

修士論文： Ice line 近傍における氷ダストの凝縮・昇華による成長

京都大学大学院 人間・環境学研究科 環境環境学専攻

阪上研究室 加納 孝太郎¹

概要

本稿では, ice line 近傍における氷ダストの成長に関して, 移流拡散方程式を解くという観点から研究を行う. ice line とは, 原始惑星系円盤において H_2O が気体 (水蒸気) として存在している領域と固体 (氷) として存在している領域の境界を意味している. この ice line を通して水蒸気と氷ダストとが質量を交換しているあいだに氷ダストのサイズは次第に成長していく.

惑星系形成理論においてダストの成長を考えることは非常に重要である. 古典的な惑星系形成のシナリオでは, ダストが互いに衝突を重ねることで合体成長し大きな塊をつくっていくとされる. 実際, 1mm に満たないダストどうしはファンデルワールス力で付着成長し, 1km を超えるものに関しては重力的な集積によって成長することができる. しかし, その間の 1mm から 1km までのダストについては「分裂 (Fragment)」や「跳ね返り (Bounce)」という問題があるため, 単なる衝突合体だけで説明するのは困難である. それだけでなく, ケプラー運動する固体粒子は円盤ガスからの向かい風を受けて軌道角運動量を失い, 1m サイズのダストでは 100 年程度で中心星に落ちてしまうという「中心星落下問題」もある.

そこで本稿では, これらの問題を回避するためのダスト成長メカニズムの一つとして, ice line 近傍における H_2O の凝縮・昇華過程に注目した. 手法としては, 分布関数を用いて移流拡散方程式を数値的に解くことにより氷ダストの成長を議論している. ここで言う移流とは, 現象としては H_2O の凝縮・昇華 および 円盤動径方向のドリフトと鉛直方向の沈殿を表すものである. また, 拡散とは原始惑星系円盤内のガス乱流によって駆動される, 氷ダストと水蒸気の空間的な運動を指している. この空間的な移流と拡散によって より小さなサイズの氷ダストが ice line 外側へと押し出されて昇華し, その分 局所的に増えた水蒸気が再び拡散し ice line 内側へと浸み込むことで, それを質量の供給源として より大きな氷ダストは成長していくというわけである.

数値計算の結果, 衝突合体がなくともこの凝縮・昇華過程のメカニズムによって, 10000 年というタイムスケールで氷ダストは 1mm から 10cm 程度まで成長することがわかった. ただし, 成長しすぎた氷ダストに関しては動径方向のドリフトが効き, 温度が高い中心星方向へと落ちて水蒸気に昇華してしまう. つまり, 10cm 以上の氷ダストに関しては, また別のメカニズムで成長させる必要があることがわかった. これに関しては, 1m 程度の固体粒子で最も効果的になる Streaming instability によって解決できるものと考えている.

以上に加えて, ice line 近傍において気相および固相の H_2O が見せる物理現象について, 本稿によって進んだ素過程の理解は多い. 以下では, 惑星系形成理論における本稿のテーマの位置付けについて大まかに第 1 章で述べた上で, 続く第 2 章, 第 3 章, 第 4 章においてそれら素過程についての理論的な記述を行うことにする. それを踏まえて, 数値計算スキームおよびそれを用いた計算結果を第 5 章, 第 6 章, 第 7 章で述べていく.

¹E-mail: kanou.koutarou.phys@gmail.com

目 次

1	序論	4
2	原始惑星系円盤の基礎理論	5
2.1	円盤モデル	6
2.2	降着現象	7
2.2.1	円盤乱流	7
2.2.2	基礎方程式	8
2.2.3	粘性拡散	9
3	円盤内のダストの運動	15
3.1	抵抗則	15
3.2	ドリフトと沈殿	16
3.3	拡散	21
3.3.1	コルモゴロフ乱流	21
3.3.2	動径方向拡散	23
3.3.3	鉛直方向拡散	32
4	凝縮・昇華過程	38
4.1	Radial ice line と Atmospheric ice line	38
4.2	氷ダストの成長モデル	41
4.2.1	ダスト粒子が小さい場合	41
4.2.2	ダスト粒子が大きい場合	43
5	数値計算手法	46
5.1	方程式の無次元化	46
5.2	演算子分割法 (Operator splitting method)	50
5.3	時間発展	51
5.3.1	ダスト分布関数	51
5.3.2	水蒸気密度	54
6	テストプログラム	56
6.1	円盤鉛直方向の移流拡散	56
6.2	凝縮・昇華 (粒径方向の移流)	59
7	数値計算結果	65
7.1	空間 1D 計算 (z 方向)	66
7.1.1	Ros & Johansen 2013 との比較	66

7.1.2	1D Advanced model	67
7.2	空間 2D 計算 (r, z 方向)	70
7.2.1	Ros & Johansen 2013 との比較	71
7.2.2	2D Advanced model	73
8	結論	77
付録 A	エプスタイン則 (Epstein law)	79
付録 B	ストークス則 (Stokes law)	81
付録 C	ガスの動粘性係数	85
付録 D	Hill 方程式	87
付録 E	濃度拡散	90
付録 F	3 重対角行列の反転	92

1 序論

われわれの住む地球, そして太陽系の他の惑星たちは宇宙の中でどのように生まれ進化してきたのだろうか. 現在の惑星系形成理論では, 原始太陽を取り巻き漂うガスとダスト (固体微粒子) からこれらの惑星は誕生したと考えられている. 特に古典的な惑星形成のシナリオでは, ダストが互いに衝突を重ねることで合体成長し大きな塊をつくって, ひいてはそこから惑星が形成されると説明されている. しかし, 単純な衝突で本当にダストの付着成長は起こるのだろうか. われわれの日常の直感からすると, 石ころと石ころをぶつけたところで, それらは互いに「跳ね返る」かあるいは「砕け散る」だけで, 「くっつく」ことは到底想像することができない. だとすればダストの成長をどう理解し, 現実に存在する地球やその他の惑星の起源をどう説明すればよいのか. 本研究はこの問いに対してささやかながらのヒントを与えようという試みである.

単純なダストの合体が難しいとすれば, それ以外のメカニズムを用いてダストの成長を説明しようとするのが自然である. 本研究ではダストの中でも特に氷ダストに焦点をあて, その成長メカニズムとして, ice line 近傍における凝縮・昇華の効果に着目した. 凝縮により気相成分を取り込むことで固相の氷ダストが成長するというメカニズムである. 物質が凍りつく境界である ice line に注目した理由は, その近傍では氷ダストの周りに気相物質が豊富に存在する状況が考えられるからである. 氷ダストは自らの周りにある気相成分を取り込んで, ice line をまたぐ気相物質の供給を受けて成長していく. ペタペタとくっつけてダストの集合体を作る代わりに, 気相成分を「エサ」にして氷ダストを太らせようというわけである.

ただし本稿では, 物質としては H_2O に限定し, H_2O の氷ダストと気相水蒸気に関してのみ取り扱うことにする. H_2O に着目する理由は, 原始惑星系円盤内において最も多い元素 H と (不活性な He を除いて) 次に多い O の組み合わせでできる分子だからである. もちろん, 生まれたばかりと言えども原始星のまわりには, H_2O 以外にも多種多様な分子が存在している. そして, それらの分子の種類によって凍りつき始める温度, すなわち中心星からの距離は異なるため, ice line の位置は物質ごとに違うことになる. 主なものとしては H_2O の他に, CO_2 , CH_4 , CO の ice line が考えられる. このような分子から成る氷ダストがそれぞれの ice line 近傍で成長することで, ひいてはそれが惑星をつくる材料へとになっていく. 本稿では H_2O のみを考えるが物質的性質に依存しないモデル化をしているため, 他の物質についての凝縮・昇華による成長も同様に議論することが出来るはずである.

