

Invariance Theory & Modified minimax principle

について

早大理工学部 草間時武

序 これは Oscar Wesler: Invariance Theory and a modified minimax Principle A.M.S の紹介である.

§ 1. 統計的問題 $(Z, \mathcal{B}, \Omega, P, A, \mathcal{A}, L)$ とは

- i) Z は実験のすべての可能な結果の全体, $\mathcal{B}$ は Z の部分集合のなす σ -field, Ω はパラメーター空間, P は $\mathcal{B} \times \Omega$ で定義された関数で $\omega \in \Omega$ を fix すると P_ω は $(Z, \mathcal{B})$ 上の prob measure になるとする. $(Z, \mathcal{B}, \Omega, P)$ を標本空間という.
- ii) A は行動空間で $\mathcal{A}$ は A の部分集合のなす σ -field である.
- iii) 損失関数 L は $\Omega \times A$ で定義された関数で $\omega \in \Omega$ を fix すると $L(\omega, a)$ は非負の $\mathcal{A}$ -可測関数になるとする.

$(g, \gamma_Z, \gamma_\Omega, \gamma_A)$ は以上の性質をみたすとき統計的問題の

許容群 または 統計的問題は群 G の T を不変という。

i) G は群である。

ii) γ_Z は G の Z から Z の上への 1:1, かつ $\mathcal{B}$ - $\mathcal{B}$ 可測な変換の全体への同型寫像, γ_Ω は G の Ω から Ω の上への 1:1 変換の全体への同型寫像, γ_A は G の A から A の上への 1:1, かつ $\mathcal{C}_Z$ - $\mathcal{C}_Z$ 可測な変換の全体への同型寫像とする。 $g \in G$ に対して $\gamma_Z(g)$, $\gamma_\Omega(g)$, $\gamma_A(g)$ をそれぞれ g_Z , g_Ω , g_A で表わすことにする。

iii) $g \in G$, $B \in \mathcal{B}$, $\omega \in \Omega$ に対して $P(g_Z B \mid g_\Omega(\omega)) = P(B \mid \omega)$

iv) $g \in G$, $B \in \mathcal{B}$, $\omega \in \Omega$ に対して $L(g_\Omega(\omega), g_A(a)) = L(\omega, a)$

$\mathcal{C}_Z \times Z$ 上で定義され $[0, 1]$ を値域とする関数 $\varphi(T|z)$ が z を fix すると $(A, \mathcal{C}_Z)$ 上の prob. measure となり T を fix すると z の $\mathcal{B}$ -可測関数となることを確率化された決定関数といわれる。重で確率化された決定関数の全体を表わす。

$\omega \in \Omega$ と $\varphi \in \bar{\mathcal{D}}$ に対して危険関数

$$\rho(\omega, \varphi) = \int_Z \int_A L(\omega, a) d\varphi(a|z) dP_\omega(z)$$

が定義される。

$g \in G$ に対して $\varphi \in \bar{\mathcal{P}}$ から $g\bar{\mathcal{P}}\varphi \in \bar{\mathcal{P}}$ を次のように作ることを
 できる.

$$(g\bar{\mathcal{P}}\varphi)(T|Z) = \varphi(g_A T | g_Z(Z))$$

このとき $p(\omega, g\bar{\mathcal{P}}\varphi) = p(g_\Omega(\omega), \varphi)$ がなりたつ.

これは次の計算でわかる.

$$\begin{aligned} p(\omega, g\bar{\mathcal{P}}\varphi) &= \int_Z \int_A L(\omega, a) d(g\bar{\mathcal{P}}\varphi)(a|Z) dP_\omega(Z) \\ &= \int_Z \int_A L(\omega, a) d\varphi(g_A(a) | g_Z(Z)) dP_\omega(Z) \\ &= \int_Z \int_A L(\omega, g_A^{-1}(a)) d\varphi(a | g_Z(Z)) dP_\omega(Z) \\ &= \int_Z \int_A L(g_\Omega(\omega), a) d\varphi(a | g_Z(Z)) dP_\omega(Z) \\ &= \int_Z \int_A L(g_\Omega(\omega), a) d\varphi(a | Z) dP_\omega g_Z^{-1}(Z) \\ &= \int_Z \int_A L(g_\Omega(\omega), a) d\varphi(a | Z) dP_{g_\Omega(\omega)}(Z) \\ &= p(g_\Omega(\omega), \varphi) \end{aligned}$$

4.

