

岡本 - Painlevé 対の二重被覆について

神戸大理 齋藤 政彦 (Masahiko Saito) 神戸大自然
寺島 ひとみ (Hitomi Terajima), 笹野 祐輔 (Yusuke Sasano)
Kobe Univ.

0 序

パンルベ方程式に対して、岡本 - Painlevé 対が対応する。逆に、岡本 - Painlevé 対に対して、その変形をこめて考えれば、パンルベ方程式が対応する。[STT]
津田、坂井、岡本氏達は、Y. Manin [M] にある Landin 変換を、パンルベ方程式の二次変換の立場からとらえ直し、又一般的に有限次の変換 (folding transformation) によって異なるタイプのパンルベ方程式が移り合う様子を決定した。この変換においては、通常のベックフルント変換とは異なり、タイプが変わること、又異なるタイプのパンルベ方程式の Riccati 解と有理解の間に関係がつけられる等の興味深い結果が得られている。この小文では、これらの結果を岡本 - Painlevé 対の分岐被覆の立場から考察したい。

1. 岡本 - Painlevé 対の重複被覆の分類について

岡本 - Painlevé 対の復習をしておく。

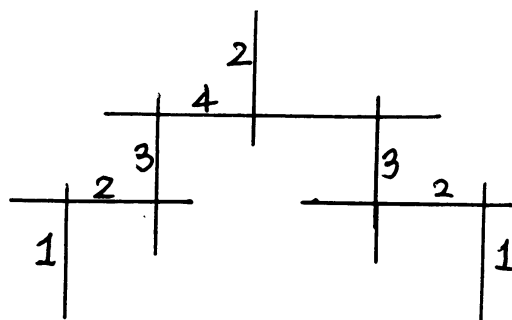
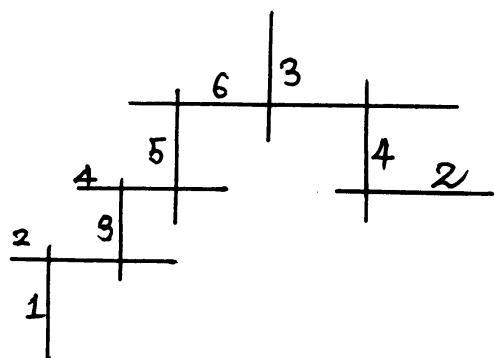
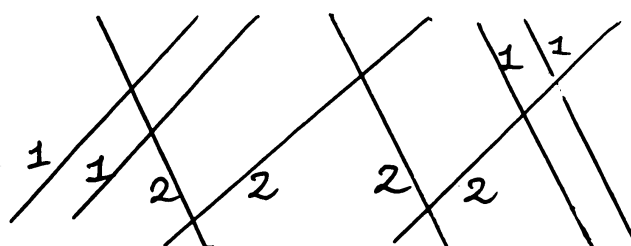
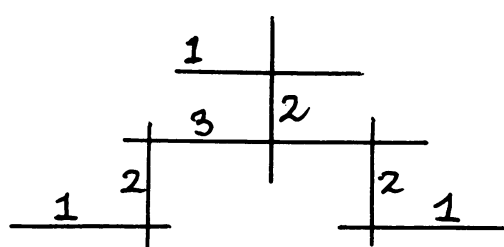
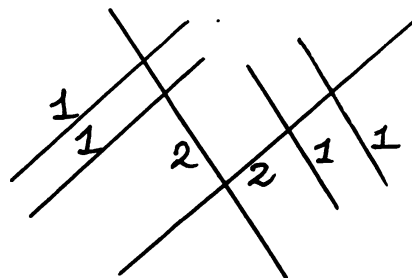
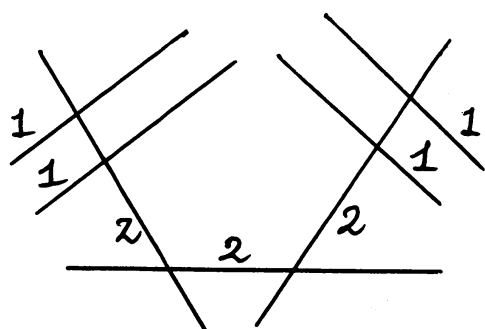
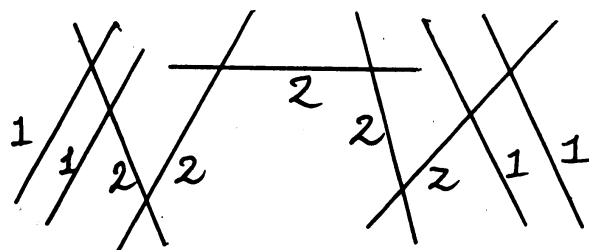
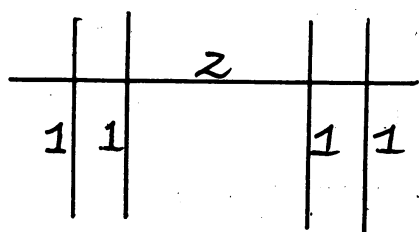
定義 1.1 S を有理曲面、 $Y = \sum_{i=1}^r a_i Y_i$ を S 上の有効因子であって、反標準因子に線型同値であるものとする。この時、 $1 \leq i \leq r$ なるすべての i に対して、 $Y \cdot Y_i = \deg Y|_{Y_i} = 0$ が成立する時、対 (S, Y) を有理岡本 - Painlevé 対という。