具体的な計算手法としては, 分布関数を用いて移流拡散方程式を数値的に解くことにより氷ダス

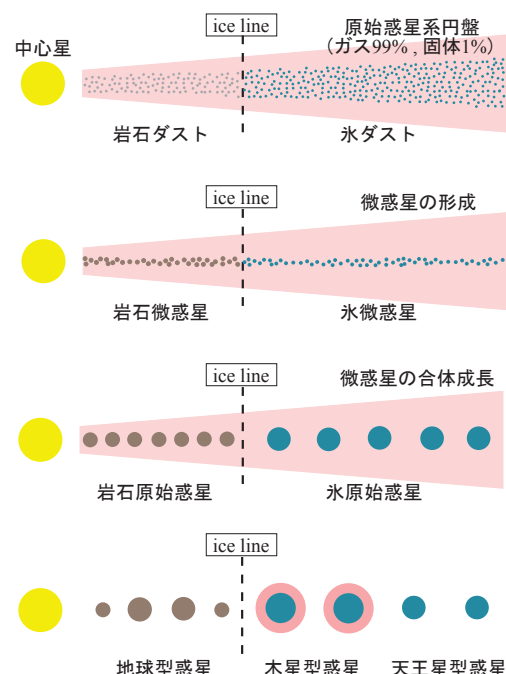


図 1.1: 惑星系形成の標準シナリオの模式図

トおよび水蒸気の空間的な運動や凝縮・昇華の過程を考える．ここで考える氷ダストの空間的な運動は，ガス抵抗に起因する円盤動径 r 方向のドリフト，および，中心星重力の鉛直成分による円盤鉛直 z 方向の沈殿，そして円盤乱流から起こる r, z 方向の拡散である．それに加えて氷ダストに関しては凝縮・昇華による成長（あるいは逆成長）の効果が付加され，そこで氷ダストが得た質量の分だけ逆に水蒸気は質量を失うことになる（質量保存）．一方，水蒸気の空間的な運動に関してはドリフトはなく，円盤乱流による r, z 方向の拡散運動のみを行うものとする．図 1.2 に氷ダストおよび水蒸気の空間的な移流拡散運動の概念図を示す．

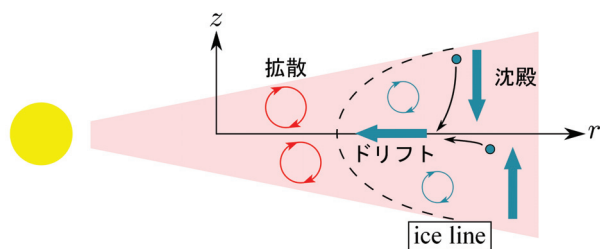


図 1.2: 氷ダスト・水蒸気の移流拡散

氷ダスト	円盤動径 r 方向:	ドリフト + 拡散
	円盤鉛直 z 方向:	沈殿 + 拡散
水蒸気	円盤動径 r 方向:	拡散
	円盤鉛直 z 方向:	拡散

以下，本稿の構成としては第 2 章で原始惑星系円盤の概説をしたのち，第 3 章ではその円盤内でのダストの空間的な運動に関して議論する．続く第 4 章では，氷ダストの凝縮・昇華のモデル化を行い，第 5 章では解くべき移流拡散方程式と数値計算に用いるスキームの詳細を説明する．第 5 章ではテストプログラムの計算結果を示したうえで簡単なケースに対する考察を加え，それを踏まえた上で実際の数値計算結果に関しては第 7 章にまとめ，第 8 章で結論を結ぶことにする．

2 原始惑星系円盤の基礎理論

惑星系形成の出発点となる恒星の誕生は，星間雲において密度が比較的高い「分子雲 (molecular cloud)」と呼ばれる領域のなかで行われる．分子雲は星間に存在する H_2, He を主成分とするガス雲であり，フラクタルな形状を持っていて密度に大きなムラがあることが知られている．そのムラのなかでも特に密度が高い部分を「分子雲コア (molecular cloud core)」と呼び，ここから恒星が生まれることになる．分子雲コアの動的な収縮に伴い，降り積もるガスによって中心星が隠されている段階を「原始星 (protostar)」の段階と呼ぶ．収縮のタイムスケールは，分子雲コアの自由落下時間 (free fall time) τ_{ff} で決まり，典型的なガス分子の数密度 $n_g \sim 10^5 \text{個}/\text{cm}^3$ を用いると $\tau_{\text{ff}} \sim 1/\sqrt{G\rho_g} \sim 10^5 \text{年}$ と見積もることが出来る．この程度の期間を原始星段階に費やした後，若い恒星のまわりにはガスおよびダストから成る「原始惑星系円盤 (protoplanetary disk)」が形成される．この原始惑星系円盤は，分子雲コアの収縮の際に大きな角運動量を持つガスが遠心力のために落ち切れずに残り，それによって形成されたものと解釈される．

こうしてできる原始惑星系円盤にはガス成分の他に，質量比で 1% 程度のダスト (固体微粒子) が含まれていることが重要である．まさにこのダストから端を発して微惑星の形成，そして微惑星から惑星への集積と惑星系形成のプロセスは進行していくことになる．以下では，惑星系形成の最も重要な現場とも言えるこの原始惑星系円盤に関する基礎事項について述べることにする．

2.1 円盤モデル

惑星系形成の過渡的な天体である原始惑星系円盤は、今でこそ観測機器・技術の発展により観測的にも確認されるようになったが、理論的には既に、1960年代から80年代までに築かれた太陽系形成の標準モデルによって予測されていたものであった [1][2]。この標準モデルでは、現在の太陽系の惑星の分布から「原始太陽系星雲 (solar nebula)」のガスとダストの面密度分布を再現し、それを形成論の出発点としている。具体的には、観測により推定される現在の太陽系惑星の固体成分 (氷, シリケート, 鉄) の質量をすりつぶしてダストとして分布させ、そこに、大半は抜けてしまったであろう H_2, He ガス (固体質量の 100 倍程度; 分子雲のガス/ダスト比) を付加して太陽系を再現する円盤としている。このように太陽系の惑星をつくる必要最小限の材料物質しか仮定しないため、「最小質量モデル (minimum mass model)」とも呼ばれ、また、京都大学の林忠四郎を中心とするグループにより提示されたモデルでもあるため「京都モデル」あるいは「林モデル」と呼ばれることもある (以下、本稿では統一して「林モデル」と呼ぶことにする)。

本来であれば、惑星系の形成過程を網羅的に理論付けるためには、そもそもの出生の場である分子雲コアのパラメータから定量的に初期分布を与えて議論しなければならないが、現時点では基礎プロセスの不確定性が高くそれは難しい。そこで、まさに以上で述べたような円盤のモデルが必要になってくるわけである。本稿では、円盤モデルとしてこの林モデルを採用し、円盤の温度分布 $T(r)$ を

$$T(r) = 280 \left(\frac{r}{1 \text{ AU}} \right)^{-1/2} \quad [\text{K}] \quad (2.1)$$

と与えることにする。この温度分布に関しては、中心星の輻射 (光度 L_*) からダスト粒子 (粒径 R) が受け取るエネルギーとダスト粒子表面からの黒体輻射で失われるエネルギーとが釣り合っているものとして

$$\frac{L_*}{4\pi r^2} \pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma_{SB} T^4 \quad \therefore T = \left(\frac{L_*}{16\pi \sigma_{SB}} \right)^{1/4} r^{-1/2} \quad (2.2)$$

により評価していると考えれば良い (σ_{SB} はステファン・ボルツマン定数を表している)。温度 T はダスト粒径 R に依らない形になっていることに注意がいる。 H_2O が凝縮する温度を $T \simeq 160 \text{ K}$ とすれば、 H_2O が気相として存在できる領域と固相として存在できる領域の境界、すなわち、ice line (「radial ice line」: 動径 r 方向に関して存在する境界) は、式 (2.1) から見積って半径が約 3 AU のところにあることがわかる。原論文である Hayashi 1981 [3] では、この ice line の位置を 2.7 AU と見積もり、これより以遠の $r \gtrsim 2.7 \text{ AU}$ に関しては氷ダストの存在によって面密度が増加するものとして、固体面密度 Σ_p を

$$\begin{cases} \Sigma_p^{(\text{rock})}(r) &= 7.1 \left(\frac{r}{1 \text{ AU}} \right)^{-3/2} \quad [\text{g/cm}^2] & ([\text{E}]: 0.35 \text{ AU} \lesssim r \lesssim 2.7 \text{ AU}) \\ \Sigma_p^{(\text{rock+ice})}(r) &= 30 \left(\frac{r}{1 \text{ AU}} \right)^{-3/2} \quad [\text{g/cm}^2] & ([\text{J}]: 2.7 \text{ AU} \lesssim r \lesssim 36 \text{ AU}) \end{cases} \quad (2.3)$$

と与えている。ice line を境に岩石のみが材料物質の地球型惑星領域 [E] か岩石・氷の木星型惑星領域 [J] かが分かれるというわけである。円盤ガスの面密度 $\Sigma_g(r)$ に関しては、式 (2.3) に分子雲の

ガス/ダスト比 (約 100 倍) を掛けることで

$$\Sigma_g(r) = 1.7 \times 10^3 \left(\frac{r}{1 \text{ AU}} \right)^{-3/2} [\text{g/cm}^2] \quad (2.4)$$

が得られる。以上のような林モデルを本稿で採用する理由は、円盤モデルとして今のところ観測事実との大きな矛盾がなく、式 (2.4) より見積もることができる円盤質量に関しても観測値の中間程度であるためである。以下 本稿では、温度分布として式 (2.1) を、ガスの面密度として式 (2.4) を使用する。

2.2 降着現象

2.2.1 円盤乱流

分子雲コアの動的な収縮によって中心星が生まれる一方で原始惑星系円盤は、角運動量を持つガスが遠心力でその動的な落下を止められることによって形成される。このことから、形成されて間もない円盤に関しては、各半径で遠心力と中心星重力とが釣り合うような回転速度

$$v_K = \sqrt{\frac{GM_*}{r}} \quad (2.5)$$

を持つケプラー円盤として見なすことができる。ただし、そのまま永遠と円盤ガスは同じ半径を周回運動するわけではなく、ゆっくりとではあるが中心星に向かって降着 (accretion) していく。この降着現象は観測からも確認されており、理論的には粘性拡散を原因として説明することが出来る。