$\varphi \in \bar{\mathcal{P}}$ は $g_{\bar{\mathcal{P}}} \varphi = \varphi$ が T に対して $g \in \mathcal{G}$ となりたつとき
不変 (invariant) であるという。すなわち

$$\varphi(g_A T | g_z(z)) = \varphi(T | z)$$

が T に対して g, z, T となりたつことである。このとき

あきらかに $p(\omega, \varphi) = p(\omega, g_{\bar{\mathcal{P}}} \varphi) = p(g_{\bar{\mathcal{P}}}(\omega), \varphi)$ となりたつ。

$\omega \in \Omega$ に対して $S_\omega = \{g_{\bar{\mathcal{P}}}(\omega) \mid g \in \mathcal{G}\}$ とおく。任意の $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して $S_\omega = S_{\omega'}$ か $S_\omega \cap S_{\omega'} = \emptyset$ となりたつ。何故ならば $S_\omega \cap S_{\omega'} \neq \emptyset$ とする。 $\omega_1 \in S_\omega \cap S_{\omega'}$ を一つとると

$\omega_1 = g_{\bar{\mathcal{P}}}(\omega) = g_{\bar{\mathcal{P}}}(\omega')$ となる $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ が存在する。 $\tilde{\omega} \in S_\omega$

に対して $\tilde{\omega} = \tilde{g}_{\bar{\mathcal{P}}}(\omega) = \tilde{g}_{\bar{\mathcal{P}}} g_1^{-1} g_2(\omega')$ だから $\tilde{\omega} \in S_{\omega'}$ 。故に

$S_\omega \subset S_{\omega'}$ 。同様にして $S_{\omega'} \subset S_\omega$ 。 $\therefore S_\omega = S_{\omega'}$ 。

このことから Ω はたがいに素な集合の和となる。これを

$\Omega = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}} \Omega_\alpha$ とおく。 $\omega \in \Omega_\alpha$ とすると $\Omega_\alpha = \{g(\omega) \mid g \in \mathcal{G}\}$

である。 Ω_α は orbit という。 φ が不変ならば一つの orbit

上で危険関数は一定である。

§2. $\varphi, \psi \in \bar{\mathcal{P}}$ がすべての $\alpha \in \mathcal{S}$ について

$$\sup_{\omega \in \Omega_\alpha} p(\omega, \varphi) \leq \sup_{\omega \in \Omega_\alpha} p(\omega, \psi)$$

となるとき φ は ψ と modified minimax sense において

少なくとも同程度に良い (at least as good as) という.

本文においては「同程度に良い」「許容性」「完全類」等の言葉は *modified minimax sense* において使うことにする.

この節では §1 のおせん立との他に P_ω が $(Z, \mathcal{B})$ 上の σ -有限な測度 ν によって *dominate* されている場合を考える.

Halmos - Savage の定理により ν と P_ω ($\omega \in \Omega$) と *equivalent* な測度と假定してさしつかえない. すなわちすべての $\omega \in \Omega$ で $P_\omega(B) = 0$ ならば $\nu(B) = 0$ と假定する.

不変な φ の定義において

$$\varphi(g_A T / g_Z(z)) = \varphi(T / z)$$

がすべての z においてなりたたなくても ν に関してほとんどすべての z でなりたてばよい. (危険関数は変らないから). 上の等式がなりたたぬような z の集合が $\mathcal{G}$ に依存してもよい φ をほとんど不変な決定関数という. ほとんど不変な決定関数の全体を $\overline{\mathcal{D}}^*$, 不変な決定関数の全体を $\overline{\mathcal{D}}^{**}$ で表わす.

$\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}'$ の σ -field とする. $(\mathcal{G}, \mathcal{C})$ 上の prob measure の net $\{\mu_\alpha\}$ が漸近的右不変であるとは、すべての $C \in \mathcal{C}$ と $g \in \mathcal{G}$ に対して

$$\lim_{\alpha} \{\mu_\alpha(Cg) - \mu_\alpha(C)\} = 0$$

となることである.

