

H. Q. F. '79

神保 道夫

三輪 哲二

毛織 泰子

佐藤 幹夫

§1 1次元不透過ボーズ気体の密度行列

非線型シュレーディンガー方程式の量子化を考える。

$$(1.1) \quad i \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + c \phi^* \phi^2$$

長さ L の箱に入れて考える事とし, 粒子数 N の最低エネルギー状態を与える波動関数は $c = \infty$ において

$$(1.2) \quad \Psi_{N,L}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N! L^N}} \prod_{j < k} \left| e^{2\pi i x_j / L} - e^{2\pi i x_k / L} \right|$$

で与えられる。(M. Girardeau, J. Math. Phys. 1 (1960) 516) 対応する状態ベクトルを $|\Psi_{N,L}\rangle$ と書こう。

n 粒子密度行列の熱力学極限

$$(1.3) \quad \rho_n(a'_1, \dots, a'_n; a''_1, \dots, a''_n)$$

$$= \lim_{\substack{N, L \rightarrow \infty \\ \rho_0 = N/L : \text{fixed}}} \langle \Psi_{N,L} | \phi^*(a'_1) \cdots \phi^*(a'_n) \phi(a''_1) \cdots \phi(a''_n) | \Psi_{N,L} \rangle$$

$$= \lim_{\substack{N, L \rightarrow \infty \\ \rho_0 = N/L: \text{fixed}}} \frac{N!}{(N-n)!} \int_0^L \cdots \int_0^L dx_{n+1} \cdots dx_N$$

$$\times \bar{\Psi}_{N,L}^*(a'_1, \dots, a'_n, x_{n+1}, \dots, x_N) \Psi_{N,L}(a''_1, \dots, a''_n, x_{n+1}, \dots, x_N)$$

は以下のように パンルベ型の非線型全微分方程式系の解
によつて表わされる。

$$n = 1$$

$$\rho_1(a'_1; a''_1) = \rho(|a'_1 - a''_1|) \quad \text{とおくと}$$

$$\rho(a) = \rho_0 \exp\left(\int_0^a dt \frac{\sigma(t)}{t}\right)$$

$$(1.4) \quad (t \sigma'')^2 = -4(t \sigma' - 1 - \sigma)(t \sigma' + (\sigma')^2 - \sigma)$$

n : 一般

$$\rho_n(a'_1, \dots, a'_n; a''_1, \dots, a''_n)$$

$$= \text{const.} \det(R_I(a'_j, a''_k))_{j,k=1,\dots,n} \exp\left(\int \omega\right)$$

$a_1 < \cdots < a_{2n}$ と $a'_1, \dots, a'_n, a''_1, \dots, a''_n$ を並べかえ
と

$$(1.5) \quad R_I(a_j, a_k) = \begin{cases} \frac{1}{2i(a_j - a_k)} (\hat{r}_{+j} \hat{r}_{-k} - \hat{r}_{-j} \hat{r}_{+k}) & (j \neq k) \\ \frac{1}{4} \sum_{j' (\neq j)} \frac{(\hat{r}_{+j} \hat{r}_{-j'} - \hat{r}_{+j'} \hat{r}_{-j})^2}{a_{j'} - a_j} + i \hat{r}_{+j} \hat{r}_{-j} & (j = k) \end{cases}$$

$$(1.6) \quad \omega = -\frac{1}{4} \sum_{j < j'} (\hat{r}_{+j} \hat{r}_{-j'} - \hat{r}_{+j'} \hat{r}_{-j})^2 \frac{da_j - da_{j'}}{a_j - a_{j'}} \\ + i \sum_j \hat{r}_{+j} \hat{r}_{-j} da_j$$

$$(1.7) \quad \frac{\partial \hat{r}_{\pm j}}{\partial a_k} = \begin{cases} \frac{1}{2} (-\hat{r}_{\pm k} \hat{r}_{-k} \hat{r}_{\pm j} + \hat{r}_{\pm k} \hat{r}_{+k} \hat{r}_{-j}) \frac{1}{a_j - a_k} & (k \neq j) \\ \pm i \hat{r}_{\pm j} - \frac{1}{2} \sum_{j' (\neq j)} (-\hat{r}_{\pm j'} \hat{r}_{-j'} \hat{r}_{\pm j} + \hat{r}_{\pm j'} \hat{r}_{+j'} \hat{r}_{-j}) \frac{1}{a_j - a_{j'}} & (j = k) \end{cases}$$

§2 常微分方程式の変形理論

不確定特異点を持つリーマンの問題の1例として次の性質を持つ 2×2 行列 $Y(x)$ を構成する。

$a_1 < \dots < a_{2n}$ とし

i) $Y(x)$ は $x \neq a_1, \dots, a_{2n}, \infty$ で可逆正則

ii) $x = \infty$ での振舞

$$Y(x) = (1 + O(\frac{1}{x})) e^{(\begin{smallmatrix} i & \\ & -i \end{smallmatrix}) x}$$

iii) $x = a_1, \dots, a_{2n}$ での振舞

$$Y(x) = \hat{Y}(x) \left(\frac{(x-a_1) \cdots (x-a_{2n-1})}{(x-a_2) \cdots (x-a_{2n})} \right)^{\begin{pmatrix} 0 & \frac{i\lambda}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\hat{Y}(x)$ は $x \neq \infty$ で可逆正則

上記の性質を満たす $Y(x)$ は次の級数表示で与えられる。

$$Y(x) = \begin{pmatrix} R_+^+(x; \lambda) & R_+^-(x; \lambda) \\ R_-^+(x; \lambda) & R_-^-(x; \lambda) \end{pmatrix}$$