ガス要素がケプラー速度 $v_K = \sqrt{GM_*/r}$ で回転している円盤すなわちケプラー円盤の場合、回転速度は $r^{-1/2}$ の依存性で動径内側の方が速く動径外側の方が遅くなる。つまり内側と外側の流れに相対速度が生まれる。すると、粘性がある場合、内側の速い流れは外側の遅い流れにブレーキを掛けられ、逆に、外側の流れはその反作用を受けて加速されることになる。こうして角運動量は、内側の流れから外側の流れへと順々に渡されて行き、角運動量を失った内側のガスに関しては遠心力がその場所での中心星重力より小さくなることで、より内側へと落ちていくことになる (一方で、ごく少量の外縁部のガスは角運動量をもって外側に移動する)。これが粘性によって起こるガスの降着現象である。

しかし、問題はこの粘性が一体何によってもたらされているのかということである。観測によって推定される質量降着率を生み出すのに必要な粘性はかなり大きなもので、通常分子粘性では到底小さ過ぎて説明が付かない。そこで考え出されたのが、乱流粘性 (turbulent viscosity) である。何らかの原因で円盤が乱流状態になっているものとすれば、そのとき粘性の大きさは乱流の渦のサイズ ($\sim$ 円盤の厚み H_g ; 後述の式 (3.29) 参照) と乱流運動の速さで決まるため、その速さをある程度大きいものと見込めば乱流粘性は観測を十分説明できるというわけである。ただし現時点では、この乱流粘性を正確に記述することは困難でもあるため、降着円盤 (accretion disk) を議論する際にはパラメータ α を導入して簡単化し、乱流動粘性係数 ν を

$$\nu = \alpha c_{s,g} H_g = \alpha \frac{c_{s,g}^2}{\Omega_K} \quad (2.6)$$

と書いて用いることが多い。ここで, $c_{s,g}$ はガスの音速, H_g はガス円盤の厚み (スケールハイト ; 後述の式 (3.29) 参照), $\Omega_K \equiv v_K/r$ はケプラー角速度である。このようにして乱流の詳細はすべて任意パラメータの α に押し込めて乱流粘性を記述するモデルを「 α モデル」と呼ぶ [4].

粘性が乱流によってもたらされるとして, 次に問題になるのはその乱流の起源である。円盤乱流の起源として現在最も有力視されているのは「磁気回転流体不安定」(Magnetorotational Instability; 以下 MRI と呼ぶ) のメカニズムである [5]. これは電離した円盤を貫く磁力線の揺らぎが円盤の回転とともに引き伸ばされることによって起こる不安定性である。この MRI は角運動量輸送機構として強力なメカニズムではあるが, その難点として円盤赤道面近くなどのガスの電離度が低い領域 (「デッドゾーン」と呼ばれる) では, 乱流が起きない可能性があるということが挙げられる [6]. このように乱流の生成機構もまた興味深く重要な問題の一つではあるが, 本稿ではこの問題については扱わないこととし, 既に何らかのメカニズムによって乱流が発生しているものとしたうえで円盤乱流下におけるガスとダストのダイナミクスを考えていくことにする。

2.2.2 基礎方程式

降着現象は, 円盤ガスについての以下の 3 つの式を用いてモデル化することができる。

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_g v_j) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial P_g}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + g_i \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \rho_g c_V \frac{DT}{Dt} = p_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{T}{\rho_g} \left(\frac{\partial P_g}{\partial T} \right)_V \frac{D\rho_g}{Dt} - \frac{\partial F_{E,j}}{\partial x_j} \end{cases} \quad (2.9)$$

式 (2.7) が連続の式 (質量保存), 式 (2.8) がナビエ・ストークス方程式 (運動方程式), 式 (2.9) がエネルギー方程式 (エネルギー保存) を表している²。ただしここでは表記の便宜上, テンソル形式で書いている。 c_V は単位質量あたりの定積比熱, $F_{E,j}$ はエネルギー流束である。また, p_{ij} は粘性ストレステンソルであり具体的には

$$\begin{cases} p_{ij} = 2\rho_g \nu \left(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right) \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (2.11)$$

と書くことができる (e_{ij} は変形速度テンソル)。圧力 P_g については, 円盤ガスを理想気体と見なし状態方程式として

$$P_g = c_{s,g}^2 \rho_g \quad (2.12)$$

を用いることにする ($c_{s,g}$ はガスの音速)。重力に関しては円盤重力の効果は無視し, 中心星重力のみを考慮して g_i で表した。さらにここでは簡単のため, 乱流による角運動量輸送に限って考察することとし磁場の直接的な効果についても無視した。

²本稿では流れに沿った時間微分 (ラグランジュ微分) を $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ で表すことにする。

2.2.3 粘性拡散

円盤の力学平衡状態およびガスとダストのダイナミクスに関しては後述の3.2節で説明することにして、ここでは1流体(ガスのみ)で考えた場合の粘性による角運動量輸送と降着現象に注目する。ただし、簡単のため系は軸対称であるものとし、円盤上の巻き込みや中心星近傍のジェットに関しては考慮しないこととする³。

一般に、円盤の厚み H_g は十分薄く $H_g/r \ll 1$ とされるため(式(3.29)参照)、以下では円柱座標系 (r, φ, z) を用い方程式を円盤鉛直 z 方向に積分して考えることにする。連続の式(2.7)を円柱座標系で書き直し、軸対称性 $\partial/\partial\varphi = 0$ を用いると、このとき

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_g v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_g v_z) = 0 \quad (2.13)$$

と書くことができる⁴。ここで、円盤表面への降り積もりはないものとし

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_g v_z) dz = 0 \quad (2.15)$$

とすれば、式(2.13)の両辺を z 方向に積分し、面密度 $\Sigma_g \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \rho_g dz$ を導入することで

$$\frac{\partial \Sigma_g}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma_g v_r) = 0 \quad (2.16)$$

と表せる。一方、円柱座標系における運動方程式に関しては、粘性応力によって φ 方向に働く単位質量あたりの力を $f_{\text{vis},\varphi}$ と表すことで

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = f_{\text{vis},\varphi} \quad (2.17)$$

と書けて、この両辺に r を掛け、角運動量 $J \equiv r v_\varphi$ を導入することで

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \underbrace{r v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}}_{v_r \frac{\partial J}{\partial r} - v_r v_\varphi} + v_r v_\varphi = r f_{\text{vis},\varphi} \quad \therefore \frac{\partial J}{\partial t} + v_r \frac{\partial J}{\partial r} = r f_{\text{vis},\varphi} \quad (2.18)$$

となって角運動量の保存を表す方程式が得られる。ただし、この場合は粘性によって角度 φ 方向に $f_{\text{vis},\varphi}$ の力が加わっているため、それによるトルク $r f_{\text{vis},\varphi}$ の分だけ角運動量は時間とともに増加する形になっている。粘性トルク $r f_{\text{vis},\varphi}$ の具体的な形に関しては、トルクが角運動量の時間変化率に他ならないことに注意しそれを $(\partial J/\partial t)_{\text{vis}}$ と書いて、円環(位置 r , 幅 $\delta r \ll r$) が持つ角運動量の時

³降着現象を正確に議論するためには、本来であればこの仮定は妥当ではない。ただし本節は、粘性拡散によって降着が説明できるということを簡潔に示すことを動機とし、また、そうして見積もった質量降着率を観測のそれと比較することによって乱流粘性のパラメータ α の値を大まかに評価することを目的としているため、その限りではこの仮定は妥当であると言える。

⁴円柱座標系において、ある物理量 $\mathbf{A}$ の発散は

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= (\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z) = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.14)$$

と書ける。

間変化 $2\pi r \delta r (\partial J / \partial t)_{\text{vis}}$ について考えるとわかりやすい. この円環の角運動量変化は, 応力 $p_{r\varphi}$ からもたらされるトルクについての円環外縁と内縁の差で書くことができるので

$$2\pi r \delta r \left(\frac{\partial J}{\partial t} \right)_{\text{vis}} = \frac{1}{\rho_g} \delta(2\pi r \cdot r p_{r\varphi}) \quad \therefore \left(\frac{\partial J}{\partial t} \right)_{\text{vis}} = \frac{1}{\rho_g} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 p_{r\varphi}) \quad (2.19)$$

となって, すなわち

$$f_{\text{vis},\varphi} = \frac{1}{\rho_g} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 p_{r\varphi}) \quad (2.20)$$

と書けることがわかる. 応力テンソル $p_{r\varphi}$ は

$$\begin{aligned} p_{r\varphi} &= \rho_g \nu \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \varphi} \right)_r + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} \right)_\varphi \right] = \rho_g \nu \left[\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}}_0 - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right] \\ &= \rho_g \nu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) = \rho_g \nu r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.21)$$

であるから⁵, 結局, 粘性によって角度方向に受ける力 $f_{\text{vis},\varphi}$ は

$$f_{\text{vis},\varphi} = \frac{1}{\rho_g} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \rho_g \nu \frac{\partial \Omega}{\partial r}) \quad (2.22)$$

