

スピン波の寿命 (I)

川 村

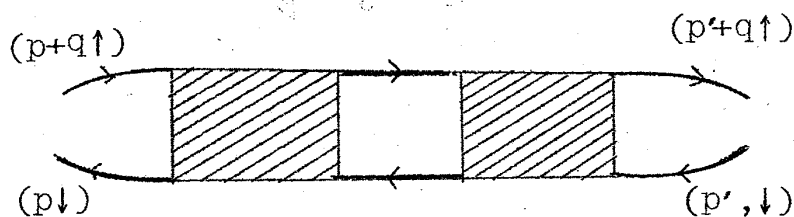
清 (東大理)

(11月5日受理)

1 band model でも spin wave が存在し得ることは、すでに多くの人人によつて指摘されている⁽¹⁾。今までの議論は、Hartree-Fock 近似で、 $\chi_{+-}(\mathbf{q}, \omega)$ の pole を求めたものであつて、Kondrachenko⁽²⁾の理解し難い論文を除いて、一般的には correlation effect は議論されていない。

これまで議論されて来た Fermi-Liquid Theory は、"quasi-particle" という概念を導入することによつて、ある種の物理量に関して、Hartree-Fock 近似の結果を若干 modify するような結果を与え、多体効果が定性的な傾向まで変えるようなものではなかつた。⁽³⁾しかし、それはもちろん "low excitation" が開与するような現象のみを考えていたからであつて、Fermi 面からはなれたところの電子、hole が関与する現象では、Hartree-Fock の結果は、必ずしもあてにはならない。たとえば spin wave は、 $(\mathbf{p}\uparrow)$ -state と $(\mathbf{p} + \mathbf{q}\downarrow)$ -state の電子が "bound-state" を作ることによつて出現する。この時、hole が、up spin band の Fermi 面に近いと、出来た電子は、down spin band の Fermi 面から、かなりはなれた所にあるはずである。それはもはや quasi-particle とは名付け難いような大きな damping を示すはずである。このような場合にも Hartree-Fock 近似の結果は正しいだろうか—これが Herring の疑問である。⁽⁴⁾

通常、 $\chi_{+-}(\mathbf{q}, \omega)$ を計算する diagram は、オー図のような形をしている。



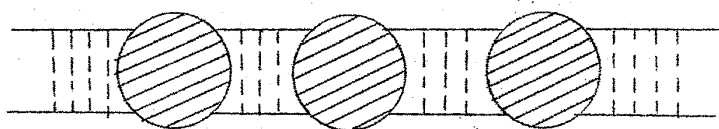
オ 1 図

川村 清

実線は、Self Energy をくり込んだ一体の Green 函数である。斜線を引いた長方形は、"four vertex function" である。途中に $G_{\uparrow}(p''+q)G_{\downarrow}(p')$ という積が出て来るが、 $q \rightarrow 0$ でも up spin の電子のエネルギーと down spin のそれとが等しくない為に、singularity が一致せず、Landau 理論⁽³⁾のありがたみがなくなってしまう。

以下で、Herring の疑問に答え、その心配のないことを示し、他の種類の困難があり得ることを指摘したい。

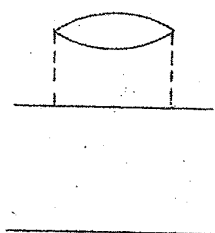
2 普通見かけるオ 1 図のような diagram を次のように書き換える。オ 2 図では、実線は Hartree-Fock のみをいれた電子線を表わし、点線は相互作用をあらわす。丸に斜線を引いた部分は、ladder, exchange self-energy 以外のあらゆる diagram を含む。たと



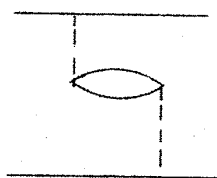
オ 2 図

用をあらわす。丸に斜線を引いた部分は、ladder, exchange self-energy 以外のあらゆる diagram を含む。たとえば、オ 3 図(a)(b)(c)のよ

