

射影空間上の uniform ベクトル束について

九州大教養 佐藤栄一

基礎体を標数 0 の代数的閉体 (k) とする。

E を n 次元射影空間 P^n 上のベクトル束とする。

定義 E が uniform ベクトル束とは、 P^n 上の任意の直線 ℓ に対し、 $E|_\ell$ が一定であるときにいふ (Grothendieck の定理より $E|_\ell \simeq \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_\ell(a_i)^{\oplus r_i}$ ($a_1 > a_2 > \dots > a_r$, $r_i > 0$) とする)。

この時 E が homogeneous な uniform は明白だが、逆は問題である。さらにもし反例があるならこの2つの性質の間にはどのような gap があるかが問題になる。即ち次が成立する。

主定理 ① E を P^n 上の uniform ベクトル束とする。 E の階数が $2n-1$ 以下なら homogeneous ベクトル束である。

② uniform だが homogeneous でない P^n 上の階数 $2n$ のベクトル束が存在する。

もう少しくわしく述べると①に関連して

① $r_i \leq n-2$ ($n \geq 3$, $\forall i$) なら E は直線束の直

和である

④ $n=2$ で $r_i=1$ ($\forall i$) ならば $E \simeq \bigoplus S^{b_i}(U)(c_i)$
 (ここで $S^{b_i}(U)$ は $U(=T_{p_i}(U))$ の b_i 次 Symmetric
 tensor である。)

最近, Elencwajg が 階数 4 の P^2 上の uniform
 ベクトル束で homogeneous である例をあげ、さ
 らに P^n 上で階数が $3n-1$ の uniform だが homogeneous
 でないベクトル束を構成している。[1][2]

§1 $X = P^1 \cup P^1 (\simeq \text{Proj } k[X, Y, Z] / (XY))$ 上のベクトル
 束について。

P^1 上のベクトル束の分解定理と同様に次が
 成立する。

定理 1.1 $X = P^1 \cup P^1$ 上のベクトル束は、直線
 束の直和である。
 (E)

($P^1 \cup P^1$ 上の直線束 L を各直線に制限すると、
 $\mathcal{O}_{P^1}(a)$ と書けるので $L = L(a, b)$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) とかくと
 $E \simeq \bigoplus L(a_i, b_i)$ と書ける。)

一方 X 上のベクトル束を別の形で表わした

い。そのために

命題 1.2. $E \cong \bigoplus_{i=1}^{\alpha} \mathcal{O}_{P_1}(a_i)^{\oplus r_i}$ ($a_1 > a_2 > \dots > a_{\alpha}$, $r_i > 0$), $F \cong \bigoplus_{i=1}^{\beta} \mathcal{O}_{P_1}(a_i)^{\oplus r_i}$ ($\beta < \alpha$) とする。この時、 F に同型な E の部分束は、唯一つしかない。

(上の部分束を E_{β} と書く。)

今、 E を $X = P'_1 \cup P'_2$ 上のベクトル束とし、 $E|_{P'_1} \cong E$ と書く。この時、命題 1.2 より、 $E_{\beta} \otimes k(x)$ は $E \otimes k(x)$ の部分ベクトル空間と考えられ、 $(x = P'_1 \cap P'_2)$ $\dim(E_{\beta} \otimes k(x) \cap (E_{\gamma} \otimes k(x)))$ が定義できる。これを $E(P'_1, P'_2, \beta, \gamma)$ と書く。さらに E を P^n 上の uniform ベクトル束 ($E|_L \cong \bigoplus_{i=1}^{\alpha} \mathcal{O}_P(a_i)^{\oplus r_i}$ $a_1 > a_2 > \dots > a_{\alpha}$, $r_i > 0$) とし、 l_1, l_2 を P^n の交わる直線とする時、 $E|_{l_1 \cup l_2}$ に対して、上述のように $E(l_1, l_2; \beta, \gamma)$ が定義できる。