ということになる. 以下, 角速度に関しては, $\Omega \simeq \Omega_K$ と見なせるので $\Omega = \Omega_K$ として計算を行うことにする. このとき角運動量は $J = r^2 \Omega_K = \sqrt{GM_* r}$ であり, 中心星質量 M_* の時間変化がきわめて小さいことを考えると $\partial J / \partial t = 0$ とできる. これより式 (2.18) は, 式 (2.22) を用い z 方向に積分した形で書けば

$$r \Sigma_g v_r \frac{\partial J}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \Sigma_g \nu \frac{\partial \Omega_K}{\partial r}) \quad (2.23)$$

となって, 降着速度 v_r について

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{2}{J \Sigma_g} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \Sigma_g \nu \cdot \left(-\frac{3}{2} \Omega_K \right) \right] \\ &= -\frac{3}{\Sigma_g r^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma_g \nu r^{1/2}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$= -\frac{3\nu}{r} \left[\frac{\partial \ln(\Sigma_g \nu r^{1/2})}{\partial \ln r} \right] \quad (2.25)$$

が得られる. これは, 粘性拡散時間 $t_{\text{diff}} \sim r^2 / \nu$ を用いた見積もり $|v_r| \sim r / t_{\text{diff}}$ と数係数を除いて一致する結果になっている. 式 (2.24) を式 (2.16) にすることにより, 円盤ガス面密度の進化を記述する拡散方程式

$$\frac{\partial \Sigma_g}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left[6\pi r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma_g \nu r^{1/2}) \right] \quad (2.26)$$

が導かれる. 半径 r に位置する円筒面の質量 $2\pi r \Sigma_g$ が拡散フラックス

$$F_M^{(\text{vis})} \equiv 2\pi r \Sigma_g v_r = -6\pi r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma_g \nu r^{1/2}) \quad (2.27)$$

⁵ $\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \varphi} \right)_r$ は $\frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \varphi}$ の r 成分を, $\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} \right)_\varphi$ は $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r}$ の φ 成分を表している.

によって時間とともに増加する様子をこの式 (2.26) は表している. この方程式はさらに以下のように変形することができる.

粘性トルクによって, 半径 r に位置する円筒面を通して運ばれる角運動量フラックスを $F_J^{(\text{vis})}$ としたとき, これは式 (2.23) の右辺を φ に関して積分したもの (2π を掛けたもの) によって表すことができる

$$F_J^{(\text{vis})} = -2\pi r^3 \Sigma_g \nu \frac{\partial \Omega_K}{\partial r} = 3\pi \Sigma_g \nu J \quad (2.28)$$

と書ける. 乱流粘性に関しては, α モデルを採用し動粘性係数 ν が式 (2.6) に従うものとすれば ν は時間依存しないため, 式 (2.28) より面密度の時間変化 $\partial \Sigma_g / \partial t$ は $\partial F_J^{(\text{vis})} / \partial t$ を用いて

$$\frac{\partial \Sigma_g}{\partial t} = \frac{1}{3\pi \nu J} \frac{\partial F_J^{(\text{vis})}}{\partial t} \quad (2.29)$$

と表される. また

$$\frac{\partial J}{\partial r} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM_*}{r}} \quad \therefore r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\sqrt{GM_*}}{2} \frac{\partial}{\partial J} \quad (2.30)$$

であるので, 粘性拡散による質量フラックス $F_M^{(\text{vis})}$ は

$$F_M^{(\text{vis})} = -\frac{2}{\sqrt{GM_*}} r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} (3\pi \Sigma_g \nu J) = -\frac{\partial F_J^{(\text{vis})}}{\partial J} \quad (2.31)$$

と表すことができる. 以上の式 (2.29), (2.30), (2.31) に注意して書き直すことによって, 式 (2.26) はフラックス $F_J^{(\text{vis})}$ の角運動量 J に関する拡散方程式

$$\frac{\partial F_J^{(\text{vis})}}{\partial t} = \frac{3\nu GM_*}{4r} \frac{\partial^2 F_J^{(\text{vis})}}{\partial J^2} \quad (2.32)$$

に変形される. 特に林モデルの温度分布 (2.1) を用いた場合は, 音速 $c_{s,g}$ に関して $c_{s,g}^2 \propto T \propto r^{-1/2}$ であり, このとき式 (2.6) より動粘性係数の r 依存性は $\nu \propto r$ となるため式 (2.32) 右辺の係数

$$\kappa \equiv \frac{3\nu GM_*}{4r} \quad (2.33)$$

は定数と見なすことができる. すなわち, この場合 問題は定数係数の 1 次元拡散方程式に帰着することになる. ここでは境界条件を

$$\begin{cases} J = 0 \text{ すなわち } r = 0 \text{ で } F_J^{(\text{vis})} = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\begin{cases} J \rightarrow \infty \text{ すなわち } r \rightarrow \infty \text{ で } \frac{\partial F_J^{(\text{vis})}}{\partial J} = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

と選んで式 (2.32) を解くことにする. まず $\psi(J, t) \equiv \int_J^\infty F_J^{(\text{vis})}(J', t) dJ'$ を導入し, 境界条件 (2.35) を用いることで, 方程式 (2.32) を

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_J^\infty F_J^{(\text{vis})} dJ' &= \kappa \int_J^\infty \frac{\partial^2 F_J^{(\text{vis})}}{\partial J'^2} dJ' \\ &= \kappa \left\{ \frac{\partial F_J^{(\text{vis})}}{\partial J'} \Big|_{J' \rightarrow \infty} - \frac{\partial F_J^{(\text{vis})}}{\partial J'} \Big|_{J'=J} \right\} \\ \therefore \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial J^2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

のように $\psi(J, t)$ の拡散方程式の形に変換する. ただしこのとき $F_J^{(\text{vis})} = -\partial\psi/\partial J$ であることに注意がある. 境界条件 (2.34) はこの場合 $(\partial\psi/\partial J)|_{J=0} = 0$ となって, 拡散方程式 (2.36) で考えれば $J=0$ で常に拡散フラックス $-\kappa(\partial\psi/\partial J)|_{J=0}$ が 0 となることを意味している.

初期条件に関しては, $t = t_0$ で $\psi(J, t_0) = \psi_0 \delta(J)$ という初期分布を用いることにする (ψ_0 は定数). 今考えている問題の場合, ある意味 初期分布をどのように採用するかは重要な事柄ではなく, 初期条件として違う分布から始めても時間が経つにつれて次に述べるような解に漸近していく.

以下, 拡散方程式のフーリエ解法を用いて初期分布 $\psi(J, t_0) = \psi_0 \delta(J)$ に対する式 (2.36) の解を求めることにする. フーリエ逆変換

$$\psi(J, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(k_J, t) e^{ik_J J} dk_J \quad (2.37)$$

を式 (2.36) に代入することにより

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{\psi}(k_J, t)}{\partial t} e^{ik_J J} dk_J &= \kappa \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-k_J^2) \hat{\psi}(k_J, t) e^{ik_J J} dk_J \\ \therefore \frac{\partial \hat{\psi}(k_J, t)}{\partial t} &= -\kappa k_J^2 \hat{\psi}(k_J, t) \end{aligned} \quad (2.38)$$

とでき, この微分方程式に関しては容易に解けて

$$\hat{\psi}(k_J, t) = \hat{\psi}(k_J, t_0) e^{-\kappa k_J^2 (t-t_0)} \quad (2.39)$$

が得られる. これを式 (2.37) に代入し直して

$$\psi(J, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(k_J, t_0) e^{ik_J J - \kappa k_J^2 (t-t_0)} dk_J \quad (2.40)$$

であり, この左辺に関して初期条件 $\psi(J, t_0) = \psi_0 \delta(J)$ を用いると

$$\psi_0 \delta(J) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(k_J, t_0) e^{ik_J J} dk_J \quad (2.41)$$

と表されることになる. これをフーリエ変換することで $\hat{\psi}(k_J, t_0)$ は

$$\hat{\psi}(k_J, t_0) = \psi_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(J) e^{-ik_J J} dJ = \psi_0 \quad (2.42)$$

と決まるため, 式 (2.40) は

$$\psi(J, t) = \frac{\psi_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_J J - \kappa k_J^2 (t-t_0)} dk_J \quad (2.43)$$

と書けることがわかる. 式 (2.43) の右辺の積分の指数部分については, 平方完成して

$$\begin{aligned} &ik_J J - \kappa k_J^2 (t-t_0) \\ &= -\kappa(t-t_0) \left[k_J^2 - i \frac{J}{\kappa(t-t_0)} k_J \right] \\ &= -\kappa(t-t_0) \left[k_J - i \frac{J}{2\kappa(t-t_0)} \right]^2 - \frac{J^2}{4\kappa(t-t_0)} \end{aligned} \quad (2.44)$$

とすれば, 結局 $\psi(J, t)$ は

$$\begin{aligned}
 \psi(J, t) &= \frac{\psi_0}{2\pi} e^{-\frac{J^2}{4\kappa(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa(t-t_0) \left[k_J - i \frac{J}{2\kappa(t-t_0)} \right]^2} dk_J \\
 &= \frac{\psi_0}{2\pi} e^{-\frac{J^2}{4\kappa(t-t_0)}} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa(t-t_0)}} \\
 &= \frac{\psi_0}{\sqrt{4\pi\kappa(t-t_0)}} e^{-\frac{J^2}{4\kappa(t-t_0)}} \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

と導かれる. つまり, 時間の経過につれて $\psi(J, t)$ の分布は $\sqrt{t}$ で J 方向に広がる (拡散する) ことがわかる. この場合, 拡散はあくまで $J = 0$ を中心に起こり, また円盤遠方 $J \rightarrow \infty$ まではその影響は及ばないため, 式 (2.45) は常に境界条件 (2.34), (2.35) を満たすことになる.