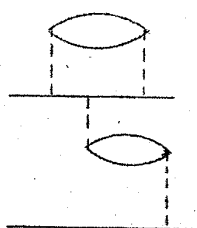
うなものである。



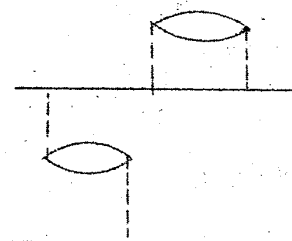
(a)



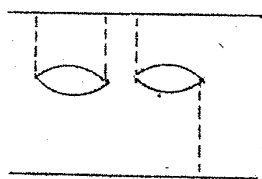
(b)



(c)



(d)



(e)

オ 3 図

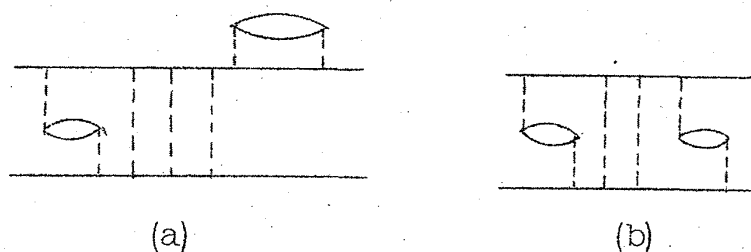


図 4

図 3 (d), (e) のような diagram は考えない。というのは、これらに対応して必ず、図 4 (a), (b) のような (a), (b) のような diagram があるからで、結局、図 2 の斜線部として、図 3 (a), (b) を考えたものにすぎないからである。すなわち、図 2 の円形には、ladder 以外の "irreducible four vertex part" か exchange 以外の "irreducible self energy part" の一方か、または両者の入り乱れたもの (図 3 (c)) のみが入ってくる。

3 図 2 を式で書くと次のようになる。

$$G_{pp'}^{\text{II}}(\mathbf{q}, \omega_m) = G_{pp'}^{\text{H-F}}(\mathbf{q}, \omega_m) + \sum_{p''} G_{pp''}^{\text{H-F}}(\mathbf{q}, \omega_m) \Gamma_{p''p'''}^{(0)}(\mathbf{q}, \omega_m) G_{p'''p'}^{\text{II}}(\mathbf{q}, \omega_m) \quad (1)$$

(1) で $G^{\text{H-F}}$ は、Hartree-Fock 近似で求めた二体の Green 関数、 $\Gamma^{(0)}$ は、丸い部分でこれを "correlation part" と呼ぶ。 $G^{\text{H-F}}$ は次の式に従う。

$$G_{pp'}^{\text{H-F}} = -G_{p+q\uparrow}^0(\epsilon_n + \omega_m) G_{p\downarrow}^0(\epsilon_n) \delta_{pp'} \frac{\delta_{nm'}}{T} - T \sum_{n''} G_{p+q\uparrow}^0(\epsilon_n + \omega_m) G_{p\downarrow}^0(\epsilon_n) v(\mathbf{p} - \mathbf{p}'') G_{p''p'}^{\text{H-F}}(\mathbf{q}, \omega_m) \quad (2)$$

d-electron を頭において、

$$v(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \text{const} = v \quad (3)$$

とおく。(2) で一体の Green 関数 $G_p^0(\epsilon_n)$ は Hartree-Fock 近似で与えられていて

$$G_{p\sigma}^{0-1}(\epsilon_n) = \epsilon_n - \tilde{\epsilon}_{p\sigma}(\mathbf{p}) \quad (4)$$

$$\tilde{\epsilon}_{p\sigma}(p) = \epsilon_p - v \sum_{p'} f_{p'\sigma} \quad (5)$$