[STT]

パンルベ方程式と、それに対応する有理岡本 - Painlevé 対の関係は、次の様に表わされる。

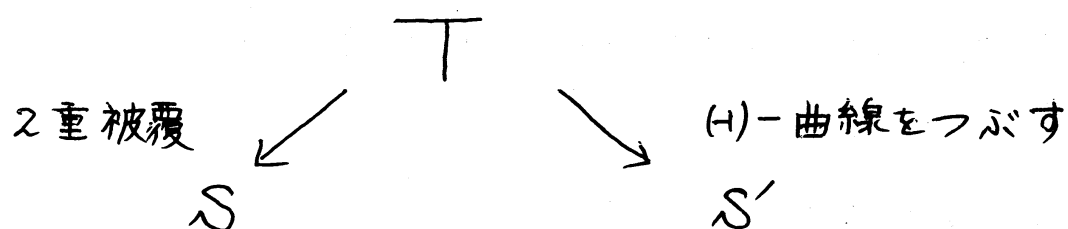
パンルベ方程式	P_I	P_{II}	$P_{III}(\tilde{D}_8)$	$P_{III}(\tilde{D}_7)$	$P_{III}(\tilde{D}_6)$	P_{IV}	P_V	P_{VI}
Y	$\tilde{E}_8, \tilde{E}_7$	$\tilde{D}_8$	$\tilde{D}_7$	$\tilde{D}_6$	$\tilde{E}_6, \tilde{D}_5, \tilde{D}_4$			

ここで、有効因子 Y は、小平による楕円曲面の極小モデルにあらわれる特異ファイバーと同じコンフィギュレーションをもつ事が分かり、その双対グラフは、アフィンディンキン図形になる事が知られている。上の $\tilde{D}_k$ ($4 \leq k \leq 8$), $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ はそのアフィンディンキン図形のタイプをあらわす。具体的なコンフィギュレーションは、次の図のようになる。


 $\tilde{E}_8$
 $\tilde{E}_7$

 $\tilde{E}_6$
 $\tilde{D}_7$

 $\tilde{D}_6$
 $\tilde{D}_5$

 $\tilde{D}_4$
 $\tilde{D}_8$

さて、 (S, Y) を有理岡本 - Painlevé 対とする。ここで、次の問題を考えよう。

問題 S の 2 重被覆 T であって、適当に (H) -曲線をつぶすと、再び有理岡本 - Painlevé 対になるようなものは、どれくらい存在するだろうか？



定理 1.2 2 重被覆を分類することにより、次の定理を得た。[STS]

Y	S	S'
$\tilde{D}_4$	P_{VI}	P_{VI}
$\tilde{D}_5$	P_V	$P_{III}(\tilde{D}_6)$
$\tilde{E}_6$	P_{IV}	なし
$\tilde{D}_6$	$P_{III}(\tilde{D}_6)$	$P_V, P_{III}(\tilde{D}_8)$
$\tilde{D}_7$	$P_{III}(\tilde{D}_7)$	なし
$\tilde{D}_8$	$P_{III}(\tilde{D}_8)$	$P_{III}(\tilde{D}_6)$
$\tilde{E}_7$	P_{II}	P_{II}
$\tilde{E}_8$	P_I	なし

