンピューターを用いて自動的に整列化を行う方法がいくつか

考案されている。さて、この2つの列を整列化した後の列を次のように再び同じ記号 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ で表す：

$$\mathcal{A} : a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$\mathcal{B} : b_1 b_2 \cdots b_n$$

ここで、 a_k や b_k はアミノ酸または* (空席)を表している。こうして整列化された $\mathcal{A}$ や $\mathcal{B}$ は21個の事象を含んでいるが、これらに生起確率を付加すれば事象系が構成されることになる。そこで、生体 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ に変化したとすると、

$$\{\mathcal{A}, p = (p_k)\} \text{ が入力系で, } \{\mathcal{B}, q = (q_k)\} \text{ が出力系}$$

と考えられる。さらに、入力系と出力系の関わりを記述するチャネル Γ をシャノンに従って遷移確率で与えることにすると、それは整列化した後での $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ における対応付けられたアミノ酸の同時確率分布 $r = (r_{ij})$ を用いて次のように定められる：

$$\Gamma = (p(i|j)), \quad p(i|j) \equiv r_{ij}/p_j.$$

こうして、入出力系とチャネルが決まったので、後は二つの複雑性 $C(p)$ と $T(p; \Gamma)$ を定めればよい。この2つの複雑性は、例えば次のように与えられる：

(1) $C(p) = S(p)$ ；入力系のもつ情報量

$$T(p; \Gamma) = I(p; \Gamma)；\text{入力系から出力系へ伝えられた情報量}$$

(2) $C(p) = n$ ；整列化した後でのアミノ酸配列の長さ

$$T(p; \Gamma) = \text{置換率, あるいは重み付き置換率}$$

こう考えると、遺伝子が情報力学の枠内で扱え、生物の進化等が議論できることになる。

複雑さを(1)のように与え、さらに議論を進めることにしよう。ところで、チャネル Γ の定め方から、 $I(p; \Gamma) = S(r | p \otimes q)$ となる。また、どの生物を扱ったかははっきりさせるために、 $S(p) = S(\mathcal{A})$ 、 $S(r | p \otimes q) = I(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ と書くことにすると、2つの複雑さ(シャノンエントロピー S と相互エントロピー I)を用いて次の量 $r(\mathcal{B} | \mathcal{A})$ を定義することができる。

$$r(\mathcal{B} | \mathcal{A}) = I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) / S(\mathcal{A})$$

$$= - \frac{\sum_{i,j} r_{ij} \log \{r_{ij} / (p_i q_j)\}}{\sum_i p_i \log p_i}$$

$$(i, j = 0, 1, \dots, 20)$$

この $r(\mathcal{B} | \mathcal{A})$ は、 $\mathcal{A}$ がもつ情報量と、 $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ へ伝達された情報量の比であるが、これは情報論的に見ると、 $\mathcal{A}$ に対する $\mathcal{B}$ の類似度を表す尺度と考えることができる。この値は $0 \leq r(\mathcal{B} | \mathcal{A}) \leq 1$ であり、 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の間の類似が大きくなると $r(\mathcal{B} | \mathcal{A})$ の値は大きくなる。我々は $r(\cdot | \cdot)$ をエントロピー比と呼ぶことにする。さらに、対称エントロピー比 $r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ をエントロピー比 $r(\mathcal{B} | \mathcal{A})$ 、 $r(\mathcal{A} | \mathcal{B})$ を使って、

$$r(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{2} (r(\mathcal{B} | \mathcal{A}) + r(\mathcal{A} | \mathcal{B}))$$

で定義すると、これは $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の類似度を示しているといえる。

以下に、その具体例を示しておこう。整列化によって得られたアミノ酸列が

$$\mathcal{A}: M * P Q R S T V W P Y T$$

$$\mathcal{B}: M N P Q Y S T * W Q Y T$$

であったとすると, $\mathcal{A}$ のアミノ酸配列についての入力系は

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & M & P & Q & R & S & T & V & W & Y \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

となり, $\mathcal{B}$ のアミノ酸配列についての出力系は

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B} \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & M & N & P & Q & S & T & W & Y \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} \end{pmatrix}$$

となる. 更に $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ の複合完全事象系は

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} \times \mathcal{B} \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (*, N) \cdots (M, M) \cdots (P, P) \cdots (P, Q) \cdots (R, Y) \\ \frac{0}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \\ \cdots (S, S) \cdots (T, T) \cdots (V, *) \cdots (W, W) \cdots (Y, Y) \\ \frac{1}{12} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

と定まる.