(2)から、

$$\begin{aligned} G_{pp'}^{H-F}(q, \omega_m) = & -G_{p+q\uparrow}^0(\epsilon_n + \omega_m) G_{p\downarrow}^0(\epsilon_n) \\ & \times \left[\delta_{pp'} \frac{\delta_{nn'}}{T} + \frac{v G_{p'+q\uparrow}^0(\epsilon_n + \omega_m) G_{p'\downarrow}^0(\epsilon_n)}{1 + v T \Sigma_{p,n} G_{p+q\uparrow}^0(\epsilon_n + \omega_m) G_{p\downarrow}^0(\epsilon_n)} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

(6)の [] の分母は

$$\begin{aligned} & 1 + v T \Sigma_{p,n} G_{p+q\uparrow}^0(\epsilon_n + \omega_m) G_{p\downarrow}^0(\epsilon_n) \\ & = 1 + \frac{v}{2\pi} \Sigma_p \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \operatorname{th} \frac{\epsilon}{2T} [G_{p+q\uparrow}^0(\epsilon + \omega_m) \mathcal{I}_m G_{p\downarrow}^{0R}(\epsilon) \\ & \quad + \mathcal{I}_m G_{p+q\uparrow}^{0R}(\epsilon) G_{p\downarrow}^0(\epsilon - \omega_m)] \\ & = 1 + v \Sigma_p \frac{f(\tilde{\epsilon}_{p\downarrow}) - f(\tilde{\epsilon}_{p+q\uparrow})}{\omega_m + \tilde{\epsilon}_{p\downarrow} - \tilde{\epsilon}_{p+q\uparrow}} \end{aligned} \quad (7)$$

(7)の zero-point は Izuyama et al.⁽¹⁾ によつて調べられていて、Stoner excitation による連続スペクトルと spin wave による孤立スペクトルを与える。後者の zero-point の近くで

$$\Gamma_{p,p'}^{H-F}(q, \omega) \propto (\omega - \omega(q))^{-1} \quad (8)$$

と書ける。故に今後、次のように書く。

$$\Gamma_{p,p'}^{H-F}(q, \omega_m) = \frac{\Delta(p, q) \Delta(p', q)}{\omega_m - \omega(q)} \quad (9)$$

$$\Delta(p, q) = G_{p+q}(\epsilon_n + \omega_m) G_p(\epsilon_n) v \quad (10)$$

4 そこで、才2図の diagram は(1)より

$$\Gamma_{p,p'}(q, \omega_m) = \frac{\Delta(p, q) \Delta(p', q)}{\omega_m - \omega(q)}$$

$$+T^2 \sum_{n''m'''} \sum_{p''p'''} \frac{\Delta(p, q) \Delta(p'', q)}{\omega_m - \omega(q)} \Gamma_{p''p'''}^{(0)}(q, \omega_m) \Gamma_{p''p'''}(q, \omega_m) \quad (11)$$

(11)を解くと

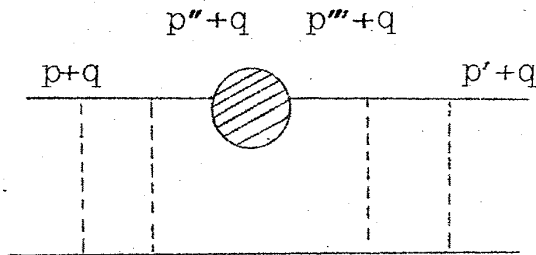
$$\Gamma_{p,p'}(q, \omega_m) = \frac{\Delta(p, q) \Delta(p', q)}{\omega_m - \omega(q) - \Pi(q, \omega_m)} \quad (12)$$

ただし

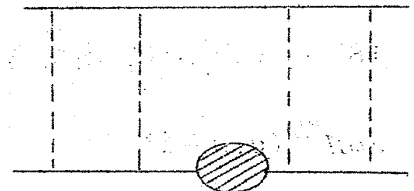
$$\Pi(q, \omega_m) = T^2 \sum_{n''n'''} \sum_{p''p'''} \Delta(p'', q) \Gamma_{p''p'''}^{(0)}(q, \omega_m) \Delta(p'', q) \quad (13)$$