一般化された Hunt - Stein の定理

$(Z, \mathcal{B}, \Omega, P, A, G, L)$ を G によって不変な統計的問題とする.

i) A は可分, 局所コンパクトな距離空間, $\mathcal{G}$ は A のコンパクト集合から生成された σ -field, $L(\omega, a)$ は a に関して連続, すべての $\tau < \infty$ で $\{a \mid L(\omega, a) \leq \tau\}$ はコンパクトとする.

ii) $(\mathcal{G}, G)$ 上に漸近的右不変な prob measure の net $\{\mu_\alpha\}$ が存在する

このとき $\bar{\mathcal{P}}^*$ は modified minimax sense において本質的完全である. 更につけくわえて

iii) $\mathcal{G}$ は局所コンパクト, σ -コンパクトな位相群, G は $\mathcal{G}$ のコンパクト集合から生成されているとする.

このとき $\bar{\mathcal{P}}^{**}$ は modified minimax sense において本質的完全である (この部分の証明は省略する).

証明 $\varphi \in \bar{\mathcal{P}}$ を一つ考える. φ とすくなくとも同程度によ

い $\varphi^* \in \bar{\mathcal{P}}^*$ をみつければよい. 先ず $\sup_{\omega \in \Omega_S} f(\omega, \varphi) < m_S$

($< \infty$) と仮定してさしつかえない. 何故なら $\sup_{\omega \in \Omega_S} f(\omega, \varphi)$

$< \infty$ なる orbit のみに着目してそこで φ の改良 φ^* を

つくれば当然 $\sup_{\omega \in \Omega_S} f(\omega, \varphi) = \infty$ なる orbit ではない

$\sup_{\omega \in \Omega_S} p(\omega, \varphi^*) \leq \sup_{\omega \in \Omega_S} p(\omega, \varphi)$ がなりたつからである。
 数段階にわけて証明しよう

A) $p(\omega, g_{\bar{x}}\varphi) = p(g_{\bar{x}}(\omega), \varphi)$ であるから $\sup_{\omega \in \Omega_0} p(\omega, g_{\bar{x}}\varphi)$
 $= \sup_{\omega \in \Omega_0} p(\omega, \varphi)$ がなりたつ。
 すべてこのようにして

$$Q_{\alpha}(T|Z) = \int_{\mathcal{G}} \varphi(g_{\alpha}(T) | g_z(z)) d\mu_{\alpha}(g)$$

と定義する。

$$\begin{aligned} p(\omega, \varphi_{\alpha}) &= \int_Z \int_A L(\omega, a) dQ_{\alpha}(a|z) dP_{\omega}(z) \\ &= \int_Z \int_0^{\infty} Q_{\alpha}(\{a | L(\omega, a) > h\} | z) dh dP_{\omega}(z) \\ &= \int_Z \int_0^{\infty} \int_{\mathcal{G}} \varphi(g_{\alpha}(\{a | L(\omega, a) > h\} | g_z(z))) d\mu_{\alpha}(g) dh dP_{\omega}(z) \\ &= \int_{\mathcal{G}} \int_Z \int_0^{\infty} \varphi(g_{\alpha}(\{a | L(\omega, a) > h\} | g_z(z))) dh dP_{\omega}(z) d\mu_{\alpha}(g) \\ &= \int_{\mathcal{G}} \int_Z \int_0^{\infty} g_{\bar{x}}\varphi(\{a | L(\omega, a) > h\} | z) dh dP_{\omega}(z) d\mu_{\alpha}(g) \\ &= \int_{\mathcal{G}} \int_Z \int_A L(\omega, a) dg_{\bar{x}}\varphi(a|z) dP_{\omega}(z) d\mu_{\alpha}(g) \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathcal{G}} p(w, g \cdot \varphi) d\mu_x(g)$$

$$= \int_{\mathcal{G}} p(g_\Omega(w), \varphi) d\mu_x(g)$$

$$\leq \sup_{g \in \mathcal{G}} p(g_\Omega(w), \varphi)$$

$$= \sup_{w' \in \Omega_\alpha} p(w', \varphi) \quad (\Omega_\alpha \text{ は } w \text{ の } \alpha \text{-orbit})$$

$$\text{故に} \quad \sup_{w' \in \Omega_\alpha} p(w', \varphi_\alpha) \leq \sup_{w' \in \Omega_\alpha} p(w', \varphi) \quad \alpha \in S$$