定理 1.3 E を $P'_1 \cup P'_2$ 上のベクトル束とし、 $E|_{P'_j} \cong \bigoplus_{i=1}^{\alpha} \mathcal{O}_P(a_i)^{\oplus r_i}$ ($a_1 > a_2 > \dots > a_{\alpha}$, $r_i > 0$) とする。今、 $1 \leq \beta, \gamma \leq \alpha$ に対して、 $E(P'_1, P'_2; \beta, \gamma) (= E(\beta, \gamma))$ が与えられたとする。 E は $\bigoplus_{1 \leq i, j \leq 2} L(a_i, a_j)^{\oplus f_{ij}}$ に同型である。但し $f_{ij} = E(i, j) - E(i-1, j) - E(i, j-1) + E(i-1, j-1)$ ($i \geq 2, j \geq 2$)。又 $f_{i1} = E(i, 1)$, $f_{1j} = E(1, j)$ である。

§ 2. $E \in \text{uniform ベクトル束}$ ($E|_L = \bigoplus_{i=1}^d \theta_{p_i}(a_i)^{\otimes r_i}$, $a_1, \dots, a_d, r_i > 0$) とする。以後 E とはこのことを意味する。さて次の図式を考える。

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccc} & \text{Fl}(n, 1, 0) & \\ \swarrow & & \searrow \\ P^n & & \text{Gr}(n, 1) \end{array}$$

ここで $\text{Gr}(n, 1)$ は P^n の直線をパラメータライズした Grassmann 多様体、 $\text{Fl}(n, 1, 0) = \{(\alpha, \gamma) \in P^n \times \text{Gr}(n, 1) \mid L_\gamma \ni \alpha, L_\gamma \text{ は } \gamma \text{ に対応する直線束}\}$ とする。その時 P^*E は次のような splitting をもつ。

命題 2.2. uniform ベクトル束 E に対し、 $\text{Gr}(n, 1)$ 上のベクトル束の列 $E_1, E_2, \dots, E_d$ と $\text{Fl}(n, 1, 0)$ 上のベクトル束の列 $F_1 (= P^*E), F_2, \dots, F_{d-1}$ があリ次を満たす。

$$0 \longrightarrow q^*E \otimes p^*\theta(a_1) \longrightarrow P^*E \longrightarrow F_2 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow q^*E_i \otimes p^*\theta(a_i) \longrightarrow F_i \xrightarrow{g_i} F_{i+1} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow qE_{d-1} \otimes p^*\theta(a_{d-1}) \longrightarrow F_{d-1} \longrightarrow qE \otimes p^*\theta(a_d) \longrightarrow 0$$

($p^*\theta(a)$ とは $P^*\theta_{P^n}(a)$ を表わす)

次に上の完全列において

$$(2.3) \quad 0 \longrightarrow \bar{F}_\beta \longrightarrow P^*E \xrightarrow{g_\beta} F_\beta \longrightarrow 0 \quad (2 \leq \beta \leq d-1)$$

を考える。

今次のような仮定を置く。 L を P^n の直線とし

(A) L と交わる任意の直線 l と、 $l \cap L$ なる任意の P' の自己同型 σ に対し、ヘクトル束の同型 $i: E|_{LUl} \xrightarrow{\sim} E|_{LU\sigma l}$ が存在する。

今上述の L の σ を固定する。 σ は同型 $\tilde{\sigma}: P'(L) \rightarrow P'(L)$ を導く ($P'(L) \subset Fl(n, 1, 0)$)。直線 l_1 ($l_1 \cap L \neq \emptyset$) をとり、 $l_2 = \sigma l_1$ とする。その時完全列 (2.3) を $P'(LUl_1)$ に制限する。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow \bar{F}_\sigma|_{P'(LUl_1)} & \xrightarrow{h} & P^*E|_{P'(LUl_1)} & \longrightarrow & F_\sigma|_{P'(LUl_1)} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow i & & & & \\ 0 \longrightarrow F_\sigma|_{P'(LUl_2)} & \longrightarrow & P^*E|_{P'(LUl_2)} & \xrightarrow{j} & F_\sigma|_{P'(LUl_2)} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

