

解析汎関数のいくつかの変換とその応用

上智大 理工 吉野邦生 (Kunio Yoshino)

平成8年 5月 21日

解析汎関数にたいして幾つかの変換を定義し、その応用として幾つかの定理と公式を導く。Carlson の定理、演算子法で重要な Lerch の定理、デジタル信号の理論で用いられる Whittaker-Shannon の定理 (Sampling 定理)、ラプラス変換の理論で知られている Widder の公式、Schlömlich 展開の例を与える Polya-Pisot の公式などである。

1 解析汎関数のいくつかの変換

W を C^n の開集合とする。 $H(W)$ で W 上の正則関数の全体をあらわす。 K を C^n のコンパクト凸集合とすると、

$$H(K) = \lim_{K \subset W} \text{ind} H(W)$$

とおく。 $H(K)$ には DFS 位相が入ることが知られている。 $H(K)$ の双対空間を $H'(K)$ であらわし $H'(K)$ の元を解析汎関数とよぶ。 $T \in H'(K)$ としたとき T の Fourier-Borel (フーリエボレル) 変換 $\tilde{T}(z)$ を次の様に定義する。

$$\tilde{T}(z) = \langle T, e^{zt} \rangle, (z \in C^n).$$

又、指数型整関数の空間を

$$\text{Exp}(C^n; K) = \{f(z) \in H(C^n); \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, |f(z)| \leq C_\varepsilon e^{H_K(z) + \varepsilon|z|}, (z \in C^n)\}.$$

と定義する。

解析汎関数の Fourier-Borel 変換の像については次の定理が知られている。

定理 1 (Ehrenpreis-Martineau) Fourier-Borel 変換は解析汎関数の空間 $H'(K)$ から指数型整関数の空間 $\text{Exp}(C^n; K)$ への線形位相同型である。

K が $K = \prod_{i=1}^n K_i$ という直積の形をしていると解析汎関数 T の Cauchy-Hilbert (コーシーヒルベルト) 変換 $\check{T}(w)$ をつぎで定義することができる。

$$\check{T}(w) = \langle T, \prod_{i=1}^n \frac{1}{w_i - t_i} \rangle.$$

ここで

$$H_0\left(\prod_{i=1}^n (C \setminus K_i)\right) = \{g(w) \in H\left(\prod_{i=1}^n (C \setminus K_i)\right); \lim_{|w| \rightarrow \infty} g(w) = 0\}$$

とおく。

このとき次が知られている。

命題 1. Cauchy-Hilbert 変換は $H'(K)$ から $H_0(\prod_{i=1}^n (C \setminus K_i))$ への線形位相同型である。

Cauchy-Hilbert 変換の逆変換は境界値写像と呼ばれる。

例えば $f(t) \in C([a, b])$ の Cauchy-Hilbert 変換を $F(t + is)$ とするとき

$$\lim_{s \rightarrow 0} \{F(t + is) - F(t - is)\} = F(t + i0) - F(t - i0) = -2\pi i f(t)$$

が成立するからである。

次の Legendre 多項式 $P_n(x)$ と第二種 Legendre 関数 $Q_n(x)$ の関係はこの例である。

$$Q_n(t + i0) - Q_n(t - i0) = -\pi i P_n(t), \quad (-1 < t < 1)$$

さて $K = \prod_{i=1}^n K_i$ であるとき指数型整関数 $f(z) \in \text{Exp}(C^n : K)$ に対しそのラプラス変換を次の様に定義する。

$$L(f)(w) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(z) e^{-wz} dz.$$

次が成立する。

命題 2.

$$L \circ FB = CH$$

つまりフーリエボレル変換を行ってからラプラス変換をしたものはコーシーヒルベルト変換に等しい。

C^n のコンパクト凸集合 K に対し i 番目座標への射影を K_i と表す。 $K_i \subset \{t_i \in C; |Im t_i| < \pi\}$, $(1 \leq i \leq n)$ であると変換 G (Avanissian-Gay 変換) が次の様にして定義できる。

$$G(T)(w) = \langle T, \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - w_i e^{t_i}} \rangle, (w = (w_1, \dots, w_n)).$$