この完全事象系のもとで2つの複雑量は, 次のようにして求めることができる.

$$S(\mathcal{A}) = - \left(8 \times \frac{1}{12} \log_e \frac{1}{12} + 2 \times \frac{2}{12} \log_e \frac{2}{12} \right) = 2.254$$

$$S(\mathcal{B}) = - \left(6 \times \frac{1}{12} \log_e \frac{1}{12} + 3 \times \frac{2}{12} \log_e \frac{2}{12} \right) = 2.138$$

$$\begin{aligned} I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &= 5 \times \frac{1}{12} \log_e \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12}} + 4 \times \frac{1}{12} \log_e \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{12}} \\ &\quad + \frac{1}{12} \log_e \frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{12} \cdot \frac{2}{12}} + \frac{2}{12} \log_e \frac{\frac{2}{12}}{\frac{2}{12} \cdot \frac{2}{12}} \\ &= 2.0228 \end{aligned}$$

さらに, エントロピー比と対称エントロピー比は

$$r(\mathcal{B} | \mathcal{A}) = I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) / S(\mathcal{A}) = 0.897$$

$$r(\mathcal{A} | \mathcal{B}) = I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) / S(\mathcal{B}) = 0.946$$

$$r(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{2} \{ r(\mathcal{B} | \mathcal{A}) + r(\mathcal{A} | \mathcal{B}) \} = 0.922$$

となる.

(3) 遺伝距離と進化系統樹

前節では、整列化された2つの遺伝子列 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の類縁度を測る尺度をシャノンの相互エントロピーをもとにして導いたが、この節では、この尺度とアミノ酸の置換率から得られる $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の(遺伝)距離を用いて生物の進化を計量的に扱う方法を考えてみる。分類の対象となる生物種に対し、塩基配列やアミノ酸配列の比較から生物の距離を測定し、それらを行列の形に表したものを遺伝距離行列という。つまり、種 i と j の遺伝距離を D_{ij} とするとき、遺伝距離行列とは、 D_{ij} を要素とする行列 $D = (D_{ij})$ のことである。系統樹はこの行列を基にして作成されるのであるから、遺伝距離行列の決め方にはいろいろあるが、ここでは、エントロピーに基づく遺伝距離について説明する。

[定義] エントロピー遺伝距離[8]

生物 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の系において対称エントロピー比 $r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ が定義できるときエントロピー比に基づく遺伝距離 $D(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ を以下のとおりに定める。

$$D(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 1 - r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

この量をエントロピー進化率と呼ぶ。

さて、上記の距離を用いれば、遺伝距離行列 D が決まるので、次に系統樹作成のアルゴリズムを紹介しよう。

最も簡単な系統樹作成法のアルゴリズムはUPG(Unweighed Pair Group Clustering)法と呼ばれているものである。これは、ある祖先から枝別れした生物の分岐時間はどれも等しいという仮定のもとに、分類の対象となっているいくつかの生物種の遺伝距離行列 D を用い、それらの生物をグループに分けて系統樹を作成する方法である。グループを、 $(\quad)$ で表すと、(種, 種), (種, グループ), (グループ, グループ)の組合せが可能である。総当たりに可能なすべての組合せ(種と種,あるいは、種とグループ, グループとグループ)の距離を求め、値の最小のものを1つのグループにする。これを、対象生物種全てが1つのグループになるまで繰り返すと系統樹ができあがるのである。

ここで、種 x と種 y との距離 $D(X, Y)$ 、種 x と種 z との距離 $D(X, Z)$ が何らかの仕方で求められたとすると、これを用いて

$$D(X, (Y, Z)) = \frac{D(X, Y) + D(X, Z)}{2}$$

が与えられる。この $D(X, (Y, Z))$ は、種 x と種 y, z の組との平均距離であるが同時に、グループ同士の平均距離(たとえば、種 x 、種 y のグループと、種 z 、グループ (v, w) のグループ)は、

$$D((X, Y), (Z, (V, W))) = \frac{D(X, Z) + D(X, V) + D(X, W) + D(Y, Z) + D(Y, V) + D(Y, W)}{6}$$

で計算される。

実際に D_{ij} が表5.3.1より与えられたとして、系統樹を作成してみる。 a, b, c, d, e は、生物種である。

種	a	b	c	d	e
a	0	3	5	7	8
b	3	0	6	8	8
c	5	6	0	9	10
d	7	8	9	0	7
e	8	8	10	7	0

[表 5.3.1]