l_1 に対応する $Gr(n, 1)$ 上の点を z_1 とする時、
 $\bar{F}_\sigma|_{q^{-1}(z_1)} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_{P'}(a_i)^{\oplus r_i} \simeq F_\sigma|_{q^{-1}(z_1)}$ とあり、さらに仮定 (A) より同型 i があって $j \circ i|_{q^{-1}(z_1)}$ は 0-map である。
 ($\because a_1 > \dots > a_n$ と $H^0(P', \mathcal{O}_{P'}(b)) = 0$ for $b < 0$)
 ここで $l_1 \in L$ と交わるように動かして、さらに § 1 の $P' \cup P'$ 上のヘクトル束の特長付けに注意する (定理 1.1, 1.3)。すると $P'(L)$ の点 x に対し、
 $j \circ i \otimes k(i): \bar{F}_\sigma \otimes k(i) \longrightarrow F_\sigma \otimes k(\tilde{\sigma}(x))$ は 0-map である。

それ故

命題 2.4. E は uniform $\wedge$ -クトル束とし、 $F_p, \bar{F}_p$ は (2.3) を満たすとする。さらに直線 L が (A) を満たす P^n の自己同型 ($\sigma L = L$) とする。その時次の同型写像 i_1, i_2 がある。

$$\begin{array}{ccc} \bar{F}_p|_{P^{-1}(L)} & \xrightarrow{i_1} & \bar{F}_p|_{P^{-1}(L)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^{-1}(L) & \xrightarrow{\sigma} & P^{-1}(L) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F_p|_{P^{-1}(L)} & \xrightarrow{i_2} & F_p|_{P^{-1}(L)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^{-1}(L) & \xrightarrow{\sigma} & P^{-1}(L) \end{array}$$

これを使うと

系 2.5 次の図式が成立する。

$$\begin{array}{ccc} q^*E \otimes P^*\theta(a_i)|_{P^{-1}(L)} & \longrightarrow & q^*E \otimes P^*\theta(a_i)|_{P^{-1}(L)} \\ \downarrow & \wr & \downarrow \\ P^{-1}(L) & \xrightarrow{\sigma} & P^{-1}(L) \end{array}$$

ところで命題 2.4, 系 2.5 は条件 (A) より弱い条件の下でも成立する。そのために

命題 2.6 M_1, M_2 は代数多様体 X 上の $\wedge$ -クトル束とし、 $f: M_1 \rightarrow M_2$ は homomorphism とする。

X の dense な部分集合 U が存在し、 U の各点 u に対し、 $f \otimes k(u): M_1 \otimes k(u) \rightarrow M_2 \otimes k(u)$ が zero map と仮定する。その時 f は 0-homomorphism である。

6

命題 2.7 E を uniform ベクトル束とし P^n 上の直線 L に対し $q(P'(L))$ の dense な部分集合 U が次を満たすと仮定する: U の元 u, w に対応する直線 l_u, l_w に対し $E|_{L \cup l_u} \simeq E|_{L \cup l_w}$ である。

その時 命題 2.4, 系 2.5 が成立する。

次に命題 2.7 の仮定は, uniform ベクトル束自体の性質であることを示す。そのために、次の準備が必要である。

$$E = \bigoplus_{j=1}^d \mathcal{O}_{P^1}(a_j)^{\oplus r_j} \quad (a_1 > \dots > a_d, r_i > 0), \quad X = \text{Proj}(\mathcal{O}_P \oplus \mathcal{O}_P(n))$$

とし X 上のベクトル束の完全列:

$$0 \longrightarrow \bar{F} \longrightarrow \bar{P}^* \bar{E} \longrightarrow F \longrightarrow 0 \quad \text{を考える。} \quad (\bar{P}: X \rightarrow P^1 \text{ は canonical projection とし } \text{rank } F = s \text{ とおく。})$$

その時, Kleiman の論文 [3] から morphism f :

