

1-conn. 4-manifold M^4 with $b(M)=3$ and $H_2(M)=\mathbb{Z}$.

相模工大 津久井 康之

connected compact n -manifold M^n に embed された PL n -balls $\{B_i^n\}_{i=1}^k$ について, ① $\bigcup_{i=1}^k B_i = M$, ② $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$ は $(n-1)$ -manifold, であるとき $\{B_i\}$ を M の ball covering といい, この k の最小数を $b(M)$ と記す [1][2].

この見地から 4次元 manifold を考える. 全てを PL-category で取りあつかう. ことわらない限り manifold は連結とする.

$H_2(M)=0$ のときには次のような結果がある.

Proposition. 1. M^4 : closed 4-manifold, $b(M)=3, H_2(M)=0$.

$$\iff M^4 \cong k(S^1 \times S^3) \# \varepsilon(S^1 \times_{\tau} S^3), \quad k+\varepsilon \geq 1, \quad \varepsilon=0 \text{ or } 1,$$

ここで $S^1 \times_{\tau} S^3$ は S^1 上の S^3 -bundle である.

$H_2(M^4) \neq 0$ のときのむつかしさは, 後でみるように, 1-3 knot のむつかしさの反映である. ここでは $H_2(M) \neq 0$ のうちの最も簡単な場合として, $b(M^4)=3, H_2(M)=\mathbb{Z}$ なる 1-connected

closed 4-manifold M^4 について考えることにする ($b(M)=3$ のときは, 「1-conn. $\Leftrightarrow H_1(M)=0$ 」で, $H_1(M), H_2(M)$ はつねに, free abelian). 結果として述べると次のようになる.

Proposition 2. M^4 : 1-connected closed 4-manifold,

$$b(M)=3, H_2(M)=\mathbb{Z}.$$

$\implies M^4 - \mathring{B}^4 \searrow S^2$, この 2-sphere は高々 1 点で locally knotted.

上の S^2 が locally flat なら $M \cong \mathbb{C}P^2$ である.

<Proof of Proposition 2 の outline>

今, $b(M)=3$ だから $\exists \{B_0^4, B_1^4, B_2^4\}$: M^4 の ball covering;

$M = B_0 \cup B_1 \cup B_2$, $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$ ($i \neq j$). $W^4 \equiv B_1 \cup B_2 = M - \mathring{B}_0$,
 $U^3 \equiv B_1 \cap B_2 = \partial B_1 \cap \partial B_2$ とおくと, $\hat{H}_i(B_1 \cap B_2) \cong H_{i+1}(B_1 \cup B_2) \cong H_{i+1}(M)$,
 ($i \neq 4$), だから, $H_2(U) \cong \mathbb{Z}$, $H_2(U)=0$. 従って $\partial U \cong S^1 \times S^1$ だから
 U^3 は一般に knot K の complement (i.e. $U \cong \overline{S^3 - N(K; S^3)}$).

もし U 自身が solid torus ($S^1 \times D^2$) ならば $U \searrow S^1$, そして
 $B_1 \cup B_2 \searrow \Sigma U \searrow \Sigma S^1 \cong S^2$ (Σ は suspension を示す). U の
 core が ∂B_1 でも ∂B_2 でも non-trivial knot ならば, $\pi_1(\partial B_i - \mathring{U}) \neq \mathbb{Z}$
 ($i=1,2$) であり, 一方 $\partial B_0 \cong (\partial B_1 - \mathring{U}) \cup (\partial B_2 - \mathring{U}) \cong S^3$ であるが
 これでは ∂U が ∂B_0 で incompressible となり矛盾であるから
 U の core は ∂B_1 か ∂B_2 のすくなくとも一方では trivial であり,
 従って上の S^2 は locally flat でない点が高々 1 つ (suspension pt.).