は bound state の Green 関数の "self energy part" である。

5 まず、才5図のように、一体の Green 関数が correlation をいれて modify されることによる効果を考える。そうすることによつて、一体の Green 関数が有限の寿命を持つことによつて、Hartree-Fock 近似の結果出来た bound state が本当にこわれるかどうか判る。才5図(a)からの $\Gamma^{(0)}$ への寄与は、



(a)



(b)

才 5 図

$$\Gamma_{p''p'''}^{(a)}(q, \omega_m) = G_{p''}^{-1}(\epsilon_{n''}) \sum_{p''+q} (\epsilon_{n''} + \omega_m) \delta_{p''p'''} \frac{\delta_{n''n'''}}{T} \quad (14)$$

これを(13)に代入すると、 Π に対する才5図(a)の寄与は、

$$\begin{aligned} \Pi^{(a)}(q, \omega_m) &= T \sum_{n''} \sum_{p''} \Delta(p'', q) G_{p''}^{-1}(\epsilon_{n''}) \\ &\quad \times \sum_{p''+q} (\epsilon_{n''} + \omega_m) \Delta(p'', q) \\ &= T v^2 \sum_{n''} \sum_{p''} G_{p''}^{-1}(\epsilon_{n''}) (G_{p''+q}(\epsilon_{n''} + \omega_m))^2 \sum_{p''+q} (\epsilon_{n''} + \omega_m) \end{aligned} \quad (15)$$

川村 清

同様にしてオ 5 図(b)からの寄与は

$$\Pi^{(b)}(\mathbf{q}, \omega_m) = Tv^2 \Sigma_{p''} \Sigma_{p''} (G_{p''\downarrow}(\epsilon_n))^2 \Sigma_{p''\downarrow}(\epsilon_n) G_{p''+q\uparrow}(\epsilon_n + \omega_m) \quad (16)$$

(15) を解析接続の方法で計算すると、

$$\begin{aligned} \Pi^{(a)}(\mathbf{q}, \omega + i\delta) = & \frac{v^2}{4\pi i} \Sigma_{p''} \int d\epsilon'' \operatorname{th} \frac{\epsilon''}{2T} [G_{p''}^R(\epsilon'') - G_{p''}^A(\epsilon'')] \\ & \times (G_{p''+q}^R(\epsilon'' + \omega))^2 \Sigma_{p''+q}^R(\epsilon'' + \omega) \\ & + \frac{v^2}{4\pi i} \Sigma_{p''} \int d\epsilon'' \operatorname{th} \frac{\epsilon'' + \omega}{2T} G_{p''}^A(\epsilon'') \\ & \times [(G_{p''+q}^R(\epsilon'' + \omega))^2 \Sigma_{p''+q}^R(\epsilon'' + \omega) - (G_{p''+q}^A(\epsilon'' + \omega))^2 \Sigma_{p''+q}^A(\epsilon'' + \omega)] \end{aligned} \quad (17)$$

spin wave の寿命を求める為には、(17) の imaginary part が必要である。

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_m \Pi^{(a)}(\mathbf{q}, \omega + i\delta) \\ = -v^2 \Sigma_{p''} [f(\tilde{\epsilon}_{p''\downarrow} + \omega) - f(\tilde{\epsilon}_{p''\downarrow})] \mathcal{I}_m [(G_{p''+q}^R(\tilde{\epsilon}_{p''\downarrow} + \omega))^2 \Sigma_{p''+q}^R(\tilde{\epsilon}_{p''\downarrow} + \omega)] \end{aligned} \quad (18)$$