注意：一般的に n 重分岐被覆について同様の問題を考える事ができる。 $P_{IV}(\tilde{E}_6)$ で $n=3$ の場合、 $P_{VI}(\tilde{D}_4)$ で $n=2^m$ (m は自然数) であるものが、構成できる。(津田、坂井、岡本氏)

2. 2重被覆の構成

複素多様体の分岐2重被覆の構成を思い出しておこう。

W を複素多様体とし、 B を W 上の有効因子とする。今、 $[B] = 2F$ なる直線束 F が存在すると仮定し、 F を固定する。

$\pi: F \rightarrow W$ を射影とする。

$W = \bigcup U_i$ U_i を W の開被覆とする。

$\{p_i\}_i$ を B の局所方程式とする。

$\{\psi_{ij}\}$ を F の変換関数とする。

これより、 $F = \bigcup U_i \times \mathbb{C}$ なる F の全空間の座標開被覆を与える。ここで座標変換は、 $(z, \eta_i) \in U_i \times \mathbb{C}$ と $(z, \eta_j) \in U_j \times \mathbb{C}$ では、 $\eta_i = \psi_{ij}(z)\eta_j$ で与えられる。

又、仮定より、 $p_i = \psi_{ij}^2(z)p_j$ である。

F の部分多様体 T を次の様にして定義する。

$$T \cap (U_i \times \mathbb{C}) = \{(z, \eta_i) \mid \eta_i^2 - p_i = 0\}$$

ここで、 T が非特異 $\Leftrightarrow B$ が非特異に注意する。そうすると、 $\eta_i^2 - \beta_i = 4\eta_i^2 (\eta_j^2 - \beta_j)$ である事が分かる。 T を B を branch locus にもつ W の 2 重被覆という。

定理 1.3 上の状況において、

K_W, K_T をそれぞれ W, T の標準因子とする。この時、 K_T は次の様にあらわされる。

$$K_T = \pi^* K_W + R$$

(ここで、 R は $\pi^*(B) = 2R$ なる有効因子である。)

定理 1.4 (S, Y) が岡本 - Painlevé 対であり、 B で分岐した分岐被覆 S' が再び岡本 - Painlevé 対であるとする。この時、 B の branch locus として選べる既約因子は、 (-2) -曲線のみである。

[証明] E を B の中の既約因子で、 (-2) -曲線でないとする。 $\pi: X \rightarrow S$ を B を branch locus にもつ S の 2 重被覆とする。そうすると、 $\pi^* E = 2E'$ となる $E' \in \text{Div}(X)$ が存在する。又、 $(E')^2 = \frac{1}{2} (E)^2 \equiv -1$ である事に注意しておく。定理 1.3 より、 E' は K_X の成分である。ここで、 E' は K_X に正に効く。これより、 $-K_X$ に負に効く。しかレ、 $(E')^2 \equiv -1$ より、 E' を非特異点にグロ-ダウンする事はできない。

よ、 $\Gamma - K_X$ の中に負に効いたままになる。これでは、岡本 - Painlevé 対にはならない。(証明終り)

注意： 岡本 - Painlevé 対 (S, Y) に対し、 $S - Y_{\text{red}}$ に含まれる非特異有理曲線 $C \cong \mathbb{P}^1$ は、 $(C)^2 = -2$ を満たす。この C は対応するパンルベエ方程式の Riccati 解に対応する。