φ_α は φ と少くとも同程度に良い。

B) すべての有界な B -可測関数の全体 $L^\infty(\nu)$ は

ν -可積分関数全体 $L^1(\nu)$ の共役空間であり $L^\infty(\nu)$ に次

の近傍系による位相 (弱*位相) を導入したとき $L^\infty(\nu)$

の単位球 $\{\varphi \mid \|\varphi\| \leq 1\}$ はコンパクトとなる。(Alaoglu)

$$V(\varphi \mid f_1, \dots, f_n, \varepsilon) = \left\{ \varphi' \mid \left| \int_{\mathbb{Z}} \varphi(x) f_i(x) d\nu(x) - \int_{\mathbb{Z}} \varphi'(x) f_i(x) d\nu(x) \right| < \varepsilon, \quad i=1, 2, \dots, n \right\}.$$

$\mathcal{K}$ は A のコンパクト集合の全体とする. $K \in \mathcal{K}$ に対し

$\varphi(K \mid \mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}$ の関数とみて $L^\infty(\nu)$ の単位球 $\mathcal{V}$ に

写す. $\varphi(K \mid \mathbb{Z}) \in L^\infty(\nu)$ の元とみたとき φ_K とかく

にとする. $\{\varphi_K \mid K \in \mathcal{K}\}$ は φ を代表させる, すなわち φ_K

を φ の座標とみると $\{\varphi_K \mid K \in \mathcal{K}\}$ は コンパクト集合 $\mathcal{V}$ の $\mathcal{K}$ の濃度だけの直積 (42.17 の定理により コンパクト) の中の元と考えることが **できる**. 故に $\{\varphi_K\}$ を コンパクト集合に於ける net と考えてその集積点 $\bar{\varphi}$ が存在する. $\bar{\varphi}$ は $K \in \mathcal{K}$ に対して $L^\infty(\nu)$ (正確には $\mathcal{V}$) と定める.

$\bar{\varphi}$ が $\{\varphi_K\}$ の集積点であるから有限個の $f_1, f_2, \dots, f_n \in L^1(\nu)$ と有限個の $K_1, \dots, K_m \in \mathcal{K}$ と $\varepsilon > 0$ に対して α_0 が存在して $\alpha > \alpha_0$ ならば

$$\left| \int_{\mathcal{Z}} \varphi(K_i | z) f_j(z) d\nu(z) - \int_{\mathcal{Z}} \bar{\varphi}(K_i | z) f_j(z) d\nu(z) \right| < \varepsilon$$

$$i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

がなりたつ.

$\bar{\varphi}$ は決定関数とはかぎらない.

$\bar{\varphi}$ の性質として

$$1) \quad K_1 \subset K_2 \quad \text{ならば} \quad \bar{\varphi}_{K_1} \leq \bar{\varphi}_{K_2} \quad (\text{a.e. } \nu)$$

$$2) \quad K_1 \cap K_2 = \emptyset \quad \text{ならば} \quad \bar{\varphi}_{K_1 \cup K_2} = \bar{\varphi}_{K_1} + \bar{\varphi}_{K_2} \quad (\text{a.e. } \nu)$$

$$3) \quad \bar{\varphi}_K \leq 1$$

がなりたつ. この三つの性質は φ と重なるば勿論なりたつ.

今 2) を証明しておく.

$f \in L^1(\nu)$ かつ $f(z) > 0$ ($\forall z \in Z$) なる関数と取る. ν が σ -有限な測度だからかかる f は存在する.

$$g(z) = f(z) [\bar{\varphi}(K_1 \cup K_2 | z) - \bar{\varphi}(K_1 | z) - \bar{\varphi}(K_2 | z)]$$

とすると $f \in L^1(\nu)$, $[\quad]$ は有界だから $g \in L^1(\nu)$ である.

$$\begin{aligned} & \int_Z g(z) [\bar{\varphi}(K_1 \cup K_2 | z) - \bar{\varphi}(K_1 | z) - \bar{\varphi}(K_2 | z)] d\nu(z) \\ &= \int_Z g(z) [\varphi_z(K_1 \cup K_2 | z) - \varphi_z(K_1 | z) - \varphi_z(K_2 | z)] d\nu(z) \end{aligned}$$

$\rightarrow 0$

とすると $\varphi_z(K_1 \cup K_2 | z) - \varphi_z(K_1 | z) - \varphi_z(K_2 | z) = 0$ なる

から

$$\begin{aligned} & \int_Z g(z) [\bar{\varphi}(K_1 \cup K_2 | z) - \bar{\varphi}(K_1 | z) - \bar{\varphi}(K_2 | z)] d\nu(z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$g(z)$ を定義にもとづいて書きなおして

$$\int_Z f(z) [\bar{\varphi}(K_1 \cup K_2 | z) - \bar{\varphi}(K_1 | z) - \bar{\varphi}(K_2 | z)]^2 d\nu(z) = 0$$

$f(z) > 0$ なるから

$$\bar{\varphi}(K_1 \cup K_2 | z) = \bar{\varphi}(K_1 | z) + \bar{\varphi}(K_2 | z) \quad (\text{a.e. } z)$$

$\bar{\varphi}$ から $\varphi^* \in \bar{\mathcal{P}}$ を作ることを考える.