(2.1)

$$R_{\pm}^{\pm'}(x; \lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^{\ell} \int_I \cdots \int_I dx_1 \cdots dx_{\ell}$$

$$\times \frac{e^{\pm' i(x_0 - x_1)}}{2i} \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdots \frac{\sin(\lambda_{\ell-1} - \lambda_{\ell})}{\lambda_{\ell-1} - \lambda_{\ell}} e^{\pm i \lambda_{\ell}} \quad (x_0 = x)$$

$$I = [a_1, a_2] \cup \cdots \cup [a_{2n-1}, a_{2n}] \quad (n \text{ 個の区間の和})$$

i) ~ iii) の帰結として $Y(x)$ は次の形の線型方程式を満たす。

$$(2.2) \quad dY = \left(\sum_j A_j d \log(x - a_j) + (i_{-i}) dx \right) Y$$

$$A_j = \begin{pmatrix} r_{+j} \\ r_{-j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_{-j} & r_{+j} \end{pmatrix}$$

$$r_{\pm j} = \sqrt{(-1)^j i \lambda} (R_{\pm}^+(q_j; \lambda) + R_{\pm}^-(q_j; \lambda))$$

線型方程式系 (2.2) の積分可能条件は次の形の非自律的なハミルトン系になる。 ω は §1 で与えられたものとし

$$(2.3) \quad d r_{\pm j} = \{ r_{\pm j}, \omega \}$$

但し ポアソン括弧は

$$\{ r_{+j}, r_{+j'} \} = \{ r_{-j}, r_{-j'} \} = 0, \quad \{ r_{+j}, r_{-j'} \} = \delta_{jj'}$$

特に $n=1$ の時このハミルトン方程式はヤンルベの ∇ 型の方程式の特別な場合になる。よって $(2.1) \Big|_{(x=a_1, q_2)}$ はヤンルベ ∇ 型の特殊解を与える。

§3 フレドホルム理論

Lenard (J. Math. Phys. 7 (1966) 1268)

によれば $P_n(a'_1, \dots, a'_n; a''_1, \dots, a''_n)$ は

$$\text{核} \quad - \frac{2}{\pi} \frac{\sin(x-x')}{x-x'}$$

を区間 I 上で考えたポ

2 種フレドホルム積分方程式の, n 次フレドホルム小行列

式に等しい。定義を思い出すと

$$(3.1) \quad \Delta_I(\lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^\ell}{\ell!} \int_I \cdots \int_I dx_1 \cdots dx_\ell \\ \times \det \left(\frac{\sin(x_j - x_k)}{x_j - x_k} \right)_{j,k=1,\dots,\ell}$$

がフレドホルム行列式

$$(3.2) \quad R_I(x, x'; \lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^\ell}{\ell!} \int_I \cdots \int_I dx_1 \cdots dx_\ell \\ \times \frac{\sin(x_0 - x_1)}{x_0 - x_1} \cdots \frac{\sin(x_\ell - x_{\ell+1})}{x_\ell - x_{\ell+1}} \quad (x_0 = x, x_{\ell+1} = x')$$

がリゾルベント

$$(3.3) \quad \Delta_I \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_m \\ x'_1 \cdots x'_m \end{pmatrix}; \lambda = (-\lambda)^m \Delta_I(\lambda) \det(R_I(x_j, x'_k; \lambda))_{j,k=1,\dots,m}$$

が m 次小行列式。

Lenard によれば、必要なのは、 $m = n$,

$$x_1 = a'_1, \dots, x_n = a'_n, x'_1 = a''_1, \dots, x'_n = a''_n$$

の場合であるが

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \log \Delta_I(\lambda) = (-)^{j+1} \lambda R_I(a_j, a_j; \lambda)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial a_j \partial a_k} \log \Delta_I(\lambda) = (-)^{j+k+1} \lambda^2 R_I(a_j, a_k; \lambda)^2$$

であるから $d \log \Delta_I(\lambda)$ がわかればよい。

問題を線型化するために、リゾルベントを修正した次の $R^\pm(x, x'; \lambda)$ および その $x' \rightarrow \infty$ の極限 $R_\pm^{\pm'}(x; \lambda)$ を考える。

$$(3.4) \quad R^\pm(x, x'; \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \int_I \cdots \int_I dx_1 \cdots dx_l \\ \times \frac{\pm e^{\pm i(\chi_0 - \chi_1)}}{2i(\chi_0 - \chi_1)} \frac{\sin(\chi_1 - \chi_2)}{\chi_1 - \chi_2} \cdots \frac{\sin(\chi_l - \chi_{l+1})}{\chi_l - \chi_{l+1}} \\ (\chi_0 = x, \chi_{l+1} = x')$$

$$(3.5) \quad R_\pm^{\pm'}(x; \lambda) = \mp \lim_{\substack{|x'| \rightarrow \infty \\ \text{Im } x' \gtrless 0}} 2ix' e^{\pm ix'} R^\pm(x, x'; \lambda)$$

ここで §2 のように $\Upsilon(x)$ を考える事により
常微分方程式の変形理論と結びつく。最後に

$$(3.6) \quad d \log \Delta_I(x) = \text{trace} \sum_{j=1}^{2n} \hat{\Upsilon}(q_j)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \hat{\Upsilon}(x) \Big|_{x=q_j} \begin{pmatrix} 0 & i^{j+1} \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dq_j$$

となる事より §1 の結果が従う。