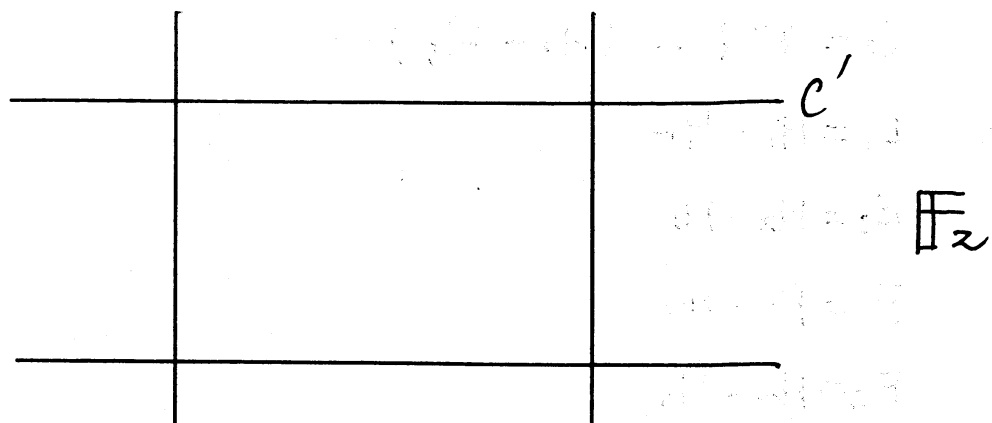
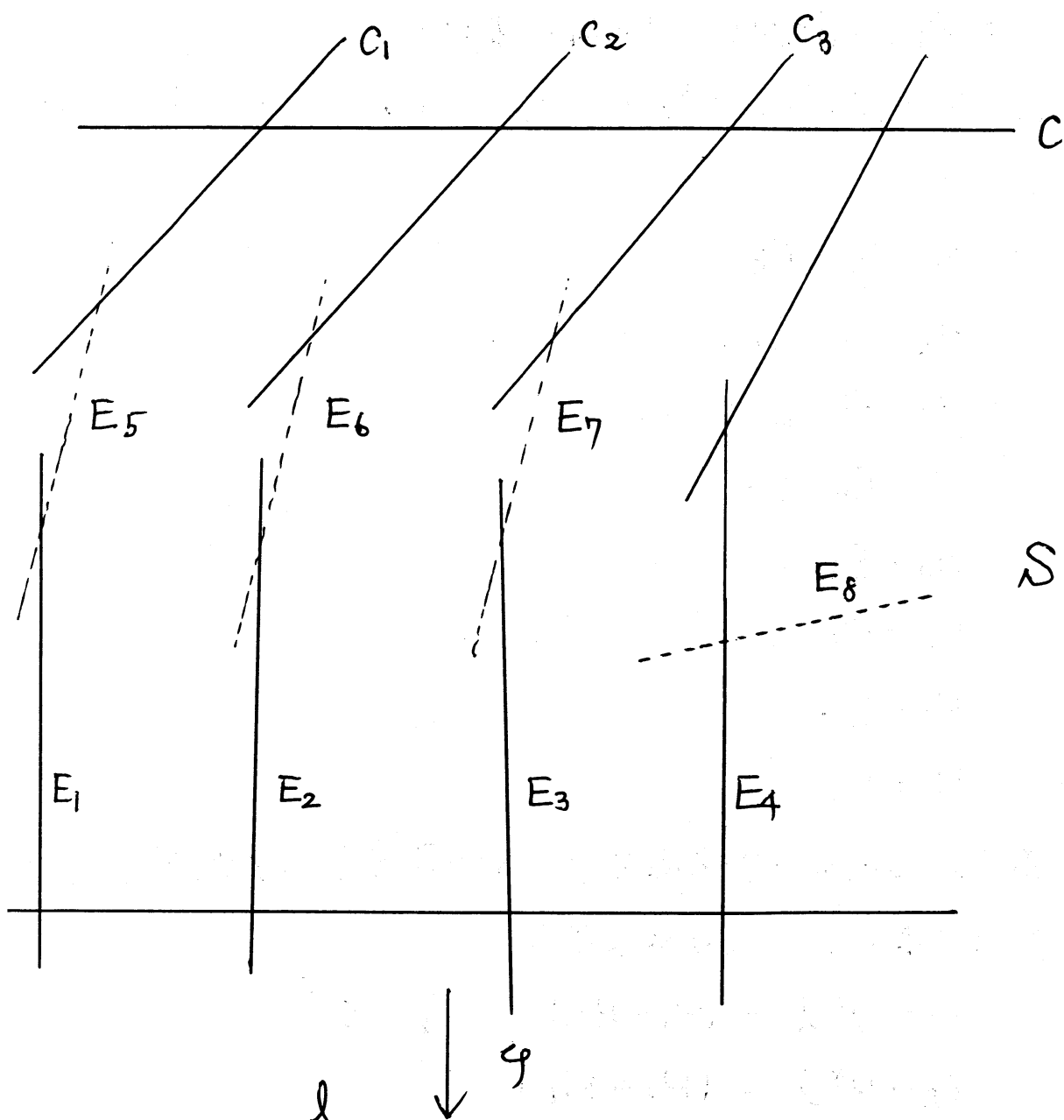
(本紙 齋藤, 寺島氏) 今 2 重被覆 $\pi: T \rightarrow S$ をとる時に $C \subset S - Y_{\text{red}}$ が分岐因子に含まれれば、その逆像 $C' \subset T$ は、 (-1) -曲線になる。この C' を非特異点 P につづけて S' という岡本 - Painlevé 対がえられるとすると、 $P \in S'$ は S' に対応するパンルベエ方程式の代数解に対応する。