次の性質を持つ。

命題 3. ([2])

$$(1) G(T)(w) \in H_0\left(\prod_{i=1}^n (C \setminus \exp(-K_i))\right).$$

$$(2) G(T)(w) = \sum_{m \in N^n} \tilde{T}(m) w^m.$$

(3) (反転公式)

$$\tilde{T}(z) = \left(\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \right)^n \int_{\prod_{i=1}^n \Gamma_i} G(T)(w) w^{-z-1} dw.$$

が成立する。但し、 Γ_i は $\exp(-K_i)$ を正のむきに囲む路である。

注意 (2) において $w = e^{-t}$ とおくと

$$G(T)(e^{-t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}(n) e^{-nt} = \int \tilde{T}(z) e^{-zt} d\mu(z),$$

となる。但し、 $d\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(z-n)$ 、(δ はディラックのデルタ関数) である。このため Avanissian-Gay 変換は時々離散的ラプラス変換とも呼ばれる。

数列空間 $l(K)$ と標本化写像

$$l(K) = \{ \{a_m\}; \exists f \in \text{Exp}(C^n : K), \text{ s.t. } a_m = f(m), (m \in N^n) \}$$

と定義する。

命題 4 ($l(K)$ の特徴付け) $K = \prod_{i=1}^n K_i \subset \prod_{i=1}^n \{t_i \in C; |Im t_i| < \pi\}$ であるとする。このとき次の (1), (2), (3) は同値である。

$$(1) \{a_m\} \in l(K)$$

$$(2) \sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \in H_0\left(\prod_{i=1}^n C \setminus \exp(-K_i)\right)$$

$$(3) \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \left| \sum a_n c_n \right| \leq C_\varepsilon \sup_{t \in K_\varepsilon} \left| \sum c_n e^{t n} \right|.$$

がすべての有限数列(ある番号からさきではすべてゼロである数列) $\{c_n\}$ に対して成立する。

(1) と (2) の同値性は Leroy-Lindelöf の定理の特別な場合と考えることができる。又、(1) と (3) の同値性は ([9]) による。

$Exp(C^n : K) \ni f \rightarrow \{f(m)\} \in l(K)$ を標本化写像と呼ぶ。定義から標本化写像は全射である。さらにもし $K \subset \prod_{i=1}^n \{t_i \in C; |Im t_i| < \pi\}$ であれば後述する Carlson の定理により単射である。

2 Lerch の定理

[12] において次の指数型整関数に関する Liouville 型定理を証明した。
定理 2 $f \in Exp(C^n : K)$ とし、次の条件を満たしているとする。

$$|f(m)| \leq A|m|^p, (m \in Z^n).$$

もし K が実コンパクト集合であると $f(z)$ は高々 p 次の多項式である。

- (注意) (1) $K = \{0\}$ のときは R. Gay により示された。
 (2) $K = \{0\}, n = 1$ とした場合の定理は ([4]) に出ている。

さて、定理 2 を $n = 1$ の場合に使うことにより Mikusinski の方法 ([6]) とは異なる Lerch の定理の証明を与えることができる。

Lerch の定理

$f(t)$ を $[0, a]$ の連続関数で次の条件を満たしているとする。

$$\left| \int_0^a f(t) e^{mt} dt \right| \leq M, (m = 0, 1, 2, \dots)$$

このとき $f(t) = 0$ である。

(証明) $F(z) = \int_0^a f(t) e^{zt} dt$ とおく。仮定から

$$|F(m)| \leq M, (m = 0, 1, \dots).$$

又 $F(z)$ の定義から

$$|F(-m)| \leq a \sup_{t \in [0, a]} |f(t)|, (m = 1, 2, \dots).$$

が分かる。

$$|F(z)| \leq ae^{ax}, (z = x + iy \in C)$$

である。従って、定理2により $F(z)$ は定数関数である。 $\lim_{z \rightarrow -\infty} F(z) = 0$ に注意すると

$$F(z) = 0, (z \in C)$$

が分かる。ゆえにフーリエラプラス変換の単射性を使うか又はワイエルシュトラスの多項式近似定理を使うと

$$f(t) = 0, (t \in [0, a])$$

が結論できる。

系 $f(t)$ を $[0, a]$ の連続関数で次の条件を満足しているとする。

$$\int_0^a f(t) e^{mt} dt = 0, (m = 0, 1, 2, \dots).$$

このとき $f(t) = 0, (t \in [0, a])$

である。

(注意) 境界値写像を用いても証明できる。([15])