$F_J^{(\text{vis})} = -\partial\psi/\partial J$ で ψ を定義していたことを思い出すと, $F_J^{(\text{vis})}$ に関しては式 (2.45) より

$$F_J^{(\text{vis})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{J}{[4\kappa(t-t_0)]^{3/2}} e^{-\frac{J^2}{4\kappa(t-t_0)}} \quad (2.46)$$

となる. ここで $r_0 \equiv -4\kappa t_0/GM_*$ を用いて無次元変数 $\tilde{r}, \tilde{\nu}, \tilde{J}, \tilde{t}$ を

$$\tilde{r} \equiv r/r_0 \quad (2.47)$$

$$\tilde{\nu} \equiv \nu/\nu_0 = \tilde{r} \quad (2.48)$$

$$\tilde{J} \equiv J/J_0 = \tilde{r}^{1/2} \quad (2.49)$$

$$\tilde{t} \equiv 4\kappa(t-t_0)/J_0^2 = \frac{t}{(r_0^2/3\nu_0)} + 1 \quad (2.50)$$

で導入する. ただし, J_0, ν_0 はそれぞれ半径 $r = r_0$ における J, ν を表している. これらを用いることで式 (2.46) は

$$F_J^{(\text{vis})} = C \frac{\tilde{r}^{1/2}}{\tilde{t}^{3/2}} e^{-\tilde{r}/\tilde{t}} \quad (2.51)$$

と表せる (C は定数). 式 (2.28), 式 (2.31) を使って $F_J^{(\text{vis})}$ から $\Sigma_g, F_M^{(\text{vis})}$ に直すと

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_g = \frac{C}{3\pi\nu_0 J_0} \frac{1}{\tilde{r}\tilde{t}^{3/2}} e^{-\tilde{r}/\tilde{t}} \end{array} \right. \quad (2.52)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_M^{(\text{vis})} = -\frac{C}{J_0} \frac{1}{\tilde{t}^{3/2}} e^{-\tilde{r}/\tilde{t}} \left(1 - \frac{2\tilde{r}}{\tilde{t}} \right) = -3\pi\Sigma_g\nu \left(1 - \frac{2\tilde{r}}{\tilde{t}} \right) \end{array} \right. \quad (2.53)$$

と求められる. これらの解は

$$\tilde{\xi} = \tilde{r}/\tilde{t} \quad \tilde{\Sigma}_g = \frac{3\pi\nu_0 J_0}{C} \tilde{t}^{5/2} \Sigma_g \quad \tilde{F}_M^{(\text{vis})} = \frac{J_0}{C} \tilde{t}^{3/2} F_M^{(\text{vis})} \quad (2.54)$$

を用いて

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Sigma}_g = \tilde{\xi}^{-1} e^{-\tilde{\xi}} \end{array} \right. \quad (2.55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{F}_M^{(\text{vis})} = -e^{-\tilde{\xi}} \left(1 - 2\tilde{\xi} \right) \end{array} \right. \quad (2.56)$$

と表せて, $\tilde{\Sigma}_g, \tilde{F}_M^{(\text{vis})}$ に関しては無次元変数 $\tilde{\xi}$ だけの関数にできる. つまり式 (2.52), (2.53) は自己相似解 (Self-similar solution) になっている.

式 (2.53) からわかるように, 質量フラックス $F_M^{(\text{vis})}$ は $r_m = \tilde{t}r_0/2$ を境に正と負に分かれる. すなわち円盤ガスの拡散はこの r_m を中心にして起こり, $r < r_m$ ではガスは内側へと $r > r_m$ でガスは外側へと動くことになる. ただし, r_m の位置は時間とともに移動することに注意がいる. $t = 0$ で $r_0/2$ にあった拡散の中心 r_m は, その位置での拡散時間 $\sim r_0^2/3\nu_0$ を経たのちに, $\sim 3\nu_0/2r_0$ の速さで円盤外側へと移動していく.

また, 式 (2.52) のように, $2r_m = \tilde{t}r_0$ は面密度 Σ_g が内側の r^{-1} の分布から外側の $\exp$ の分布へと切り替わる r を表している. 自己相似解 (2.52) が内側領域で r^{-1} の面密度分布を示す一方で, 林モデルの面密度分布は式 (2.4) のように $\Sigma_g \propto r^{-3/2}$ であることに注意がいる. この $r^{-3/2}$ の分布は式 (2.31) よりちょうど拡散流が 0 の場合に対応する分布であり, 林モデルでは降着は起こらず面密度の時間変化はないことがわかる. これに対して, 式 (2.53) で求めた自己相似解の場合, 内側領域 $r < r_m$ における質量降着率は

$$F_M^{(\text{vis})} \simeq -3\pi\Sigma_g\nu \quad (2.57)$$

と見積もることができる. 実際, 以上で議論したような円盤ガスの降着は観測からも確認されている. 降着したガスは中心星へと流入する際に, 重力エネルギーの解放によりかなりの高温に熱せられ, その高温ガスからは紫外線や可視光, $\text{H}\alpha$ 輝線などが発せられる. それらの光学的な特性を観測により調べることで, どれくらいの率で円盤ガスの降着が起こっているかの見積もりができるというわけである.

本来, 降着率は中心星の年齢とともに次第に減少していくものであるが, 年齢 10^5 年から 10^6 年程度 (cf. 分子雲コアの自由落下時間 $\tau_{\text{ff}} \sim 1/\sqrt{G\rho_g} \sim 10^5$ 年) の場合に関しては, 観測によると $|F_M^{(\text{vis})}| \sim 10^{-7} M_\odot/\text{year}$ のように概算されている. これは中心星付近で見積もった値であるが, 以下では, それが 1AU 付近の $|F_M^{(\text{vis})}|$ とほぼ等しいとして仮定して α パラメータの値を見積もってみる. 乱流動粘性係数 ν は式 (2.6) より

$$\nu \simeq 5 \times 10^{16} \alpha \left(\frac{T}{300 \text{ K}} \right) \left(\frac{r}{1 \text{ AU}} \right)^{3/2} [\text{cm}^2/\text{sec}] \quad (2.58)$$

であり, 原始惑星系円盤の 1AU における面密度の典型的な値 $\Sigma_g \sim 2000 \text{ g/cm}^2$ を用いると式 (2.57) より

$$|F_M^{(\text{vis})}| \simeq 2 \times 10^{-5} \alpha \left(\frac{\Sigma_g}{2000 \text{ g/cm}^2} \right) \left(\frac{T}{300 \text{ K}} \right) \left(\frac{r}{1 \text{ AU}} \right)^{3/2} [M_\odot/\text{year}] \quad (2.59)$$

と書ける. この概算式 (2.59) と観測値 $|F_M^{(\text{vis})}| \sim 10^{-7} M_\odot/\text{year}$ を比較することで α パラメータの値は

$$\alpha \sim 10^{-2} \quad (2.60)$$

と見積もることができる. 本稿ではこの式 (2.60) を α パラメータの基準値として採用することにする. ただし, 観測から得られる $|F_M^{(\text{vis})}|$ の値はばらつきが大きく, 式 (2.60) の見積もりには 2 桁ほど不定性があると思った方が良くかもしれない. 特に, デッドゾーンの存在によって乱流が抑えられた場合は 10^{-3} あるいは 10^{-4} にまで α の値は下がるとも報告されている. 本稿では先行研究の Ros & Johansen 2013 の結果との比較も勘案して, デフォルトとしては α の値は 10^{-2} を用い, 場合によって, 乱流の強さによる相違を見るために $10^{-3}, 10^{-4}$ という値も使用することにする.