$\mathcal{R}$ を $\mathcal{K}$ の可算部分集合で

i) $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{R}$ なら $\bigcap_{i=1}^n K_i \in \mathcal{R}$, $\bigcup_{i=1}^n K_i \in \mathcal{R}$

ii) 任意の開集合 U に対して可算個の $K_1, K_2, \dots \in \mathcal{R}$ が存在して $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i^{\circ}$ かつ $K_i \subset U$ ($i=1, 2, \dots$).

かかる $\mathcal{R}$ の存在は次のようにして証明できる。

A は可分だから稠密な可算集合 $\{a_i \mid i=1, 2, \dots\}$ が存在する。 a_i の ε 近傍 $V_{\varepsilon}(a_i)$ で ε が有理数, $\overline{V_{\varepsilon}(a_i)}$ がコンパクトなもの全体の $E_1, E_2, \dots$ とし, $\overline{E_i}$ ($i=1, 2, \dots$) を $\cap$ や $\cup$ や () で有限回の操作で結わつけたものの全体を $\mathcal{R}$ とすれば $\mathcal{R}$ は明らかに i) をみたしている。 O を任意の開集合とする。 O にふくまれる a_i に対して a_i の ε 近傍 $V_{\varepsilon}(a_i)$ で ε が有理数, $\overline{V_{\varepsilon}(a_i)}$ がコンパクト, かつ $\overline{V_{\varepsilon}(a_i)} \subset O$ となるものの全体を $S_1, S_2, \dots$ とすると $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ である。その理由は $q \in O$ の任意の点とする。 $\overline{V_{\varepsilon}(q)}$ はコンパクト, $\overline{V_{\varepsilon}(q)} \subset O$ なる ε ととり $0 < r < \frac{\varepsilon}{2}$ なる有理数と $V_r(q) \ni a_j$ なる a_j に対して $V_r(a_j)$ を考えれば $\overline{V_r(a_j)} \subset \overline{V_{\varepsilon}(q)} \subset O$, $q \in V_r(a_j)$ である。 $V_r(a_j)$ は $S_1, S_2, \dots$ の中にひとつあるから $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ である。 $\overline{V_r(a_j)} \in \mathcal{R}$ であるから ii) が証明された。

A の任意の開集合 U に対して

$$\varphi^*(U | \varepsilon) = \sup_{\substack{R \subset U \\ R \in \mathcal{R}}} \overline{\varphi}(R | \varepsilon)$$

と定義する. $\mathcal{R}$ は可算集合だから $\varphi^*(U|z)$ は $\mathcal{B}$ -可測である. 任意の集合 W に対し z は

$$\varphi^*(W|z) = \inf_{\substack{U \supset W \\ U = \text{open}}} \varphi^*(U|z)$$

と定義する. φ^* は $\mathcal{Q}$ に限定すると $z \in \text{fix}$ したとき

$\varphi^*(\cdot|z)$ は $\mathcal{Q}$ 上の測度となり, z に関し $\mathcal{B}$ -可測になる. インパット集合 K に対し z は $\varphi_K^* \geq \bar{\varphi}_K [z]$

であることを示そう. $U \ni K \subset U$ なる任意の開集合とする.

U は $U = \bigcup_{R_i \subset U} R_i^\circ$ と書ける. $K \subset \bigcup_{R_i \subset U} R_i^\circ$ であるから $K \subset \bigcup_{i=1}^n R_i^\circ$ となる n が存在する. $\therefore \exists R_i \in \mathcal{R}$ である. したがって

$K \subset \bigcup_{i=1}^n R_i = R \in \mathcal{R}$ がなりたつ. $\bar{\varphi}_K \leq \bar{\varphi}_R [z]$ がなり

たつ. 一方 $R \subset U$ であるから $\varphi_U^* = \sup_{\substack{R' \subset U \\ R' \in \mathcal{R}}} \bar{\varphi}_{R'} \geq \bar{\varphi}_R$

$\geq \bar{\varphi}_K [z]$. A が距離空間であるから $K = \bigcap_j U_j \downarrow$

となる開集合列 U_j が存在する. 故に $\varphi_K^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{U_j}^*$.