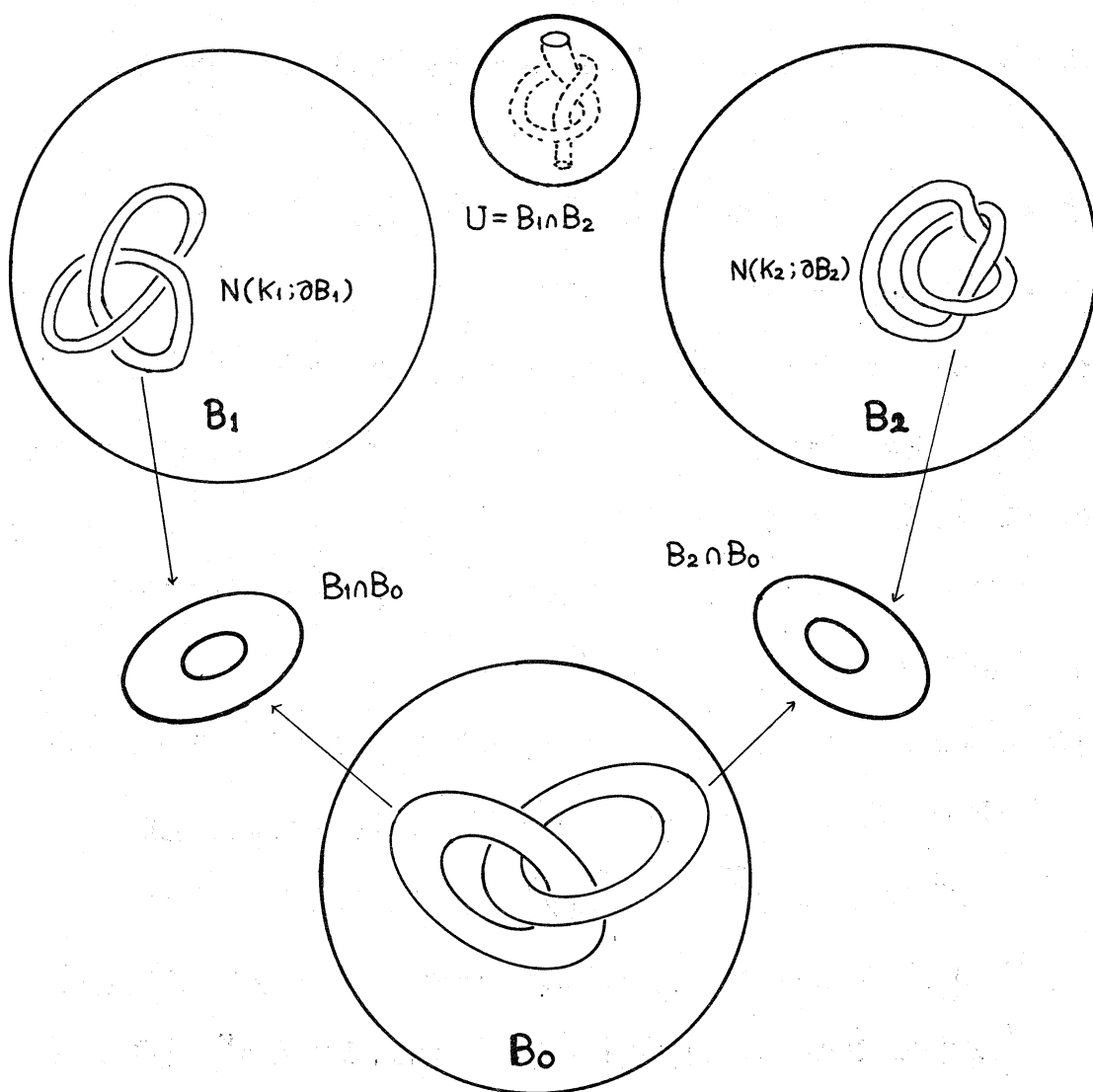


図 - 1

次に $U \cong S^1 \times D^2$, つまり U は本当に knot の complement, の場合は, nontrivial knots $K_1 \subset \partial B_1, K_2 \subset \partial B_2$ があって,

$$\partial B_i - \dot{U}^3 = N(K_i; \partial B_i), \quad i=1,2,$$

となっている。 ball covering の構造から, ∂B_0 は 2 つの solid

torus $B_1 \cap B_0 \cong N(K_1; \partial B_1)$ と $B_2 \cap B_0 \cong N(K_2; \partial B_2)$ が boundary で
 貼り合わされて出来ているのだから, $B_i \cap B_0$ は ∂B_0 で standard
 である ($i=1,2$). すると $B_1 \cup B_0 \searrow \Sigma(B_1 \cap B_2) \searrow \Sigma S^1 \cong S^2$.
 そして $B_0 \cap B_1$ が ∂B_0 で standard (unknotted) 故, この S^2 の
 locally flat でない点は suspension point の B_1 側 1 点だけ
 で, その local knot type は K_1 (同じ理由から local knot
 type は K_2 ともできる) $\square$