$X \longrightarrow \text{Grass}_s \bar{E}$ が存在する。今 $\bar{E}$ の部分束 $A_\beta = \bigoplus_{j=1}^d \mathcal{O}_{P^1}(a_j)^{\oplus r_j}$ を考えると [3] によって $\text{Grass}_s \bar{E}$ の closed subscheme の列 $\{\sigma_i(A_\beta)\} \quad (1 + \min(\bar{r}_\beta, \bar{r}_\alpha) \leq i \leq \max(0, \bar{r}_\beta - s))$ がある。(ここで $\bar{r}_\alpha = \sum_{j=1}^d r_j$, $s = \bar{r}_\alpha - \bar{r}_\beta$ である。) その時 $(\beta, \alpha) \quad (1 \leq \beta, \alpha \leq d)$ に対し、整数 $d = d(\beta, \alpha)$ を次のように定義する。即ち $\text{Supp } \sigma_d(A_\beta) \supset \text{Supp } f(X) \iff \text{Supp } \sigma_{d+1}(A_\beta) \not\supset \text{Supp } f(X)$

を満すように d をとる。話元のベクトル束 E に戻し、 $L \in P^n$ の直線とする。今ベクトル束の列 2.3 を考え $P^1(L)$ 上に制限する。上述の議論より整数 $d(\beta, \gamma)$ (特に L に注目して $d_L(\beta, \gamma)$ と書く) が定まる。 $\sigma_d(A_\beta)$ の性質と $E(l, l_2, \beta, \gamma)$ の定義から、

命題 2.8 L と交わる任意の直線 l に対して $E(L, l; \beta, \gamma) \geq d_L(\beta, \gamma)$ が成立する。 l に対応する $P^1(L)$ の点を x_l とした時、 $\tau(x_l)$ から $\sigma_d(A_\beta) - \sigma_{d+1}(A_{\beta+1})$ に含まれる $P^1(L)$ の元 x_l に対し、 $E(L, l; \beta, \gamma) = d_L(\beta, \gamma)$ が成立する。さらに上のような $P^1(L)$ の部分集合を A とした時、 $q(A)$ は $q(P^1(L))$ の Zariski open subset を含む。

さて、 P^n の直線 L を固定し、命題 2.8 の $A \in A_{\beta, \gamma}$ と書く。その時 $\bigcap_{\beta, \gamma} q(A_{\beta, \gamma})$ は $q(P^1(L))$ の Zariski open U を含む。今、 P^n の自己同型 ϕ を $\phi L = L$ のようにとると、 ϕ は $Gr(n, 1)$ の自己同型 $\hat{\phi}$ を導き、 $q(P^1(L))$ を動かさない。 $\bar{U} = U \cap \hat{\phi} U$ とすると、これも $q(P^1(L))$ の Zariski open である。この $\bar{U}$ に対しては、定理 1.1 と 1.3 より、次のよう

な性質がある；

$\bar{U}$ に対応するすべての直線 l に対して
 $\wedge$ フトル束の同型 $\iota: E|_{L \cup l} \xrightarrow{\sim} E|_{L \cup \sigma l}$ が存在する。それ故

命題 2.9 $E \in \text{uniform } \wedge$ フトル束, $L \in P^n$ の直線, $\sigma \in L$ を固定する P^n の自己同型とする。その時、次の図式が成立する。

$$\begin{array}{ccc} qE \otimes P^* \mathcal{O}_{P^n}(a) |_{P^{-1}(L)} & \xrightarrow{\sim} & qE \otimes P^* \mathcal{O}_{P^n}(a) |_{P^{-1}(L)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^{-1}(L) & \xrightarrow{\quad \sigma \quad} & P^{-1}(L) \end{array}$$

$x \in L$ の点とし、 $\sigma L = L$ かつ $\sigma x = x$ なる自己同型 σ を考える。その σ によって induce される自己同型 $\sigma: Fl(n, 1, 0) \rightarrow Fl(n, 1, 0)$ は、 $P^{-1}(x)$ を固定し、その上の自己同型になっている。 L に対応する $P^{-1}(x)$ の点を x_0 とすると、 $\sigma L = L$ かつ $\sigma x = x$ なる自己同型すべては、 $P^{-1}(x)$ の自己同型で x_0 を固定するものと導く。それ故