したがって前の上等式もつづいて

$$\varphi_K^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{U_j}^* \geq \bar{\varphi}_K [z] \quad \text{がなりたつ}$$

次に $\varphi^*(A|z) = 1 [z]$ であることを証明しよう. $\omega \in \mathcal{I}_\omega$

とし $K = \{a \mid L(\omega, a) \leq m/\varepsilon\}$ とすると

$$\int_{\mathcal{Z}} \varphi_\omega(K|z) dP_\omega(z) \geq 1 - \varepsilon$$

がなりたつ。その理由は $\rho(\omega, g_\alpha) \leq m_\delta$ だから

$$\int_Z \int_{K^c} L(\omega, \alpha) d\varphi_\alpha(\alpha | z) dP_\omega(z) \leq m_\delta$$

故に

$$\frac{m_\delta}{\varepsilon} \int_Z \varphi_\alpha(K^c | z) dP_\omega(z) \leq m_\delta$$

故に

$$\int_Z \varphi_\alpha(K^c | z) dP_\omega(z) \leq \varepsilon$$

一方

$$\int_Z \varphi_\alpha(A | z) dP_\omega(z) = 1$$

故に

$$\int_Z \varphi_\alpha(K | z) dP_\omega(z) \geq 1 - \varepsilon$$

$dP_\omega(z) = p(z | \omega) dv(z)$, $p(\cdot | \omega) \in \mathcal{L}^1(v)$ であることと

$\bar{\varphi}$ は φ_α の極限点であることから

$$\int_Z \bar{\varphi}(K | z) dP_\omega(z) \geq 1 - \varepsilon$$

K はコンパクトであるから $\varphi_K^* \geq \bar{\varphi}_K$ [2] よりかつ

$$\int_Z \varphi_K^*(K | z) dP_\omega(z) \geq 1 - \varepsilon$$

したがって

$$\int_Z \varphi^*(A|z) dP_\omega(z) \geq 1 - \varepsilon$$

ε は任意だから

$$\int_Z \varphi^*(A|z) dP_\omega(z) \geq 1$$

一方 A は開集合だから $\varphi^*(A|z) = \sup_{R \in \mathcal{R}} \bar{\varphi}(R|z) \leq 1$ 故に

$$\varphi^*(A|z) = 1 \quad [P_\omega]$$

ν は $\{P_\omega : \omega \in \Omega\}$ と equivalent ν があるから

$$\varphi^*(A|z) = 1 \quad [\nu]$$

C) B) で φ^* が決定関数であることがわかった。次に φ^* が φ と modified minimax sense において φ と同程度によいことを証明しよう。

$$\rho(\omega, \varphi^*) = \int_0^\infty \int_Z \varphi^*(\{a : L(\omega, a) > h\} | z) p(z|\omega) d\nu(z) dh$$

$$= \int_0^\infty \int_Z [1 - \varphi^*(\{a : L(\omega, a) \leq h\} | z)] p(z|\omega) d\nu(z) dh$$

$$= \lim_{H \rightarrow \infty} \int_0^H \int_Z [1 - \varphi^*(\{a : L(\omega, a) \leq h\} | z)] p(z|\omega) d\nu(z) dh$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{H \rightarrow \infty} \left(H - \int_0^H \int_Z \varphi^* (\{a: L(w, a) \leq h\} | z) p(z|w) d\nu(z) dh \right) \\
&= \lim_{H \rightarrow \infty} \left(H - \int_0^H \lim_{\alpha} \int_Z \varphi_{\alpha} (\{a: L(w, a) \leq h\} | z) p(z|w) d\nu(z) dh \right) \\
&\leq \lim_{H \rightarrow \infty} \lim_{\alpha} \left(H - \int_0^H \int_Z \varphi_{\alpha} (\{a: L(w, a) \leq h\} | z) p(z|w) d\nu(z) dh \right) \\
&= \lim_{H \rightarrow \infty} \lim_{\alpha} \int_0^H \int_Z [1 - \varphi_{\alpha} (\{a: L(w, a) \leq h\} | z)] p(z|w) d\nu(z) dh \\
&\leq \lim_{\alpha} \int_0^{\infty} \int_Z \varphi_{\alpha} (\{a: L(w, a) > h\} | z) p(z|w) d\nu(z) dh \\
&= \lim_{\alpha} \rho(w, \varphi_{\alpha}) \leq \sup_{w' \in \Omega_0} \rho(w', \varphi)
\end{aligned}$$