ここで, 上の knot K_1 (K_2 でもよい) が Property P を持たない
 ことをみておこう。

Definition. knot $K \subset S^3$ が property P を満たす (持つ).

$$\iff h: S^1 \times \partial D^2 \xrightarrow{\cong} \partial N(K; S^3) \text{ homeomorphism.}$$

$$M_{(K,h)}^3 \equiv \overline{S^3 - N(K; S^3)} \cup (S^1 \times D^2) / h \text{ とする.}$$

if M^3 is a homotopy sphere $\rightarrow h(S^1 \times \partial D^2)$ は $N(K; S^3)$
 で 2-ball を bound する, (すなわち h は $N(K; S^3) \cong S^1 \times D^2$ の
 元の通りの貼り合せで, 従って $M_{(K,h)} \cong S^3$)。

まず, $U^3 \cup N(K_1; \partial B_1)$ と $U^3 \cup N(K_2; \partial B_2) = U^3 \cup (B_0 \cap B_1)$ は, ∂B_0 を
 通してながめると (longitude と meridean を取替えているのだ
 から), 異った貼り合せである。したがって K_1 が property
 P をもつとすると, $U^3 \cup N(K_2; \partial B_2) \not\cong S^3$. しかし $U^3 \cup N(K_2; \partial B_2)$
 $= \partial B_2 \cong S^3$ だから矛盾である。

このことをもうすこし詳しくみると;

Proposition 3. $\exists M^4$; 1-conn. closed 4-manifold,
 $\overline{M^4 - B_0^4} \searrow S^2$ such that S^2 は 1 点 $p \in S$ のみで "locally
 knotted" で その knot type を K とする.

$\Rightarrow$ (1) $b(M) = 3$.

(2) K は Property P を満たさない.

<Proof>

$B_1 \equiv N(p; M^4)$; regular neighbourhood, (4-ball).

$D_1^2 \equiv B_1 \cap S^2$, $D_2^2 \equiv \overline{S^2 - D_1}$ とすると $K \approx (\partial D_1 \subset \partial B_1)$.

$D_2 \subset \overline{M - B_1}$ は locally flat proper 2-disk 故

$B_2 \equiv N(D_2; \overline{M - B_1})$; 4-ball で $(\partial D_2 \subset \partial B_2)$ は trivial knot.

$\overline{M - B_0} \searrow S^2 \swarrow B_1 \cup B_2$ (in M) 故共に S^2 の regular neighborhood.

だから $\exists h: B_1 \cup B_2 \rightarrow \overline{M - B_0}$ homeomorphism.

すると $h(B_1 \cup B_2) \cup B_0 = M$ 故 $b(M) = 3$. $H_2(M) = \mathbb{Z}$.

そこで前の Proposition 2 の証明の最後の注意によって, K
 は Property P を満たさない.

Remark 1. 「 K が property P を満たさない」と言っても, も
 しろ Poincaré conjecture には関係なく, しかも knot の
 complement の問題 (i.e. Proposition 2 の K_1 と K_2 の knot type は
 異なるか?) についても反例とは言えない。ただ, ある knot
 K が存在して, $\overline{S^3 - N(K; S^3)}$ (K の complement) の $S^3 \wedge$ の embedd-
 ing で ($S^3 \wedge$ 拡張できない) trivial でないものがある, という

ことだけである——丁度「trivial knot が Property P を持たない」というのと同じように——。

Remark 2. もちろん(?) Proposition 2. の方向としては、同じ条件の下に $M \cong CP(2)$ を示すことが目的である。そして、「全ての non-trivial knot が Property P を満す」という事が誰かによって示されれば上のことは正しい。しかしそんな夢をみていてもよくないので、本講演の後に Property P と無関係に $M \cong CP(2)$ を示すための Program をたて、一部実行中であることを報告しておきます。

References

- [1] K. Kobayashi and Y. Tsukui, The ball coverings of manifolds, J. Math. Soc. Japan 28 (1976) 133 ~ 143.
- [2] 小林-章, 津久井康之, Manifold の Ball Covering について, 数理解析研究所講究録 243. (1975) 77 ~ 87.