(18) を ω の小さい所で考えると、

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_m \Pi^{(a)}(\mathbf{q}, \omega + i\delta) \\ = -v^2 \omega \Sigma_{p''} \frac{\partial f(\epsilon_{p''\downarrow})}{\partial \epsilon_{p''\downarrow}} \mathcal{I}_m [(G_{p''+q\uparrow}^R(\tilde{\epsilon}_{p''} + \omega))^2 \Sigma_{p''+q}(\tilde{\epsilon}_{p''\downarrow} + \omega)] \end{aligned} \quad (19)$$

ところで、

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_m [G_{p''+q\uparrow}^R(\tilde{\epsilon}_{p''\downarrow} + \omega)]^2 \\ = \mathcal{I}_m \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}_{p''\downarrow} + \omega - \tilde{\epsilon}_{p''+q\uparrow} + i\delta} \right)^2 \end{aligned} \quad (20)$$

(20) の singularity は $\omega = \tilde{\epsilon}_{p''+q\uparrow} - \tilde{\epsilon}_{p''\downarrow}$ にあるが、これは Stoner excitation の spectrum の order で spin wave の振動数よりはるかに大きい。故に (20) は、今考えている振動数の範囲では、zero である。そこ

で (19) は

$$-v^2 \omega \Sigma_{p''} \frac{\partial f(\epsilon_{p''\downarrow})}{\partial \epsilon_{p''\downarrow}} \operatorname{Re} [G_{p''+q}^2(\tilde{\epsilon}_{p''} + \omega)] \mathcal{I}_m \Sigma_{p''+q}(\tilde{\epsilon}_{p''\downarrow} + \omega) \quad (21)$$

Fermi 分布の微分により (21) は $\tilde{\epsilon}_{p''\downarrow} = 0$ が効く。そこで⁽⁵⁾

$$\mathcal{I}_m \Sigma_{p''+q}(\tilde{\epsilon}_{p''\downarrow} + \omega) = 0(\omega^2) \quad (22)$$

故に (21) は、 $0(\omega^3)$ でありこのことから、

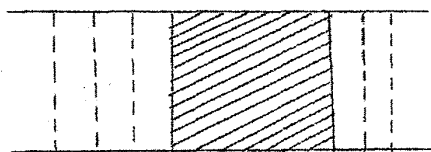
$$\mathcal{I}_m \Pi^{(2)}(\mathbf{q}, \omega) = 0(\omega^3) \quad (23)$$

であることが判つた。同様のことが $\Pi^{(b)}(\mathbf{q}, \omega)$ についてもいえる。

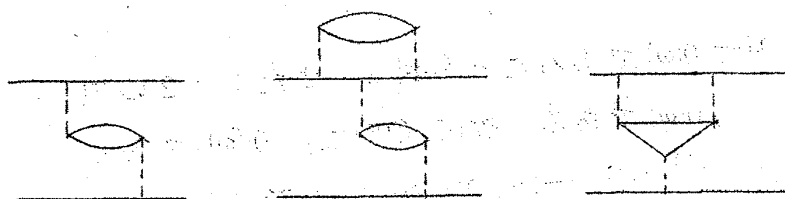
以上のことから、Herring の指摘は正しくないことが判つたが、今までの計算を振り返つて見ると、それは、いわば当然のことである。というのは、

$(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \downarrow)$ -state は、なるほどそこに一個だけ粒子があるなら Fermi energy より大きなエネルギーを持つて、早く damp するが、今は、この電子は、 $(\mathbf{p}, \uparrow)$ state の hole と "bound state" を作つていて、エネルギーが、単一粒子の場合より遙かに下つているのである。したがつて、(22) の order estimation が出来て、依然、quasi-particle と hole の "bound state" という像を描くことが出来る。

6 次に、才 6 図(a)のような correlation part を考える。斜線を引いた長方形の部分には、例えば、才 6 図(b)のような diagram の集りをあらわす。



(a)



(b)