定理 2.10 $E \in \text{uniform } \wedge$ フトル束、 $E_1, \dots, E_k$ を、命題 2.2 で求めたものとする。その時、 E_i は $Gr(n, 1)$ 上の uniform $\wedge$ フトル束である。

(E が $\text{Gr}(n, 1)$ 上 uniform ベクトル束 $\xleftrightarrow{\text{定義}} \text{Gr}(n, 1)$ を フリェッカード座標で P^n の 部分多様体と見た時、 $\text{Gr}(n, 1)$ に含まれていて、 P^n の 直線になるもの (とおく) に対し、 $E|_L$ が一定である。)

§3 ここでは、階数 r が 底空間の次元 n より 小さいか、小さい時、もしくは $n \in \text{任意}$ として E にある条件がある時、uniform な S homogeneous を示す。

命題 3.1. $E \in P^n (n \geq 3)$ 上の uniform ベクトル束とする。もし任意の i と任意の点 $x (x \in P^n)$ に対し、 $q^*E_i|_{P^{n-1}(x)}$ が 直線束の直和とする。その時、 E は 直線束の直和である。

(証) $P^n(x)$ に p^*E を制限すると Krull-Schmidt の定理と $H^1(P^2, L) = 0$ (L : P^2 上の 直線束) より、 $q^*E_i|_{P^{n-1}(x)} \cong \bigoplus_{j=1}^{r_i} \mathcal{O}_{P^{n-1}(x)}(v_i)$ が成る。これより容易にわかる。

さらに n に関する 帰納法で示される。

定理 3.2. E を P^n 上の uniform ベクトル束とする。 $n > \text{rank } E$ なる E は 直線束の直和である。

(証) 命題 3.1. と 定理 2.10. より明らか。

さらに命題 3.1 と定理 2.10 と 3.2 より

定理 3.3 E を uniform ヲクトル束とし、 $r_i \leq n-2$ ($\forall i$) とすると、 E は直線束の直和である。

次に $n = \text{rank } E$ の時の E の構造を調べるために、命題 2.2 の ヲクトル束の完全列；

$$0 \longrightarrow \check{F}_2 \otimes P^*O(-a_1) \longrightarrow P^*\check{E}(-a_1) \longrightarrow q^*\check{E}_1 \longrightarrow 0$$

より morphism $f: Fl(n, 1, 0) \longrightarrow Gr_{r_1} \check{E}(-a_1)$ がある

$$\begin{array}{ccc} & & \\ & P & \swarrow \quad \nwarrow t \\ & P^n & \end{array}$$

この f について、 P^n 上に直線 L をとり、 $P^*(L)$ 上で上の完全列、図式を考える。その時

命題 3.4 上の f について、次の 2 つの場合になる。

- (i) f は t の section をもつ。つまり E は階数 r_1 の兩 ヲクトル束をもつ。
- (ii) f は closed immersion である。

注意 3.5 (i) の時、 E_1 は trivial な ヲクトル束になることが示され、 $\text{Ker}(E \rightarrow E_1 \rightarrow 0)$ は uniform ヲクトル束である。

特に $r=n$ 、 $r_1=1$ とすると (i) の場合は、注意

3.5 と定理 3.2 より、又 (ii) の場合は、 $Fl(n, 1) \cong Gr_1(E)$ になり

定理 3.6 E を P^n 上の階数 n の uniform ベクトル束とする。その時、 E は直線束の直和か $T_{P^n} \otimes \mathcal{O}_{P^n}(c)$ か $\Omega_{P^n} \otimes \mathcal{O}_{P^n}(d)$ のいずれか 1 つである。

命題 3.4 の (ii) の場合、階数が n より大きくても、次のような結果が得る。

命題 3.7 命題 3.4 の (ii) の場合で $r_1 = 1$ とする。さらに $r \leq 2n-1$ の時には morphism f は次のようなことしか起るぬ ($f|_{P^{r-1}(x)}$ を f_x とかく)