Ω_0 は w の τ による orbit である。

(したがって φ^* は modified minimax sense において φ と少なくとも同程度によいことがわかった。

あとは φ^* がほとんど不変であることを証明することだけである。

そのために次の Lemma を証明する。

Lemma $g \in \text{fix}$ するとすべての g' の有界可測関数 ψ に

に対し

$$\lim_{\alpha} \int \psi(g') [d\mu_{\alpha}(g'g^{-1}) - d\mu_{\alpha}(g')] = 0$$

証明 $|\psi| \leq 1$ に対し証明しなくてはならない. M を正整数

とし $[-1, 1]$ を長さ $\frac{1}{M}$ の小区間に分割する.

積分の定義から

$$\left| \int \psi(g') [d\mu_{\alpha}(g'g^{-1}) - d\mu_{\alpha}(g')] \right|$$

$$- \sum_{k=-M}^M \frac{k}{M} \left[\mu_{\alpha} \left\{ (g' : \frac{k}{M} \leq \psi(g') < \frac{k+1}{M}) g^{-1} \right\} \right.$$

$$\left. - \mu_{\alpha} \left\{ g' : \frac{k}{M} \leq \psi(g') < \frac{k+1}{M} \right\} \right] \Big|$$

$$\leq \left| \int \psi(g') d\mu_{\alpha}(g'g^{-1}) - \sum_{k=-M}^M \frac{k}{M} \left[\mu_{\alpha} \left\{ (g' : \frac{k}{M} \leq \psi(g') < \frac{k+1}{M}) g^{-1} \right\} \right] \right|$$

$$+ \left| \int \psi(g') d\mu_{\alpha}(g') - \sum_{k=-M}^M \frac{k}{M} \mu_{\alpha} \left\{ g' : \frac{k}{M} \leq \psi(g') < \frac{k+1}{M} \right\} \right|$$

$$\leq \frac{1}{M} + \frac{1}{M} = \frac{2}{M}.$$

$$\left[\mu_n \left\{ \left(g' : \frac{k}{M} \leq \psi(g') < \frac{k+1}{M} \right) g^{-1} \right\} - \mu_n \left\{ g' : \frac{k}{M} \leq \psi(g') < \frac{k+1}{M} \right\} \right]$$

は $\{\mu_n\}$ が漸近的右不変だから $\xrightarrow{n} 0$ である.

したがって

$$\limsup_n \left| \int \psi(g') [d\mu_n(g'g^{-1}) - d\mu_n(g')] \right| \leq \frac{2}{M}$$

M は任意の正整数だから

$$\lim_n \left| \int \psi(g') [d\mu_n(g'g^{-1}) - d\mu_n(g')] \right| = 0$$

これで Lemma の証明は終わった.

まずコンパクトな K に対して

$$\bar{\varphi}(g_n K | g_n(z)) = \bar{\varphi}(K | z) \quad [2]$$

がなりたつことを証明しよう. そのためにはまず $\forall z$ の $f \in L^1(\nu)$ に対して

$$\int_z [\bar{\varphi}(g_n K | g_n(z)) - \bar{\varphi}(K | z)] f(z) d\nu(z) = 0$$

を証明すればよい. $\bar{\varphi}$ は φ_n の極限であるから

$$\lim_n \int_z [\varphi_n(g_n K | g_n(z)) - \varphi_n(K | z)] f(z) d\nu(z) = 0$$