川村 清

実は、spin wave の寿命に関して困るのは、こちらの部分の寄与である。才
6 図から (12) の Π への寄与は

$$\begin{aligned}\Pi^{(q)}(\mathbf{q}, \omega_m) &= T^2 \Sigma_{n''n'''} \Sigma_{p''p'''} \Delta(p'', \mathbf{q}) \Gamma_{p''p'''}^{(q)}(\mathbf{q}, \omega_m) \Delta(p''', \mathbf{q}) \\ &= (Tv)^2 \Sigma_{n''n'''} \Sigma_{p''p'''} G_{p''+q\uparrow}(\epsilon_{n''} + \omega_m) G_{p''\downarrow}(\epsilon_{n''}) \\ &\quad \times \Gamma_{p''p'''}^{(c)}(\mathbf{q}, \omega_m) G_{p''+q\uparrow}(\epsilon_{n'''} + \omega_m) G_{p'''\downarrow}(\epsilon_{n'''})\end{aligned}\quad (24)$$

(25) の計算は、Eliashberg⁽⁶⁾ の notation を使つて次のように書ける。

$$\begin{aligned}\left(\frac{v}{4\pi i}\right)^2 \Sigma_{p''} \Sigma_{p'''} \iint d\epsilon'' d\epsilon''' \lambda_i(p'', k) g_i(p'', k) \\ \times \mathcal{T}_{p''p'''}^{(ij)}(k) g_j(p''', k)\end{aligned}\quad (25)$$

g_j とか $\mathcal{T}$ とかの explicit な形は、文献(6)を見て頂きたい。

$$\left\{ \begin{aligned}\lambda_1 &= \text{th} \frac{\epsilon''}{2T} \\ \lambda_2 &= \text{th} \frac{\epsilon'' + \omega}{2T} - \text{th} \frac{\epsilon''}{2T} \\ \lambda_3 &= -\text{th} \frac{\epsilon'' + \omega}{2T}\end{aligned}\right.\quad (26)$$

再び $\Pi^{(c)}$ の虚部を考える。まず

$$\mathcal{I}m(g_1 \mathcal{T}_{11} g_1) = \mathcal{I}m(g_3 \mathcal{T}_{33} g_3) + 0(\omega)$$

$$\mathcal{I}m(g_1 \mathcal{T}_{13} g_3) = \mathcal{I}m(g_3 \mathcal{T}_{31} g_1) + 0(\omega)$$

を使うと

$$\lambda_1(p''k) - \lambda_3(p''k) = 0(\omega)$$

から、(26) の $i, j = 1$ or 3 の項は $0(\omega)$ であることが判る。また $i = 2$ の項は、 $\lambda_i = 0(\omega)$ であり、 $j = 2$ は、 $\mathcal{T}_{i2} = 0(\omega)$ である。故に (25) は、 $0(\omega)$ であることは判るが、それ以上のことは、 $\mathcal{T}^{(ij)}$ の ω -dependence を考えないことには判らない。しかし、 $\mathcal{T}^{ij}$ の singularity のひつかからないような場合に

は、(25)の寄与は小さく、Hartree-Fock による結果が "effective interaction" を導入することによつて若干 modify されるような結果で終るかも知れない。

筆をおくにあつて、この問題を考える機会を与えて下さつた、中嶋先生、渡部氏に感謝します。また、渡部氏には、多くの議論をして頂き、有益でした。

- (1) 例えば、Izuyama, Kim and Kubo: J. Phys. Soc. Japan, 18, 1025 (1963)
- (2) P. S. Kondrachenko: Soviet Phys. JETP 19, 972 (1964)
- (3) A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov and I. E. Dyaloshinski:
"Method of Quantum Field Theory in Statistical Physics"
- (4) C. Herring: "Exchang Interaction among Itinerant Electrons" (preprint)
- (5) J. M. Luttinger, Phys. Rev. 121, 942 (1961)
- (6) G. M. Eliashberg, Soviet Phys. JETP 14, 886 (1962)