(i) $n=2$ の時 f_x は linear map か
2 次の map である

(ii) $n \geq 3$ の時 f_x は linear map である。

(証) $g: P^m \rightarrow P^r$ ($r \leq 2m$) で g が closed immersion なる、 $g^* \mathcal{O}_{P^r}(1) = \mathcal{O}_{P^m}(c)$ とすると $c=1, 2$ しかない。 $n \geq 3$ の時、 E は uniform という条件を使って、2 次の場合は起りえないことが出る。

注意 3.8 命題 3.7 の結果として P^n 上の uniform ベクトル束で階数が 3 以下なる、homogeneous である。又 $n \geq 3$ 以上で、上の条件の

下では E は $T_{p^n}(*)$ (又は $\Omega_{p^n}(*))$ と 直線束達の直和になる。($T_{p^n}(*)$ は T_{p^n} とある直線束 $\mathcal{O}_{p^n}(*)$ との積を意味する。)

§ 4 ここでは主定理の証明をする。

まず homogeneous ヲクトル束を調べる。

命題 4.1 $E \in P^n$ 上の階数 $2n-1$ 以下の homogeneous ヲクトル束とする。その時 E は次のような場合がある。

- 1) 直線束の直和
- 2) $T(*)$ の (直線束) 又は $\Omega(*)$ の (直線束)

特別な場合として

$$n=4. \quad \wedge^2 T_{p^4}(*) \text{ の (直線束)}$$

$$n=2. \quad S^2(T_{p^2})(*)$$

但し $T M(*)$ は ヲクトル束 M と 直線束 $\mathcal{O}_{p^n}(*)$ との積を表わす

証) $SL(n+1, k)$ の表現を調べればよい。

次に $n \geq 3$ で E が P^n 上の階数 $2n-1$ 以下の uniform ヲクトル束とする。さらに任意の i に対し $q^* E|_{P^{i-1}(x)}$ が階数 $2n-3$ 以下の homogeneous ヲクト

束と仮定する。この時まず、 $qE_i|_{P^{-1}(x)}$ は x によらず一定であることが命題 2.9 よりでてくる。そして $qE_i|_{P^{-1}(x)}$ の構造とくに $q\check{E}_i|_{P^{-1}(x)}$ の構造を決めよう。 P^*E の splitting を使って命題 4.1 より、 $P^{-1}(x)$ 上の cohomology を考えると $\sum_{i=1}^d h^0(qE_i|_{P^{-1}(x)}) \leq 2n+1$, $\sum_{i=1}^d h^0(q\check{E}_i|_{P^{-1}(x)}) \leq 2n+1$ がでる。それ故 $q\check{E}_i|_{P^{-1}(x)}$ は次のようなタイプが考えられる。

$$i) \quad \mathcal{O}^S \oplus \mathcal{O}_{P^{n-1}}(1)^t \oplus T(-1)^{\omega} \quad (0 \leq t \leq 2, 0 \leq \omega \leq 1)$$

特別な例として

$$ii) \quad n-1=2 \quad S^2(U)$$

$$iii) \quad n-1=3 \quad \Omega_{P^3}(2) \oplus \mathcal{O}^S \quad (0 \leq S \leq 2)$$

$$iv) \quad n-1=4 \quad \Omega_{P^4}(2) \oplus \mathcal{O}^S \quad (0 \leq S \leq 1)$$

しかし実際には、次のような場合しか、起こるないことが示される。

命題 4.2 E は P^n ($n \geq 3$) 上の階数が $2n-1$ 以下の uniform ベクトル束とし $\text{rank } E_i \leq 2n-3$ ($\forall i$) で $qE_i|_{P^{-1}(x)}$ が homogeneous ベクトル束とする。この時、 $q\check{E}_i|_{P^{-1}(x)}$ は次のようになる。

$$i) \quad \mathcal{O}_{P^{n-1}}^S \quad ii) \quad \mathcal{O}_{P^{n-1}}^S \oplus \mathcal{O}_{P^{n-1}}(1) \quad iii) \quad \mathcal{O}_{P^{n-1}}^S \oplus T_{P^{n-1}}(-1)$$

$$iv) \quad n-1=3 \quad \Omega_{P^3}(2) \oplus \mathcal{O}_P^S \quad (0 \leq S \leq 1)$$

