

興奮性を示す反応拡散系におけるパルスの自己複製

お茶の水女子大学大学院人間文化研究科 早瀬友美乃¹

1 はじめに

近年、反応拡散系におけるパルスの自己複製現象が注目を集めている。Gray-Scott モデルの 1 次元の計算機シミュレーションにおいて、一つの伝搬するパルスが二つに分裂する、パルスの自己複製現象が発見された[1]。また、同モデル方程式の 2 次元の計算機シミュレーションでは、スポットの自己複製現象がみられ、さらに、実際の化学反応においても、類似の現象が再現されている[2]。このように自己複製現象はシミュレーションでも実験でも共通に見られ、興味を集めている現象である。

また、リミットサイクル振動と一様平衡解を合わせ持つ反応拡散系[3, 4]においては、Gray-Scott モデルとは異なるタイプのパルスの自己複製現象が見られている。この系では、衝突においてパルスは対消滅のみならず、対生成されることがある。パルスの「自己複製」、「対消滅」、「対生成」という三つのプロセスにより、パルスの軌跡が興味深い時空間パターンを形成する。その一つにシェルピンスキー・ガスケットに類似した自己相似時空間パターンがある。この系では、パルスの 3 世代を基本とする自己相似図形が見られた。

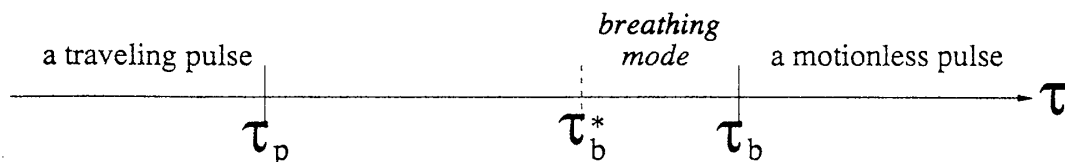
パルスが分裂を起こすような系において、自己複製されたパルスが衝突において全て「対消滅」するならば、2 世代を基本単位とする自己相似時空間パターンが形成されることが期待される。本研究では、リミットサイクルのない、単純に興奮性のみをもつ反応拡散系にみられるパルスの自己複製現象、さらに 2 世代を基本単位とする自己相似パターンについて報告する。

2 モデル方程式

興奮性を持つ反応拡散方程式として、次の Bonhoffer van der Pol 型の反応拡散方程式を考える。

$$\begin{aligned}\tau \frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) - v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u - \gamma v + I\end{aligned}$$

¹ E-mail: yumino@newtopia.phys.ocha.ac.jp

図 1: パラメータ τ に対する安定な定常解

u は活性因子、 v は抑制因子である。ここで非線形項は次の三次関数とする。

$$f(u) = au(u+1)(1-u)$$

パラメータ D_u, D_v, a, γ, I は全て正の整数であり、ここでは系が単安定で興奮性を持つように選ぶ。さらに $D_u \ll D_v$ とする。

図 1 に示すように、これまでの研究により [5]、 τ が十分に大きなところでは動かないパルスが安定に存在することが知られている。また、 τ を大きな値から下げて行くと、 τ_b において安定な動かないパルスは不安定化する。この際、パルスの中心は動かずに幅が振動する breathing motion があらわれ [6]、振動ドメインが形成される。さらに τ を小さくして行くと、 τ_b^* 以下においては、その振動ドメインすら不安定となる。

逆に τ が小さいところでは伝搬するパルスが安定に存在する。 τ を大きくしてゆくと、ある τ_p において安定に伝播するパルスは存在しなくなる。

$\tau_p < \tau < \tau_b^*$ では、動かないパルスも伝播するパルスも安定に存在しない。この領域において次に示すような複雑な現象が見られることがわかった。

3 パルスの自己複製と時空間パターン

$\tau \lesssim \tau_b^*$ において図 2 に見られるような振動ドメインの自己複製がおこった。振動ドメインの幅が一番大きくなった時点で、ドメインが真中から二つに別れる。それぞれは再び振動ドメインを形成し、しばらく振動した後、分裂をおこし、四つの振動ドメインが形成される。長時間のシミュレーションにより、振動ドメインは分裂を繰り返しながら、空間的に広がってゆく。

$\tau \gtrsim \tau_p$ において図 3 のような伝搬するパルスの分裂がみられる。このパラメータ領域においては伝搬するパルスは安定ではない。しかし、 $\tau \lesssim \tau_p$ における安定なパルスは有限の速度を持つことから [5]、 $\tau \gtrsim \tau_p$ においても、パルスは有限の距離を伝播することができる。パルスは減速しながら伝搬し、一度静止した後、振動ドメインの分裂現象と同様に、パルスが真中から二つに分かれ、それぞれが左右に伝搬してゆく。分裂により生成されたパルスは、衝突により反射、もしくは、消滅をおこし、長時間のシミュレーションにおいては、複雑な時空間パターンが形成される。