3 例

第 VII パンルベエ方程式の場合について、考えてみる。岡本氏の構成により、Hirzebruch 曲面 H_2 のグローアップで、 H_2 に対応する岡本 - Painlevé 対を構成することができる。

[MMT] 定理 1.4 より、Branch locus の既約因子として選べるものは、 (-2) -曲線のみであった。 $S - Y$ 内に入る

(-2) -曲線の最大の入り方は D_4 型である。(本紙 齋藤氏, 寺島氏) これに対応するパラメーターの 1 つとして、 $H_0 = H_1 = H_t = 0$, $H_\infty = 1$ とする。



S の Picard 群は、次の様に書ける。

$$\text{Pic}(S) = \mathbb{Z} C' + \mathbb{Z} \varphi^* l + \mathbb{Z} H_1 + \mathbb{Z} H_2 + \cdots + \mathbb{Z} H_7 + \mathbb{Z} H_8$$

ここで

$$H_1 = E_1 + E_5$$

$$H_2 = E_2 + E_6$$

$$H_3 = E_3 + E_7$$

$$H_4 = E_4 + E_8$$

$$H_5 = E_5$$

$$H_6 = E_6$$

$$H_7 = E_7$$

$$H_8 = E_8$$

である。 S 内の (-2) -曲線を $\text{Pic}(S)$ の基底 $\{C', \varphi^* l, H_1, \dots, H_8\}$ を用いて書くと、次の様になる。

$$C_1 = \varphi^* l - (H_1 + H_5) \quad , \quad C'$$

$$C_2 = \varphi^* l - (H_2 + H_6)$$

$$C_3 = \varphi^* l - (H_3 + H_7)$$

$$E_1 = H_1 - H_5$$

$$E_2 = H_2 - H_6$$

$$E_3 = H_3 - H_7$$

$$E_4 = H_4 - H_8$$

$$C = C' + 2 \varphi^* l - (H_1 + H_2 + H_3 + H_4)$$

$B := a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 + a_4 E_1 + a_5 E_2 + a_6 E_3 + a_7 E_4 + a_8 C$
 $+ a_9 C'$ とおく。 ($a_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

B を先程の $\text{Pic}(S)$ の基底 $\{C', \varphi^* \ell, H_1, \dots, H_8\}$ を用いて書き直す。

そうすると、

$$B = (-a_1 + a_4 - a_8) H_1 + (-a_2 + a_5 - a_8) H_2 + (-a_3 + a_6 - a_8) H_3 \\ + (a_7 - a_8) H_4 + (-a_1 - a_4) H_5 + (-a_2 - a_5) H_6 + (-a_3 - a_6) H_7 \\ - a_7 H_8 + (a_8 + a_9) H_9 + (a_1 + a_2 + a_3 + 2a_8) H_{10} \quad \text{となる。}$$