種 a と種 b の距離が最小であることがわかるので、まず種 a, b がグループを作る。(a, b)。次に、グループ(a, b)、種 c, d, e のどの 2 つの組み合わせが最短距離になるかを計算する。

$$D((a, b), c) = \frac{D(a, c) + D(b, c)}{2} = \frac{5 + 6}{2} = 5.5$$

$$D((a, b), d) = \frac{D(a, d) + D(b, d)}{2} = \frac{7 + 8}{2} = 7.5$$

$$D((a, b), e) = \frac{D(a, e) + D(b, e)}{2} = \frac{8 + 8}{2} = 8$$

$$D(c, d) = 9 \quad (\text{表より})$$

$$D(c, e) = 10 \quad (\quad " \quad)$$

$$D(d, e) = 7 \quad (\quad " \quad)$$

となり、最小値は $D((a, b), c)$ である。よってグループ(a, b)と種 c がグループを作る。今度はグループ((a, b), c)、種 d, e 間の距離を求める。

$$D(((a, b), c), d) = \frac{7 + 8 + 9}{3} = 8$$

$$D(((a, b), c), e) = \frac{8 + 8 + 10}{3} = 8.67$$

$$D(d, e) = 7$$

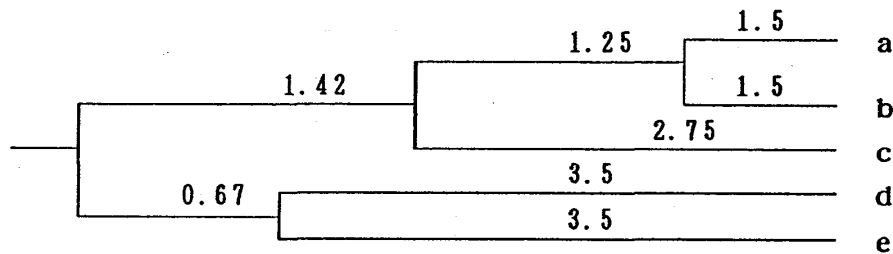
よって、グループ(d, e)ができる。最後に、

$$D((((a, b), c), (d, e))) = \frac{7 + 8 + 8 + 8 + 9 + 10}{6} = 8.33$$

が計算される。UPG法では、グループを作った生物種の共通祖先からの遺伝距離は等しいと仮定しているので、例えば、種 d, e の共通祖先からの距離は、

$$\frac{D(d, e)}{2} = 3.5$$

とする。このことを考慮し、系統樹を作成したものが、(図5.3.2)である。

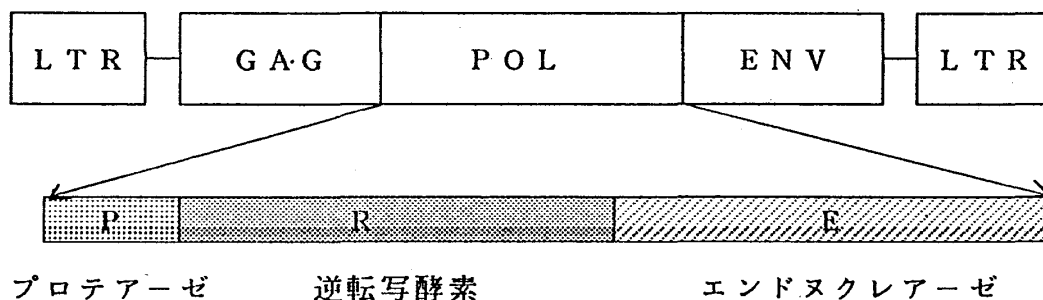


[図 5.3.2]

(4) POLタンパクによるAIDSウイルスの系統

AIDSウイルスは逆転写酵素をもつことや形態、遺伝子構成からレトロウィルス亜科に属すると考えられている。この節では、逆転写酵素をコードしているPOLタンパク質の全領域を用いて、AIDSウイルスの系統を示してみることにする。