さらに命題 4.2 とくわしく調べると

命題 4.3 命題 4.2 と同じ条件の下で、 E は次のようになる。

- i) 直線束の直和
- ii) $T(*)$ (又 $\Omega(*)$) と直線束の直和
- iii) $n=4$ の時は $(\wedge^2 T_{p^4})(*)$ 又は $(\wedge^2 T_{p^4})(*) \oplus$ 直線束

即ち E は homogeneous である。

それ故主定理の証明は n に関する帰納法で示される。即ち P^2 上の階数 3 以下なら命題 3.7 より homogeneous である。今 $n-1$ までは正しいと仮定して n の時を考える。もし r_1 又は r_2 が 1 なら命題 3.7 より E が homogeneous。そうでない時 $\text{rank } q^*E_i \leq 2n-3$ になり定理 2.10 より $q^*E|_{P^{n-1}(2)}$ は uniform。さらに帰納法の仮定より homogeneous。それ故、命題 4.3 より E は homogeneous になる。

§ 5. ここでは主定理の②について述べる。

次のよく知られた結果をつかう。

「 $f: P^n$ から P^{2n} への線型写像でない closed immersion が存在し、 $f^* \mathcal{O}_{P^{2n}}(1) = \mathcal{O}_{P^n}(2)$ である」

今 $S = f(P^n)$ とし $T_{P^{2n}}(-1)|_S = E_0$ と考えると、これが求めるものである。

C は射影空間 P^N に入っている 2 次曲線 ($\cong P^1$) とすると、 C は既にある部分空間 P^2 に含まれている。 $T_{P^N}(-1)|_{P^2} \cong \mathcal{O}_{P^2}^{N-2} \oplus T_{P^2}(-1)$ より

命題 5.1 $T_{P^N}(-1)|_C \cong \mathcal{O}_C^{N-2} \oplus T_{P^2}(-1)|_C$

さらに

命題 5.2 $T_{P^2}(-1)|_C \cong \mathcal{O}_{P^1}(1)^2$ より $E_0|_C \cong \mathcal{O}_{P^1}^{2n-2} \oplus \mathcal{O}_{P^1}(1)^2$ となる (即ち E_0 は uniform ベクトル束になる。)

① $H^0(T_{P^2}(-1)) \ni s$ で S の零点で C 上にある s が存在する。 $\mathcal{O}_{P^2} \xrightarrow{s} T_{P^2}(-1)$ を C 上に制限したものを考えるとこれから $\mathcal{O}(1) \rightarrow T_{P^2}(-1)|_C$ なる injection を導き、 $T_{P^2}(-1)|_C \cong \mathcal{O}(1)^2$ を得る。

次に P^n 上の階数 $2n$ の homogeneous ベクトル束をすべて見つける。

命題 5.3 P^n 上の rank $2n$ の homogeneous ベクトル束は、既約な homogeneous ベクトル束の直和で表わされる。

それ故 E_0 は global section で生成されていること、 $c_i(E_0) = 2^i H^i$ (E_0 の i 次 Chern 類、 H は超平面 ($\cong P^{n-1}$) の有理同値類) と命題 5.3 を使うことにより homogeneous ベクトル束でないことが示される。

Reference.

- (1) Eilenwajg G Des fibrés uniformes non homogènes
Math. Ann. 239 185-192 (1979)
- (2) Eilenwajg G Les fibres uniformes de rang au plus
Hirschowitz A. n sur $P_n(\mathbb{C})$ sont ceux qu'on croit.
Schneider M. (to appear)
- (3) Kleimann S Geometry on Grassmannian and application
to splitting bundle and smoothing cycles
Publ. Math. I.H.E.S 36 (1969)

追記) その後主定理①の部分の証明は不完全であることが分かり、内題として残されている。(2月15日記)