3 円盤内のダストの運動

本章では、原始惑星系円盤におけるガスとダストの空間的な運動について考える。本稿がテーマとする氷ダストの成長メカニズムは凝縮・昇華過程によるものであるが、その凝縮・昇華はまさに ice line を横切るような水蒸気と氷ダストの空間的な運動があるために起こるものである。これらの空間的な運動は大きくドリフトと拡散に分けることが出来る。そしてそのどちらに関しても重要になってくるのが、ガスとダストの間に働く抵抗の効果である。抵抗力が存在することでガスとダストのカップリングが生まれ、それが円盤内におけるガスとダストのダイナミクスを支配していくことになる。以下ではまずこの抵抗則について述べた上で、ダストのドリフト運動および拡散運動について議論していくことにする。

3.1 抵抗則

ガス中で運動する粒径 R のダスト粒子 (球形粒子) が移動する際に働く抵抗力は

$$F_D = -\frac{C_D}{2}\pi R^2 \rho_g V^2 \quad (3.1)$$

と書くことができる。ここで、 C_D は無次元抵抗係数、 ρ_g はガスの密度、 V はダスト粒子のガスに対する相対速度である。抵抗係数 C_D に関しては、粒子周りの流れのクヌーセン数 ($Kn = l_g/R$; l_g はガス分子の平均自由行程) とレイノルズ数 ($Re = 2VR/\nu$; ν はガスの動粘性係数) に応じて

$$C_D^{(Ep)} = \frac{8}{3Ma} \quad (Kn \gtrsim 1, Re \lesssim 1) \quad (3.2)$$

$$C_D^{(St)} = \frac{24}{Re} \quad (Kn \lesssim 1, Re \lesssim 1) \quad (3.3)$$

$$C_D^{(N)} = 0.44 \quad (Kn \lesssim 1, Re \gg 1) \quad (3.4)$$

と近似することができる [7]。ただし、 $Ma = V/v_{m,g}$ はマッハ数であり、 $v_{m,g} = \sqrt{8/\pi} c_{s,g}$ はガス分子の速さ $|\mathbf{v}_g|$ の平均である。それぞれ式 (3.2) がエプスタイン抵抗則 (Epstein drag law)、式 (3.3) がストークス抵抗則 (Stokes drag law)、式 (3.4) がニュートン抵抗則 (Newton drag law) の抵抗係数を表している。これらより抵抗はレイノルズ数の増加に伴い、相対速度に比例するものから相対速度の 2 乗に比例するものへと切り替わることがわかる。低レイノルズ数の場合はエプスタイン則あるいはストークス則があてはまるが、そのうちどちらの抵抗則が適用されるかはダストサイズ R とガス分子の平均自由行程 l_g の関係に依る。ダストサイズが小さい $R \lesssim l_g$ ($Kn \gtrsim 1$) の場合 ガス分子は粒子的に振る舞うためエプスタイン則が、ダストサイズが大きい $R \gtrsim l_g$ ($Kn \lesssim 1$) の場合 ガスは流体的となるためストークス則が適用される。本研究は円盤が乱流状態にある (円盤のレイノルズ数が大きい) ことを前提としてはいるが、乱流状態であったとしてもダストの粒径 R が乱流の最小スケール (コロモゴロフ長) よりも十分小さい場合は、ダストサイズスケールで見た粒子周りの流れの粒子レイノルズ数は小さいものとし、ダスト粒子に働く抵抗力としてはエプスタイン則とストークス則のみを考えればよい。このことを考慮し、本稿では抵抗は相対速度に比例するものと

して、ダストがガスによってブレーキを掛けられるタイムスケール、すなわち「制動時間 (stopping time あるいは friction time)」をダスト粒子の質量 m_p およびダストとガスの相対速度 V を用いて

$$t_{\text{stop}} \equiv \frac{m_p V}{|F_D|} \quad (3.5)$$

で定義する. これにより, 式 (3.1) に式 (3.2),(3.3) を代入することで, エプスタイン則とストークス則に関してそれぞれ制動時間を

$$t_{\text{stop}}^{(\text{Ep})} = \frac{\frac{4\pi}{3} \rho_s R^3 V}{\frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \rho_g R^2 c_{s,g} V} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{R \rho_s}{c_{s,g} \rho_g} \quad (3.6)$$

$$t_{\text{stop}}^{(\text{St})} = \frac{\frac{4\pi}{3} \rho_s R^3 V}{6\pi \rho_g \nu R V} = \frac{2R^2 \rho_s}{9\rho_g \nu} = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{R^2 \rho_s}{c_{s,g} \rho_g l_g} \quad (3.7)$$

と得る. ただし, ダスト粒子は物質密度が ρ_s の均質な球であると仮定し $m_p = (4\pi/3)\rho_s R^3$ とした. また動粘性係数としては $\nu = v_{\text{m},g} l_g / 2$ を用いた (付録 C 式 (C.10)). 以下では, $t_{\text{stop}}^{(\text{Ep})} = t_{\text{stop}}^{(\text{St})}$ となる $R = 9 l_g / 4$ で両抵抗則を単純に接続し, 無次元制動時間 $\tau_s \equiv \Omega_K t_{\text{stop}}$ を導入して

$$\begin{cases} \tau_s^{(\text{Ep})} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{R \rho_s}{H_g \rho_g} & (\text{Epstein drag} : R \leq \frac{9}{4} l_g) \\ \tau_s^{(\text{St})} = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{R^2 \rho_s}{H_g \rho_g l_g} & (\text{Stokes drag} : R > \frac{9}{4} l_g) \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} \tau_s^{(\text{St})} = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{R^2 \rho_s}{H_g \rho_g l_g} & (\text{Stokes drag} : R > \frac{9}{4} l_g) \end{cases} \quad (3.9)$$

とする [8][9].

3.2 ドリフトと沈殿

3.1 節の抵抗則を用いて, 原始惑星系円盤の中でのガスとダストの運動を考える. ここでは, 抵抗を通して相互作用する 2 成分流体としてガスとダストの運動を取り扱うことにする. ガスとダストの速度および空間密度をそれぞれ $\mathbf{V}$ と $\mathbf{v}$ および ρ_g と ρ_p と表すと, ガスとダストの運動方程式は

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\rho_p}{\rho_g} \frac{\mathbf{v} - \mathbf{V}}{t_{\text{stop}}} - \frac{GM_*}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} - \frac{1}{\rho_g} \nabla P_g + \frac{1}{\rho_g} \nabla \cdot \Pi_{\text{vis}} \quad (3.10)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{\mathbf{v} - \mathbf{V}}{t_{\text{stop}}} - \frac{GM_*}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \quad (3.11)$$

と表すことが出来る. ここで, Π_{vis} は粘性ストレス・テンソルである. 円柱座標系 (r, φ, z) で運動方程式の各成分を書き下すと

$$\begin{cases} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varphi^2}{r} = \frac{\rho_p}{\rho_g} \frac{v_r - V_r}{t_{\text{stop}}} - \frac{GM_*}{r^2} - \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial P_g}{\partial r} \\ \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{V_r V_\varphi}{r} = \frac{\rho_p}{\rho_g} \frac{v_\varphi - V_\varphi}{t_{\text{stop}}} + f_{\text{vis},\varphi} \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\rho_p}{\rho_g} \frac{v_z - V_z}{t_{\text{stop}}} - \frac{GM_*}{r^3} z - \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial P_g}{\partial z} \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{v_r - V_r}{t_{\text{stop}}} - \frac{GM_*}{r^2} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{v_\varphi - V_\varphi}{t_{\text{stop}}} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{v_z - V_z}{t_{\text{stop}}} - \frac{GM_*}{r^3} z \end{cases} \quad (3.13)$$

となる．ただし以上では，円盤が軸対称であること ($\partial/\partial\varphi = 0$)，考えている領域が $r \gg z$ であることを用い，また，粘性項に関してはその大きさが圧力項のおよそ α 倍 (α は乱流粘性のパラメータ) しかないことから r, z 方向については粘性項を無視してある．一方で， φ 方向の粘性項に関しては前述の式 (2.22) より

$$f_{\text{vis},\varphi} \equiv \frac{1}{\rho_g} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \rho_g \nu \frac{\partial \Omega_K}{\partial r} \right) \quad (3.14)$$

と評価することにする ($\nu = \alpha c_{s,g} H_g$ は乱流動粘性係数)．

$t_{\text{stop}} \ll 2\pi/\Omega_K$ の場合，ダストの運動は t_{stop} の時間で定常状態に達し，終端速度で運動することになる．これより運動方程式 (3.12)(3.13) で，定常状態 $\partial/\partial t = 0$ ，および， $|V_r|, |V_z|, |v_r|, |v_z| \ll v_K$ ($v_K \equiv r\Omega_K$, $\Omega_K \equiv \sqrt{GM_*/r^3}$) としてその 2 次以上の微小量を落とすと

$$\begin{cases} -\frac{V_\varphi^2}{r} = \frac{\rho_p}{\rho_g} \frac{v_r - V_r}{t_{\text{stop}}} - \frac{v_K^2}{r} - \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial P_g}{\partial r} \\ V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{V_r V_\varphi}{r} = \frac{\rho_p}{\rho_g} \frac{v_\varphi - V_\varphi}{t_{\text{stop}}} + f_{\text{vis},\varphi} \\ 0 = \frac{\rho_p}{\rho_g} \frac{v_z - V_z}{t_{\text{stop}}} - \Omega_K^2 z - \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial P_g}{\partial z} \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} -\frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{v_r - V_r}{t_{\text{stop}}} - \frac{v_K^2}{r} \\ v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{v_\varphi - V_\varphi}{t_{\text{stop}}} \\ 0 = -\frac{v_z - V_z}{t_{\text{stop}}} - \Omega_K^2 z \end{cases} \quad (3.16)$$