すると次の事がわかる。

$$B \in 2\text{Pic}(S) \Leftrightarrow a_7 = a_8 = a_9 = 0$$

$$a_1 \equiv a_4 \pmod{2}$$

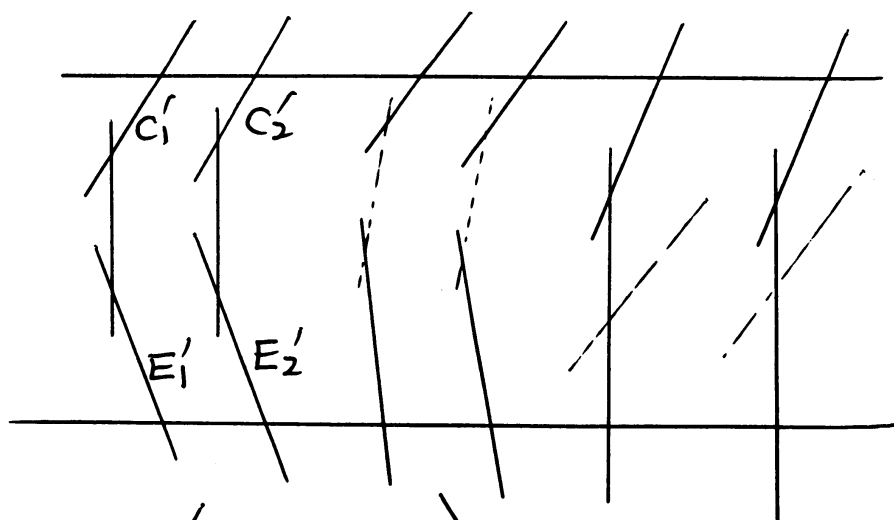
$$a_2 \equiv a_5 \pmod{2}$$

$$a_3 \equiv a_6 \pmod{2}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0 \pmod{2}$$

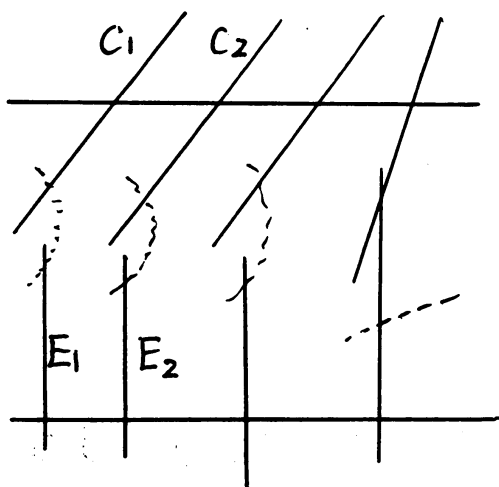
$a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0$ よりどの2つを1にするかを決める、すなわち ${}_3C_2 = 3$ 通りのとり方がある事が分かる。

例 $B := C_1 + C_2 + E_1 + E_2$ とする。

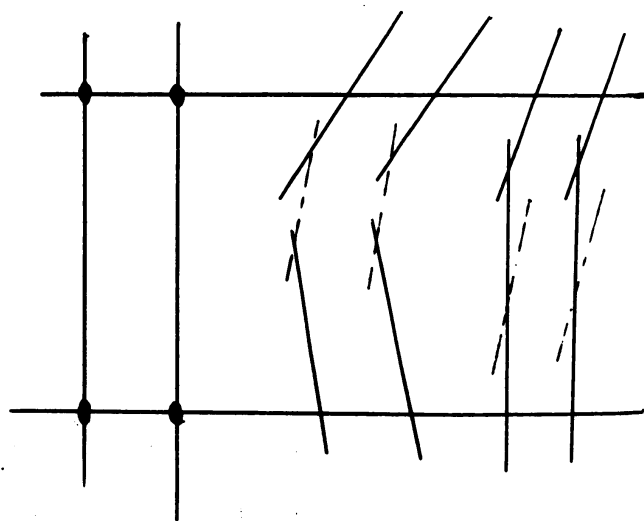


π : 2重被覆

C'_1, C'_2, E'_1, E'_2 をつなぐ



S



S'

参考文献

[STT] M.-H. Saito, T. Takebe & H. Terajima,
Deformation of Okamoto - Painlevé pairs and
Painlevé equations, math. AG/0006026
accepted for Journal of Algebraic Geometry

[MMT] T. Matano, A. Matsumiya and K. Takano,
On some Hamiltonian structures of Painlevé
systems, II, J. Math. Soc. Japan, 51, No. 4,
1999, 843-866

[M] Y. Manin, Cubic forms : Algebra,
Geometry, Arithmetic. North Holland,
Amsterdam (1974).

[STS] : 齋藤, 寺島, 笹野

岡本 - Painlevé 対の 2 重被覆について in preparation