を証明すればよい。

φ_α の定義から

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha} \left[\int_{\mathbb{Z}} \int_{\mathcal{G}} \varphi(g'_A K | g'_z(z)) d\mu_\alpha(g') f(z) d\nu(z) \right. \\ & \quad \left. - \int_{\mathbb{Z}} \int_{\mathcal{G}} \varphi(g'_A K | g'_z(z)) d\mu_\alpha(g') f(z) d\nu(z) \right] \\ &= \lim_{\alpha} \left[\int_{\mathbb{Z}} \int_{\mathcal{G}} \varphi(g'_A K | g'_z(z)) d\mu_\alpha(g'g^{-1}) f(z) d\nu(z) \right. \\ & \quad \left. - \int_{\mathbb{Z}} \int_{\mathcal{G}} \varphi(g'_A K | g'_z(z)) d\mu_\alpha(g') f(z) d\nu(z) \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{\alpha} \int_{\mathcal{G}} \int_{\mathbb{Z}} \varphi(g'_A K | g'_z(z)) f(z) d\nu(z) [d\mu_\alpha(g'g^{-1}) - d\mu_\alpha(g')]$$

$$\psi(g') = \int_{\mathbb{Z}} \varphi(g'_A K | g'_z(z)) f(z) d\nu(z) \quad \text{は } g' \text{ の可測関数}$$

$$\text{すなわち } |\psi(g')| \leq \int_{\mathbb{Z}} |f(z)| d\nu(z) < \infty \quad \text{だから Lemma}$$

を用いる

$$\lim_{\alpha} \int_{\mathcal{G}} \int_{\mathbb{Z}} \varphi(g'_A K | g'_z(z)) f(z) d\nu(z) [d\mu_\alpha(g'g^{-1}) - d\mu_\alpha(g')] = 0$$

故に

$$\lim_{\alpha} \int_Z [\varphi(g_{\alpha} K | g_z(z)) - \varphi(K | z)] f(z) d\nu(z) = 0$$

故に

$$\int_Z [\bar{\varphi}(g_{\alpha} K | g_z(z)) - \bar{\varphi}(K | z)] f(z) d\nu(z) = 0$$

故に

$$\bar{\varphi}(g_{\alpha} K | g_z(z)) = \bar{\varphi}(K | z) \quad [2]$$

この結果によつて

$$\varphi^*(g_{\alpha} K | g_z(z)) = \varphi^*(K | z) \quad [2]$$

を証明する. U は開集合, L はコンパクト集合, $K \subset U \subset L$

とする $\varphi_U^* = \sup_{\substack{R \subset U \\ R \in \mathcal{R}}} \bar{\varphi}_R \leq \bar{\varphi}_L \quad [2] \quad \text{だから} \quad \varphi_K^* \leq \varphi_U^* \\ \leq \bar{\varphi}_L \leq \varphi_L^* \quad [2].$

また

$$\begin{aligned} \varphi^*(g_{\alpha} K | g_z(z)) &\leq \bar{\varphi}(g_{\alpha} L | g_z(z)) = \bar{\varphi}(L | z) \\ &\leq \varphi^*(L | z) \quad [2] \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} \varphi^*(K | z) &\leq \bar{\varphi}(L | z) = \bar{\varphi}(g_{\alpha} L | g_z(z)) \\ &\leq \varphi^*(g_{\alpha} L | g_z(z)) \quad [2] \end{aligned}$$

$\{L_n\}$ と $K = \bigcap L_n \downarrow$ かつ $K \subset U_n \subset L_n$ なる開集合 U_n が存在するようなコンパクト集合列とすると上の二つの不

等式から

$$\varphi^*(g_A K | g_2(z)) \leq \varphi^*(K | z) \leq \varphi^*(g_A K | g_2(z)) \quad [2]$$

したがって

$$\varphi^*(g_A K | g_2(z)) = \varphi^*(K | z) \quad [2]$$

$$\forall z \text{ の } g \in G \text{ に対して } \varphi^*(g_A S | g_2(z)) = \varphi^*(S | z) \quad [2]$$

となる S 全体を $\mathcal{A}^*$ とすると $\mathcal{A}^*$ は単調クラスとなる。

すなわち $S_1 \subset S_2 \subset \dots$, $S_n \in \mathcal{A}^*$ なら $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathcal{A}^*$

となる。 $\mathcal{A}$ は K による最小の単調クラス $\mathcal{M}(K)$ であり

$K \subset \mathcal{A}^*$ であるから $\mathcal{M}(K) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A}^*) = \mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}$ となる。

よって $\mathcal{A} = \mathcal{M}(K)$ より $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ 。 故に任意の $S \in \mathcal{A}$

$$\text{に対して } \varphi^*(g_A S | g_2(z)) = \varphi^*(S | z) \quad [2] \quad \text{となる。}$$

この等式の除外集合が S に無関係にとれることの証明は省略する。