となる． $V_\varphi = v_K + V'_\varphi$, $v_\varphi = v_K + v'_\varphi$ と置き， $V'_\varphi, v'_\varphi \ll v_K$ としてさらにこれらの微小量の 2 次以上の項を無視することで

$$\begin{cases} V_r = v_r + 2 \frac{\rho_g}{\rho_p} (V'_\varphi + \eta v_K) \Omega_K t_{\text{stop}} \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} V'_\varphi = v'_\varphi + \frac{\rho_g}{\rho_p} \left(f_{\text{vis},\varphi} - \frac{1}{2} V_r \Omega_K \right) t_{\text{stop}} \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} V_z = v_z - \frac{\rho_g}{\rho_p} \Omega_K^2 t_{\text{stop}} z - \frac{1}{\rho_p} \frac{\partial P_g}{\partial z} t_{\text{stop}} \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} v_r = V_r + 2 v'_\varphi \Omega_K t_{\text{stop}} \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\begin{cases} v'_\varphi = V'_\varphi - \frac{1}{2} v_r \Omega_K t_{\text{stop}} \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} v_z = V_z - \Omega_K^2 t_{\text{stop}} z \end{cases} \quad (3.22)$$

とできる. ただし, 式 (3.17) に現れる η は, (ダストとの相互作用がない場合の) ガスの回転速度とケプラー速度の差の割合を表すパラメータであり⁶

$$\eta \equiv -\frac{c_{s,g}^2}{2v_K^2} \frac{\partial \ln P_g}{\partial \ln r} \quad (3.25)$$

と定義してある. 以下では, ガスの円盤鉛直方向の速度が $V_z = 0$ であることにする. このとき, 式 (3.22) よりダストの鉛直方向の速度 (終端速度) は

$$v_z = -\Omega_K^2 t_{\text{stop}} z \quad (3.26)$$

と見積もることができるので, これを式 (3.19) に代入し, $\rho_g \gg \rho_p$ および 理想気体状態方程式 $P_g = c_{s,g}^2 \rho_g$ を用いると

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial z} = -\rho_g \frac{\Omega_K^2}{c_{s,g}^2} z \quad (3.27)$$

となる. 両辺を z に関して積分し, 円盤面密度 $\Sigma_g(r) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \rho_g(r, z) dz$ を用いると

$$\rho_g = \frac{\Sigma_g}{\sqrt{2\pi} H_g} \exp \left[-\frac{z^2}{2H_g^2} \right] \quad (3.28)$$

を得る. H_g はガスのスケールハイト (ガス円盤の特徴的な厚み) であり

$$H_g \equiv \frac{c_{s,g}}{\Omega_K} \simeq 0.03 \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^{5/4} [\text{AU}] \quad (3.29)$$

で与えられる (第 2 等号では林モデルの円盤温度分布 (2.2) を用いた).

次に r, φ 方向について考える. それぞれ $[\rho_g \times \text{式 (3.20)} - \rho_p \times \text{式 (3.17)}]$, $[\text{式 (3.18)} + \text{式 (3.21)}]$, $[\rho_g \times \text{式 (3.21)} - \rho_p \times \text{式 (3.18)}]$, $[\text{式 (3.17)} + \text{式 (3.20)}]$ より

$$\begin{cases} v_r - V_r = \frac{2\tau_s}{1+c_p} (v'_\varphi - V'_\varphi - \eta v_K) \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\begin{cases} c_p v_r + V_r = 2 \frac{f_{\text{vis},\varphi}}{\Omega_K} \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\begin{cases} v'_\varphi - V'_\varphi = -\frac{1}{2} \frac{\tau_s}{1+c_p} (v_r - V_r) - \frac{\tau_s}{1+c_p} \frac{f_{\text{vis},\varphi}}{\Omega_K} \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} c_p v'_\varphi + V'_\varphi = -\eta v_K \end{cases} \quad (3.33)$$

を得る. ただし $c_p \equiv \rho_p/\rho_g$ はガスに対するダストの濃度 (質量密度比) を表している.

⁶ ガスのみから成る円盤の力学平衡状態について考えると, 動径方向 (r 方向) に関して 力の釣り合いの式

$$\frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial P_g}{\partial r} + \frac{GM_*}{r^2} \quad (3.23)$$

が成り立つ. これより力学平衡状態におけるガスの回転速度 v_φ は

$$v_\varphi = v_K \left(1 + \frac{c_{s,g}^2}{v_K^2} \frac{\partial \ln P_g}{\partial \ln r} \right)^{1/2} \simeq v_K (1 - \eta) \quad (3.24)$$

と書ける. 圧力勾配による支えがある分, 通常のケプラー回転より η の割合だけガスの回転速度は遅くなることがわかる. それに対してダストは, 単独ではケプラー速度で公転しようとするためガスとダストの間に速度差が生じ, 言わばダストはガスから「向かい風」を受けて減速され動径方向に移動することになる.

ここで乱流粘性の効果を表すパラメータとして

$$\epsilon_{\text{vis}} \equiv -\frac{1}{\eta v_K} \frac{f_{\text{vis},\varphi}}{\Omega_K} \quad (3.34)$$

を導入すると, 式 (3.30) と式 (3.32) を代入し合うことで

$$\begin{cases} v_r - V_r = -\frac{(1+c_p) - \epsilon_{\text{vis}}\tau_s}{\tau_s + (1+c_p)^2\tau_s^{-1}} 2\eta v_K \\ v'_\varphi - V'_\varphi = \frac{\tau_s + (1+c_p)\epsilon_{\text{vis}}}{\tau_s + (1+c_p)^2\tau_s^{-1}} \eta v_K \end{cases} \quad (3.35)$$

$$\quad (3.36)$$

となって, さらにそれぞれ式 (3.31),(3.33) を用いることで, 結局, ガスとダストの終端速度の各成分は

$$\begin{cases} V_r = \frac{c_p - [\tau_s + (1+c_p)\tau_s^{-1}]\epsilon_{\text{vis}}}{\tau_s + (1+c_p)^2\tau_s^{-1}} 2\eta v_K \\ V'_\varphi = -\frac{[\tau_s + (1+c_p)\tau_s^{-1}] + c_p\epsilon_{\text{vis}}}{\tau_s + (1+c_p)^2\tau_s^{-1}} \eta v_K \\ V_z = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\begin{cases} v_r = -\frac{1 + (1+c_p)\epsilon_{\text{vis}}\tau_s^{-1}}{\tau_s + (1+c_p)^2\tau_s^{-1}} 2\eta v_K \\ v'_\varphi = -\frac{(1+c_p)\tau_s^{-1} - \epsilon_{\text{vis}}}{\tau_s + (1+c_p)^2\tau_s^{-1}} \eta v_K \\ v_z = -\Omega_K \tau_s z \end{cases} \quad (3.38)$$

と求められる.

粘性項が式 (3.37),(3.38) において果たす効果について評価しておこう. α モデルの乱流粘性 (2.6) を用いると動粘性係数は $\nu = \alpha c_{s,g}^2 / \Omega_K$ と表されるので, 式 (3.14) より

$$\begin{aligned} f_{\text{vis},\varphi} &= \frac{1}{\rho_g} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{3}{2} r^2 \rho_g \nu \Omega_K \right) = -\frac{3}{2} \frac{\nu \Omega_K}{r} \frac{r}{\rho_g \nu r^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_g \nu r^{1/2}) \\ &= -\frac{3}{2} \frac{\nu \Omega_K}{r} \frac{\partial \ln(\rho_g \nu r^{1/2})}{\partial \ln r} \end{aligned} \quad (3.39)$$

となって, ϵ_{vis} は

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{vis}} &= \frac{3}{2} \frac{\nu}{r} \frac{1}{\eta v_K} \frac{\partial \ln(\rho_g \nu r^{1/2})}{\partial \ln r} = 3\alpha \frac{c_{s,g}^2}{2v_K} \frac{1}{\eta v_K} \frac{\partial \ln(\rho_g \nu r^{1/2})}{\partial \ln r} \\ &= -3\alpha \underbrace{\left[\frac{\partial \ln P_g}{\partial \ln r} \right]^{-1}}_{-O(1)} \underbrace{\left[\frac{\partial \ln(\rho_g \nu r^{1/2})}{\partial \ln r} \right]}_{O(1)} \sim \alpha \end{aligned} \quad (3.40)$$

と書ける. これより ϵ_{vis} は α パラメータほどの値しか持たないため, 乱流粘性の効果は小さいことがわかる (粒径が小さい $\tau_s < \epsilon_{\text{vis}}$ の場合は, そもそも分母の τ_s^{-1} が効いてドリフト速度は十分小さい).