1980年代前半にアメリカで流行し始めたAIDS（後天性免疫不全症）は、その後急速に世界中に広まりWHO（世界保健機構）への報告によると137カ国85273人にのぼっている（1989年3月末現在）。この病気は病原体ウィルスであるヒトAIDSウイルスが免疫系で中心的役割を果たすヘルパーT細胞に感染し破壊することによって免疫不全をおこすというものである。この奇妙な病気が発見されて以来、多くの科学者らによって感染経路やウィルスの構造、配列については明らかにされつつあるがAIDSウイルスに対するワクチンはいまのところなく、このウィルスは現在も人々の間に蔓延し続けている。また、POLタンパク質は、プロテアーゼ、逆転写酵素、エンドヌクレアーゼという3つの酵素からなる複合タンパク質である。ほとんどのレトロウィルスではこれらの酵素が下図のような順序で領域上に存在している。



プロテアーゼ

逆転写酵素

エンドヌクレアーゼ

プロテアーゼ：タンパク質分解酵素

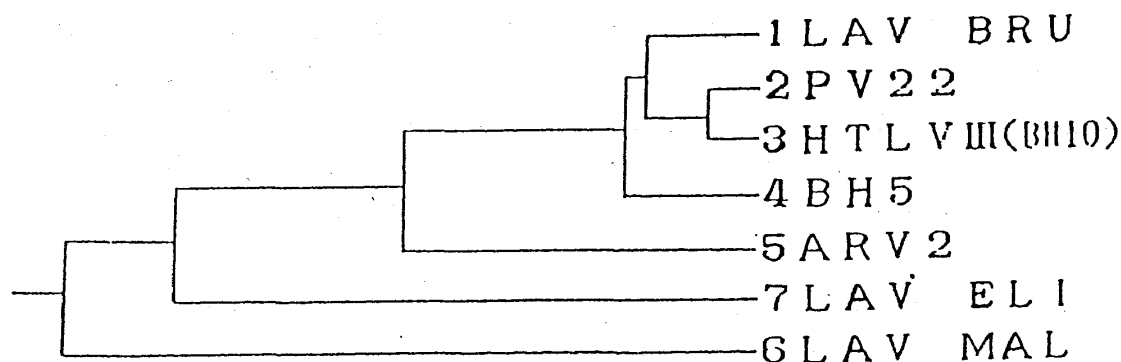
逆転写酵素：RNA依存DNA複製酵素

エンドヌクレアーゼ：DNA鎖を途中で切断する酵素

最後に（表5.4.1）に示したAIDSウィルスのPOLタンパク質からプロテアーゼを除いたアミノ酸配列を用いて作成した系統樹を示しておこう（図5.4.2）。

AIDSウィルス名	長さ
1 LAV BRU	828
2 H9 PV. 22	828
3 HTLVⅢ (BH10)	828
4 HTLVⅢ (BH5)	829
5 ARV2	828
6 LAV MAL	828
7 LAV ELI	828

〔表5.4.1 対象とするヒトAIDSウィルスのPOLタンパク質からプロテアーゼを除いた部分のアミノ酸列の長さ〕



〔図5.4.2〕

参考文献を全て載せると多すぎるので、私自身の論文のみ挙げるが、完全な文献はそこで引用したものを参照して欲しい。

参考文献

- [1] M. Ohya: "Note on Quantum Probability", Lettere al Nuovo Cimento, Vol. 38, No. 11, 402-404(1983)

- [2] M.Ohya: "Some Aspects of Quantum Information Theory and Their Applications to Irreversible Processes", Report on Mathematical Physics, 27, 19-47 (1989)
- [3] L.Accadi & M.Ohya: "Compound Channels, Transition Expectations and Liftings", SUT preprint
- [4] M.Ohya: "On Compound State and Mutual Information Theory", IEEE Transactions on Information Theory, IT-29, 770-774 (1983)
- [5] M.Ohya: "Fractal Dimensions of States", Springer lecture Note (to appear)
- [6] 大矢 雅則: "状態の ε -エントロピーとフラクタル次元", 素粒子論研究, 80巻4号, D138-D149 (1990)
- [7] 大矢, 吉見, 広田: "量子制御通信過程における誤り確率の厳密な導出", 電子情報通信学会論文誌, B. Vol. j71-b, NO. 4, 533-539 (1988)
- [8] M.Ohya: "Information Theoretical Treatments of genes", The Trans. IEICE, Vol. E72, No. 5, 556-560 (1989)
- [9] 大矢, 梅垣: "量子論的エントロピー", 共立出版 (1983)
- [10] 大矢 雅則: "エントロピー, 遺伝子, フラクタル", 森北出版 (予定)