

或種の離散部分群 $\subset \text{Aut}(B_n)$ の 基本領域の体積公式

神戸大 理 吉田正章

§ 1. Lauricella の超幾何微分方程式 F_D のモノ
ドロミー群 Γ で, 単位球体 $B_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum |z_j|^2 < 1\}$ に働く離散部分群になっているものに対して, その
基本領域 F の体積を与える公式を作る. B_n の metric
は普通の Bergmann metric

$$ds^2 = 4 \frac{(1 - \sum |z_j|^2) (\sum dz_j d\bar{z}_j) + (\sum \bar{z}_j dz_j) (\sum z_j d\bar{z}_j)}{(1 - \sum |z_j|^2)^2}$$

で与えられているとして, F_D は $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ で定義されて
いるとする. 今, F_D の singular locus の p ($0 \leq p \leq n-1$)
次元の成分を $S_1^{(p)}, \dots, S_{\nu(p)}^{(p)}$ とし, $S_j^{(p)}$ の generic point
における F_D の local monodromy 群の位数を $n_j^{(p)}$ とす
ると, F の体積は

$$\frac{1}{2} \frac{O_n}{K_n} \left(-(n+1) + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{\nu(p)} \left(1 - \frac{1}{n_j^{(p)}} \right) \right)$$

で与えられる。ここで、

O_n : $2n$ 次元球面 S^{2n} の体積,

$$K_n = \frac{n!}{(2n)!} \left(n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (1+n) - 2^n \right).$$

注意 $n=1$ のとき, F_0 は Gauss の超幾何微分方程式

$$x(1-x)y'' + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\}y' - \alpha\beta y = 0$$

になり, モノドロミ一群が離散的 (即 Fuchs 群) になるのは, $|1-\gamma|$, $|\gamma-\alpha-\beta|$, $|\alpha-\beta|$ が各々 整数 n_1, n_2, n_3 の逆数で, $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} < 1$ となる場合である。一方

$$O_1 = 4\pi, \quad K_1 = 1$$

故, 上記公式は,

$$\text{vol}(F) = 2\pi(1 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3})$$

となり, よく知られた円弧三角形の (2倍) 面積公式である。

注意 $n \geq 2$ のときも $n_j^{(p)}$ は F_0 の係数から容易に決る。

§ 2. 公式の証明の概略.

佐竹先生の V -manifold 上の Gauss-Bonnet の定理を適用すればよい。 F が non-compact の場合の積分の処理は, B_n を $n+2$ 種 Siegel 領域 (上半空間) に移して行う。また Gauss 曲率を求めるには (constant であることは明),

holomorphic sectional curvature $= -1$ 故, 公式

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = -\frac{1}{2} (g_{\alpha\bar{\beta}} g_{\gamma\bar{\delta}} + g_{\alpha\bar{\delta}} g_{\beta\bar{\gamma}})$$

を $\varepsilon=0$ で"使う"とよい.

文献

- [1] Satake, I : The Gauss-Bonnet Theorem for
V-manifolds. J. of Math. Soc. of Jap. 9, No. 4. (1957)
- [2] T. Terada : Problème de Riemann et fonctions...
J. of Math. of Kyoto Univ. 13 No 3 (1973)
- [3] Yano, K and Bochner, S : Curvature and Betti
numbers. Princeton (1953).