数学的帰納法を用いると Lerch の定理を次のように高次元化することができる。

Lerch の定理の高次元化

$K = \prod_{i=1}^n [0, a_i]$ とおく。 $f(t) \in C(K)$ は次の条件を満足しているとする。

$$\left| \int_K f(t) e^{mt} dt \right| \leq M, (m \in N^n).$$

このとき $f(t) = 0, (t \in K)$ である。

解析汎関数による Lerch の定理の一般化については[13] を見てください。

3 Carlson の定理

定理 ([2]) $f(z) \in \text{Exp}(C^n : K)$ とし、次の条件を満たしているとする。

$$f(m) = 0, (m \in N^n).$$

もし $K \subset \prod_{i=1}^n \{t_i \in C : |Im t_i| < \pi\}$ であると $f(z) = 0$ である。

(証明)

Martineau-Ehrenpreis の定理により

$$\tilde{T}(z) = f(z)$$

となる解析汎関数 $T \in H'(K)$ が存在する。命題 3 の (2) により

$$G(T)(w) = \sum \tilde{T}(m)w^m = \sum f(m)w^m.$$

仮定より $f(m) = 0$ であるので

$$G_T(w) = 0.$$

命題 3 の (3) (反転公式) により

$$f(z) = 0$$

が判る。

(注意) 素粒子論などでは右半平面 (複素角運動量平面) 上での指数型正則関数に対する Carlson の定理が使われる。このことも込めて Carlson の定理に関する話題については例えば [14] を見てください。

4 Polya-Pisot の公式

Cauchy-Hilbert 変換と Avanissian-Gay 変換を結ぶものとしてつぎの公式がある。

定理 ([5])

$K \subset \{t \in C; |Im t| < \pi\}$ とする。このとき $f(z) \in \text{Exp}(C : K)$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-nt} = \frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} L(f)(t + 2\pi in)$$

が成立する。

(証明)

$$\frac{1}{1 - e^{\zeta - t}} = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t - \zeta + 2\pi i n}$$

の両辺に解析汎関数 $T \in H'(K)$ を作用させる。

例 (Schlömlich 展開 [7])

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_0(nx) e^{-na} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(a + 2mi\pi)^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a - 2mi\pi)^2 + x^2}} \right)$$

$J_0(z)$ は 0 次のベッセル関数であり $i = \sqrt{-1}$ である。

5 Widder の公式

Widder の公式 $f(z) \in \text{Exp}(C : K)$, $g(w) = \int_0^{\infty} f(z) e^{-zt} dz$ とする。

$$f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{k!} g^{(k)} \left(\frac{k}{z} \right) \left(\frac{k}{z} \right)^{k+1}.$$

ここで $g^{(k)}$ は $g(w)$ の k 次導関数である。

解析汎関数の理論を使うと指数型整関数に対する Widder の公式を次のようにして導くことができる。

(証明) $f(z) = \tilde{T}(z)$ となる $T \in H'(K)$ が存在する。又、命題 2 により $g(w) = \tilde{T}(w)$ である。従って

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{k!} g^{(k)} \left(\frac{k}{z} \right) \left(\frac{k}{z} \right)^{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T, \left(1 + \frac{zt}{k} \right)^k \rangle = \tilde{T}(z).$$

(注意) (1) 上の証明は Widder による証明 ([10]) と同様に Paley-Wiener による証明 ([8]) と異なる。

(2) K が一般のコンパクト凸集合のときには Fantappie 変換 $\hat{T}(p)$ を用いた次の公式が成立する。 ([16])

$$\tilde{T}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{k!} \prod_{l=n}^k D_l \hat{T} \left(-\frac{k}{z} \right).$$

