

Regularity Theorems for Holonomic Modules

北大理 本多 尚文

(N. Honda)

0. Introduction

常微分方程式において, その不確定特異点度と, 解の増大度の関係は, いろいろな研究がなされており, 詳細な結果が知られている。

まず, 不確定特異点度の定義を思い出しておこう。

$$P = a_0(z)D^n + a_1(z)D^{n-1} + \cdots + a_n(z), \quad a_0(z) \neq 0, \\ a_k(z) \in \mathbb{C}\{x\},$$

に対し, 原点における不確定特異点度は,

$$\text{Irr}_{\text{reg}}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ 1, \frac{\text{mult}_{\text{reg}} a_0 - \text{mult}_{\text{reg}} a_k}{n-k} \right\}$$

で, 定義される。

この不確定特異点度と, 解層を関係付ける結果として,

次の小松田 [1] による結果を紹介しておこう。

$\mathcal{D}_{b,0}^{(s)}$: $(1 < s < +\infty)$ 原点における. Gevrey (s) クラスの distribution の層の stalk.

β_0 : hyperfunction の原点における stalk.

P を 変解析的係数を持つ. 線型常微分方程式とする.

この時. $P: \beta_0 \rightarrow \beta_0$ において次は同値.

$$(1) \text{Ker } P \subset \mathcal{D}_{b,0}^{(s)} \iff (2) \text{Irr}_{\log}(P) \leq \frac{s}{s-1}$$

これは. 実領域における結果だが, 複素領域における結果.
例えば, 解層を増大度付きの形式ベキ級数におき換えた時
類似の結果が成立する.

この報告の目標は, 二通りの結果を高次元で証明する事.
つまり, ホロノミック系に対して, 類似の比較定理を示す事
にある.

さて, まずそのためには, 不確定特異点度を, 高次元でも
定義する必要がある. ここでは, 以下の様な定義を採用する.

1. 不確定特異点度

まず, 初めにいくつかの必要になる, 層を定義しておく.

X を n 次元複素多様体, Σ_X を T^*X 上の PDO の層, Σ_X^∞ を
 T^*X 上の無限階 PDO の層とする (これらの定義は SKK を見よ)

① $\Sigma_X^{(s)} \subset \Sigma_X^\infty$: 増大度が Gevrey (s) クラスに属する.
無限階 PDO の層

$P \in \Sigma_x^\infty(U)$ (U は T^*X の open set) に対し.

$$P \in \Sigma_x^{(s)}(U) \Leftrightarrow \forall K \subset U, \exists C_K > 0$$

$$\sup_{(2,j) \in K} |P_i(2,j)| \leq \frac{C_K^i}{2!^s} \quad (i \geq 0)$$

② $\gamma \in X$ の接素部分を標体とする. この時 γ には $\mathbb{C}$ 上 (増大度制限を持つ) holomorphic microfunction の層がある. 次の様に定義される. $\mathcal{O}_x$ を正則関数の層とする.

$$\mathcal{C}_{\gamma|X}^{\mathcal{R},f} := T-\mu_\gamma(\mathcal{O}_x)[\text{Codim}_x \gamma],$$

$$\mathcal{C}_{\gamma|X}^{\mathcal{R},(s)} := T-\mu_\gamma^{(s)}(\mathcal{O}_x)[\text{Codim}_x \gamma],$$

$$\mathcal{C}_{\gamma|X}^{\mathcal{R}} := \mu_\gamma(\mathcal{O}_x)[\text{Codim}_x \gamma].$$

$\mathcal{C}_{\gamma|X}^{\mathcal{R},f} \subset \mathcal{C}_{\gamma|X}^{\mathcal{R},(s)} \subset \mathcal{C}_{\gamma|X}^{\mathcal{R}}$ は T_γ^*X 上の層で, Σ_x (resp. $\Sigma_x^{(s)}, \Sigma_x^\infty$) が作用する. また,

$$\mathcal{C}_{\gamma|X}^{\mathcal{R},(s)} = \Sigma_x^{(s)} \cdot \mathcal{C}_{\gamma|X}^{\mathcal{R},f}$$

が成立する.