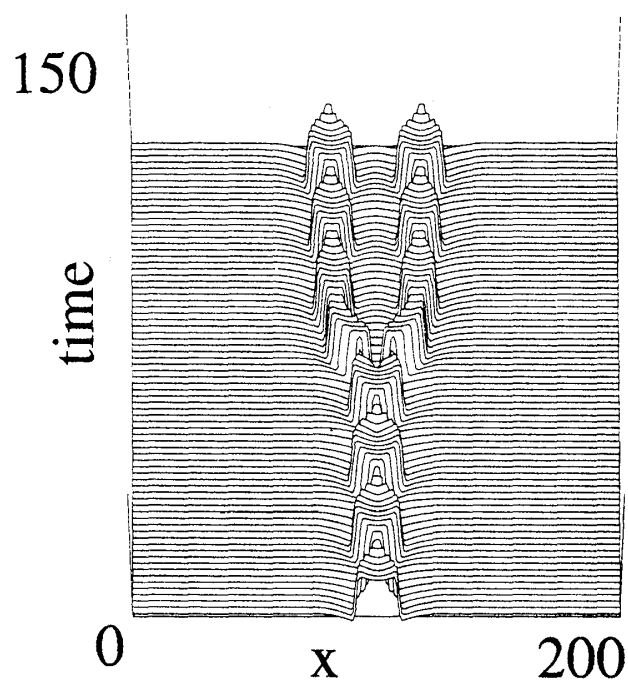


図 2: 振動ドメインの分裂。実線は u のプロファイル

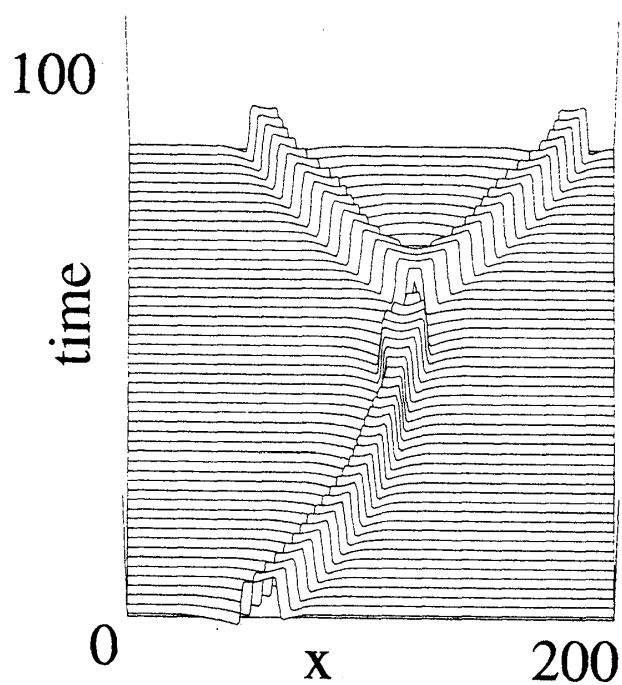


図 3: 伝播するパルスの分裂。実線は u のプロファイル

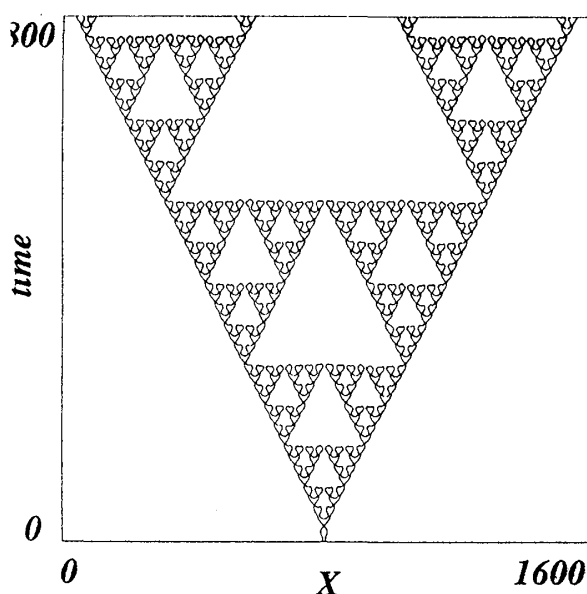


図 4: 時空間パターン。実線は $u = 0$ の等高線

τ_p と τ_b^* の中間付近の τ の値においては、図 4 にみられる自己相似時空間パターンが見られる。本研究の系では、リミットサイクル振動は存在しないため、衝突におけるパルスの「対生成」は起こらず、かならず、「対消滅」がおこる。そのため 2 世代を基本単位とするシェルピンスキー・ガスケットが形成される。

4 おわりに

興奮性を示す反応拡散系におけるパルスの振舞に関する計算機シミュレーションを行ってきた。その結果、パルスの自己複製現象がみられた。これは、不安定なパルスが崩壊する際に、分裂という現象を起こすためである。Gray-Scott モデルに見られる自己複製現象も、不安定なパルスが崩壊する際に分裂をおこす [7]。非平衡開放系にみられるパルスの本質的な性質として、今後、分裂現象の解析的理解を進めて行きたい。

また、伝搬するパルスや動かないパルス、振動ドメインなどの時間的に持続する空間構造が安定に存在しないパラメータ領域においても、初期値に与えた刺激により、長時間後も、系が安定な一様平衡解に落ち着かないことがあることがわかった。本研究のように不安定なパルスが分裂を起こす系においては、局在性と伝搬性を兼ね備えた、複雑な時空間構造が形成される。その一例として、きれいな自己相似図形が形成される。

反応拡散系のような連続モデルから現れる離散自己相似構造は、連続系と離散系の関係を示唆するものである。さらにこのことは、離散系の簡単なルールを実際の自然現象に結びつける糸口となることが期待される。

参考文献

- [1] V. Petrov, K. Scott and K. Showalter, Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A **347**, 631(1994)
- [2] K. J. Lee, W. D. McCormick, Q. Ouyang, and H. L. Swinney, NATURE **369**, 215(1994)
- [3] Y. Hayase, J. Phys. Soc. Jpn. **66**, 2584-2588 (1997)
- [4] Y. Hayase and T. Ohta, Phys. Rev. Lett. **81**, 1726(1998)
- [5] A. Ito and T. Ohta, Phys. Rev. A **45**, 8374(1992)
- [6] S. Koga and Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys, **63**, 105(1980)
- [7] Y. Nishiura and D. Ueyama, to be published