ここで

$$D_l f(p) = l f(p) + \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f(p)}{\partial p_i}$$

であり

$$\hat{T}(p) = \langle T_t, \frac{1}{(1 + \sum_{i=1}^n p_i t_i)^n} \rangle$$

である。

(3) 超幾何関数から合流型超幾何関数を得る操作は Widder の公式に他ならない。([17])

6 Sampling 定理

Carlson の定理を使うと標本化写像 $Exp(C^n : K) \longrightarrow l(K)$ が単射であることが分かる。

$l(K)$ から $H_0(C \setminus exp(-K))$ への対応はディジタル信号処理の分野では z 変換とよばれている。 $l(K)$ から $Exp(C^n : K)$ への対応は次の Sampling 定理で実現される。

定理 3([12]) $K = \prod_{i=1}^n \sqrt{-1}[-b_i, b_i], (|b_i| < \pi)$ とする。もし $f(z) \in Exp(C^n : K)$ であると次が成立する。

$$f(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{m \in N^n} e^{-\varepsilon |m|} f(m) \prod_{i=1}^n \frac{\sin(\pi(z_i - m_i))}{\pi(z_i - m_i)}.$$

注意 (1) $n = 1$ のとき上の級数は Whittaker-Shannon の補間公式、又は Cardinal 級数と呼ばれることもある。

(2) Sampling 定理は $n = 1$ のときは音声のディジタル信号処理で重要であり、 $n = 2$ のときは画像のディジタル処理で重要である。([1],[11])

(3) 指数型正則関数の自然数の上の値のみを使う補間公式としては例えば Newton の補間公式がある。([11])

例 (Dougal 展開) $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ とする。このとき次が成立する。

$$P_z(\cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(\cos \theta) \frac{\sin(\pi(z - n))}{\pi(z - n)}$$

$P_z(\cos \theta)$ は Legendre 関数であり $P_n(\cos \theta)$ は n 次の Legendre 多項式である。

参考文献

- [1] 有本卓：信号、画像のデジタル処理, 産業図書 1980.
- [2] V.Avanissian and R.Gay : Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entieres, Bull Soc.Math.France (1975)
- [3] C.Bernstein and R.Gay : *Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis*, Vol.II, Springer Verlag, Heidelberg, (1995).
- [4] R.P.Boas : *Entire Functions*, Academic Press, New York, (1954).
- [5] P.Henrici : *Applied and Computational Complex Analysis*, John Wiley and Sons, (1977).
- [6] J.G.Mikusinski : *Operational Calculus*, Pergamun Press.(1959)
- [7] 森口、宇田川、一松：数学公式III, 岩波全書.(1960)
- [8] R.E.A.C.Paley and N.Wiener : *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Amer.Math.Soc.Colloquim Publ. 19, New York. (1934)
- [9] G.Rauzy : Les zeros entieres des fonctions entieres de type exponentiel, Seminaire de Theorie des Nombres, Annes (1976-1977).
- [10] D.V.Widder : *An Introduction to transformation theory*, Academic Press. New York London (1971).
- [11] 吉野邦生, 荒井隆行：デジタル信号と超関数, 海文堂,(1995).
- [12] K.Yoshino : Liouville type theorem for entire functions of exponential type, Complex Variable. vol.5,28-51. (1985).
- [13] K.Yoshino : Lerch's theorem for analytic functionals, Proc. Japan Acad. vol.58, Ser.A, no.9 (1982).
- [14] K.Yoshino : On Carlson's theorem for holomorphic functions, *Algebraic Analysis*, vol.2, Academic Press. (1988).
- [15] K.Yoshino : New proofs of Lerch's theorem, in preparation,

- [16] K.Yoshino : Representation of entire functions of exponential type by Widder's formula, in preparation.
- [17] K.Yoshino : Some transformations of analytic functionals and its applications, to appear