③ $V \subset \overset{\circ}{T}^*X := T^*X \setminus T_x^*X$ を regular or maximally degenerated involutive submanifold とする. 有理数

$\sigma \in [1, \infty)$ に対し

$$I_V := \{P \in \Sigma_x; \text{ord}(P) \leq 1 \text{ かつ } \delta_1(P)|_V \equiv 0\},$$

$$\Sigma_V^{(0)} := \sum_{n \geq 0} \Sigma_X \left(\frac{(1-\sigma)^n}{\sigma} \right) I_V^n$$

を定義する. また $\Sigma_X(\mathbb{R}) := \{ p \in \Sigma_X ; \text{ord}(p) \leq \mathbb{R} \}$.

2. いよいよ, 不確定特異点度の定義をする.

$\mathcal{M}$ を $p \in T^*X$ 近傍で定義された holonomic Σ_X module とする.

[定義]

$\mathcal{M}$ が $\geq \sigma$ の weak irregularity を持つとは,

p の近傍の $\text{Supp}(\mathcal{M})$ が smooth な任意の点 $q \in T^*X$ に対し,

次の条件を満たす V と $\mathcal{M}_0$ が存在する時を言うものとする.

1) V は ^{degenerated} maximally involutive submanifold 2. Σ の singular locus が q の近傍で $\text{Supp}(\mathcal{M})$ に一致する.

2) q の近傍で $\Sigma_V^{(0)}$ module $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ が存在し,

$\mathcal{M}_0$ は $\Sigma(0)$ Coherent 2. $\mathcal{M} = \Sigma_X \mathcal{M}_0$ を満足する.

□

holonomic $\mathcal{D}_X$ module $\mathcal{N}$ が $\geq \sigma$ の weak irregularity を持つ

とは $\Sigma_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{N}$ が, 上の条件を満たす時を言うものとする.

上の条件は一見複雑だが, 量子化揺動変換 2. $\text{Supp}(\mathcal{M})$

を, 主成分位置に移ると, 非常に simple な条件 2.

ある事が判る. また一変数の時は, Introduction 2. 定義し

た. Irr と一致する.

2. 主結果

以上の準備の後、主結果を述べよう。

[定理] U を $\mathbb{C}^* \text{Conic}$ な T^*X の open set.

M を holonomic Σ_x module, $\sigma \geq 1$ を有理数とする.

この時、以下の条件は同値である.

(1) 確定特異点型の holonomic Σ_x module M_{reg} が存在し.

$\forall S \in [1, \frac{\sigma}{\sigma-1}]$ に対し.

$$\Sigma_x^{(S)} \otimes_{\Sigma_x} M \simeq \Sigma_x^{(S)} \otimes_{\Sigma_x} M_{\text{reg}}$$

が成立する.

(2) 任意の部分複素多様体 Y に対し、次の同型が成立する.

$$\text{RHom}_{\Sigma_x}(M, C_{Y|X}^{\mathbb{R}, (S)})|_U \simeq \text{RHom}_{\Sigma_x}(M, C_{Y|X}^{\mathbb{R}})|_U, \\ S \in [1, \frac{\sigma}{\sigma-1}]$$

(3) M は、高 $\geq \sigma$ の weak irregularity を U 上持つ.

□

ここで、証明のかわりに、条件の意味について述べておく。(1)は、任意の holonomic system は、その irregularity に応じた $(\frac{\sigma}{\sigma-1})$ の増大度を持つ。無限階の PDE を用い

て、確定特異点型に変換出来る事を示してゐる。

(2)は、introduction で述べた、小松 [1] の結果に対応

するものである。(ここでは Gevrey class の ultra distribution を用いる替りに、Gevrey class の holomorphic micro function

を用いてゐる)

もし、 X がある実解析的多様体 M の複素化で、 $\text{Supp}(M)$ が X 内の実解析的集合の複素化 (Smooth 点で) なるば、

(2) の $C_{T \setminus X}^{(R, (s))}$ を $\mathcal{D}_{\delta, M}^{(s)}$ に置き換えた同様の主張の元で、

定理が成立するか、一般の場合は成立するかどうか判らない。(もちろん、 $\text{Supp}(M)$ の局所的成分のすべてが、 $T \setminus X$ と交わりを仮定して)

主定理の証明は、準備中の論文を見ていただきたい。

- [1] H. Komatsu : On the regularity of the hyperfunction solutions of linear ordinary differential equations with real analytic coefficients. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA 20, 107-119 (1973)