以上より $\rho_p/\rho_g \ll 1$ および $\epsilon_{\text{vis}} \ll 1$ を用いて式 (3.37), (3.38) は近似的に

$$\begin{cases} V_r \simeq \frac{\rho_p}{\rho_g} \frac{2\eta v_K}{\tau_s + \tau_s^{-1}} - \frac{3\nu}{r} \frac{\partial \ln(\rho_g \nu r^{1/2})}{\partial \ln r} \\ V'_\varphi \simeq -\eta v_K \\ V_z = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} v_r \simeq -\frac{2\eta v_K}{\tau_s + \tau_s^{-1}} \\ v'_\varphi \simeq -\frac{\eta v_K}{1 + \tau_s^2} \\ v_z = -\Omega_K \tau_s z \end{cases} \quad (3.42)$$

と表すことができる。ケプラー速度よりも ηv_K だけ遅く回転するガスに引きずられることで、ダストの公転速度は遅くなり、乱流がない場合であってもダストは r 方向にドリフトすることがわかる。ダストが小さく $\tau_s \ll 1$ の場合、ガス抵抗によりダストはガスと同じ速度で回転させられ、角運動量を失って r 方向に落下しようとするが、その落下もまたガス抵抗で妨げられるため、結局、ゆっくりとしかダストはドリフトすることが出来ない。これに対して、ダストが大きくなって $\tau_s > 1$ が成り立つようになると、ガス抵抗は効きにくくなり、よりケプラー回転に近い速度で回転することになってドリフト速度は小さくなる。ドリフトが最も速くなるのは、制動時間がちょうど $\tau_s = 1$ のときである⁷。具体的にエプスタイン則 (3.8) を用い制動時間を円盤赤道面で評価した場合、粒径 R が

$$R_1 \equiv \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{H_g \rho_{g,c}}{\rho_s}} \simeq 2.1 \times 10^2 \left(\frac{r}{3\text{AU}} \right)^{-3/2} [\text{cm}] \quad (3.44)$$

のときにダストのドリフト速度はピーク ($v_r = -\eta v_K$) を迎えることになる。 $\eta v_K \sim 0.01$ [AU/year] であるからメートルサイズのダストは 100 年ほどで中心星に落ちてしまう見積もりである。

z 方向に関しては、 $\tau_s \ll 1$ の場合、ダストの振動運動は過減衰となって終端速度 $v_z = -\Omega_K \tau_s z$ で赤道面へと沈殿していく。しかしこの沈殿速度は、乱流の典型的な速度 $\alpha c_{s,g}$ に対して

$$\frac{v_z}{\alpha c_{s,g}} = \frac{\tau_s}{\alpha} \frac{z}{H_g} \quad (3.45)$$

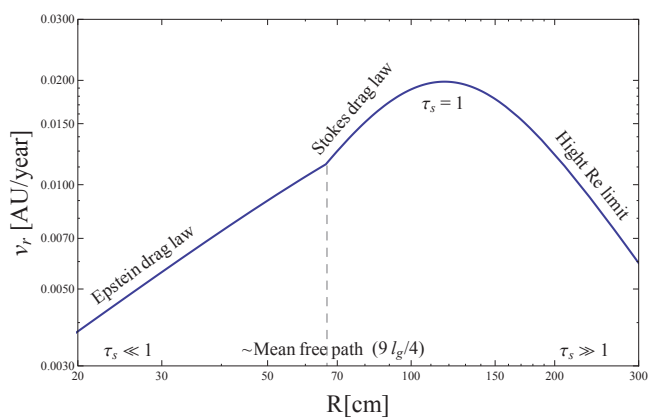


図 3.1: r 方向のドリフト速度 ($r = 3\text{AU}$)

⁷ドリフト速度 v_r が最大になるのは

$$\frac{\partial v_r}{\partial \tau_s} = 2\eta v_K \frac{1 - \tau_s^2}{(1 + \tau_s^2)^2} = 0 \quad (3.43)$$

より $\tau_s = 1$ であることがわかる。

であるため, ダストサイズ自体が大きくなるか乱流が衰えて $\tau_s > \alpha$ とならない限り, ガスのスケールハイト H_g より下にはほとんど沈殿できない. $\alpha = 0.01$ とするならば, cm サイズに満たないダストの z 方向の沈殿は起こりにくいということになる.

乱流がなくともダストは r 方向に落下できるのに対して, ガスは $\nu = 0$ の場合ダストのドリフトの反作用を受けて外側に向かって移動する. 乱流がある場合は, その外向きの速度と内向きの降着速度の和でガスの運動は決まることになる (式 (3.41) の第 1 式).

3.3 拡散

原始惑星系円盤におけるダスト粒子の拡散現象について考える. ここで言うダスト粒子の拡散運動とはガスの乱流に起因するものである. 前章で見たように, ガスとダストは抵抗によって相互作用し合っているため, 乱流下にあるガス分子から抵抗則を通じて揺動力 (random force) がダスト粒子に伝わって拡散が起こるというわけである. しかし, ダストサイズが大きくなるにつれてガス抵抗は効きにくくなる. すなわち, ダストの成長に伴ってガスとダストのカップリングが小さくなってダスト粒子の拡散は次第に落ちていく. 以下ではこのことを, 周期的な軌道振動 (エピサイクリック振動および鉛直振動) をしているダスト粒子に確率的な力が加わるものとして, ランジュバン方程式 (Langevin equation) をフーリエ解析する方法で論じていく [10]. ただし, 円盤の動径 r および角度 φ 方向の運動と円盤鉛直 z 方向の運動は独立して起こるものとして面内 (r, φ 方向) と面外 (z 方向) でそれぞれ別々にダスト粒子の拡散を議論することにする (軸対称とするので, 結局, 拡散自体はそれぞれ動径 r 方向と鉛直 z 方向の 1 次元的な運動と見なし扱うことができる).

3.3.1 コルモゴロフ乱流

ここでは円盤内に存在する乱流をコルモゴロフ乱流 (Kolmogorov turbulent) に対応するものと解釈する. コルモゴロフ理論における渦の特性時間 (乱流変動の相関時間) を t_{eddy} とすると (形式的には式 (3.55) で定義される)⁸, 乱流中のガスの速度 u_g の時間相関関数 $E_g(t) \equiv \langle u_g(t)u_g(0) \rangle$ は

$$E_g(t) = E_g(0)e^{-|t|/t_{\text{eddy}}} = \langle u_g^2 \rangle e^{-|t|/t_{\text{eddy}}} \quad (3.46)$$

のように時定数 t_{eddy} で相関が指数減衰する形として書くことが出来る. ただし, 揺らぎは定常であるとして $\langle u_g(t+t_0)u_g(t_0) \rangle$ は t_0 に依らないものとし, $E_g(0) = \langle u_g^2 \rangle$ は乱流ガスの速度の 2 乗平均を表している⁹. パワースペクトル $\hat{E}_g(\omega)$ は, ウィーナー・ヒンチンの定理より時間相関関数のフーリエ変換¹⁰ として書けるので

⁸ リチャードソンの描像では, カスケード (cascade) 過程は大きな渦から小さい渦への連続する崩壊として説明され, 各崩壊の特徴的時間は「eddy turnover time」と呼ばれる. 一方でコルモゴロフ描像では, ある大きさの渦のエネルギーがなくなる時間 (渦の寿命) あるいは渦の変形時間として特性時間を考える. コルモゴロフ理論に基づく特性時間 t_{eddy} はリチャードソン描像における eddy turnover time と理解することができる.

⁹ 本稿では $\langle X \rangle$ は X のアンサンブル平均, $\bar{X}$ は X の時間平均を表すものとしている.

¹⁰ 本稿ではフーリエ変換およびフーリエ逆変換を, それぞれ次のように定義して用いている.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned}
\hat{E}_g(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E_g(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \langle u_g^2 \rangle \int_0^{\infty} 2e^{-t/t_{\text{eddy}}} \cos \omega t dt \\
&= \langle u_g^2 \rangle \frac{2t_{\text{eddy}}}{1 + \omega^2 t_{\text{eddy}}^2} = \langle u_g^2 \rangle \hat{P}(\omega)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

となって、ローレンツ型のパワースペクトルであることがわかる．ここで $\hat{P}(\omega) \equiv 2t_{\text{eddy}}/(1 + \omega^2 t_{\text{eddy}}^2)$ である．ガス要素の位置は $x_g(t) = x(0) + \int_0^t u_g(\tau) d\tau$ と書けるので、ガスに関する拡散係数は

$$D_g \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle |x_g(t)|^2 \rangle}{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \left[\langle |x_g(0)|^2 \rangle + 2 \int_0^t \langle x(0) u_g(\tau) \rangle d\tau + \langle \left| \int_0^t u_g(\tau) d\tau \right|^2 \rangle \right] \tag{3.49}$$

となる．第2項の $\langle x_g(0) u_g(\tau) \rangle$ については、初期位置とそれ以降の時刻 $\tau > 0$ における速度揺らぎに相関がないものとして0とできる．一方、第3項の $\langle \left| \int_0^t u_g(\tau) d\tau \right|^2 \rangle$ に関しては

$$\begin{aligned}
\langle \left| \int_0^t u_g(\tau) d\tau \right|^2 \rangle &= \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 \langle u_g(\tau_1) u_g(\tau_2) \rangle \\
&= \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 E_g(\tau_1 - \tau_2) + \underbrace{\int_0^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau_2 E_g(-(\tau_1 - \tau_2))}_{\text{(脚注 11)}} \\
&= 2 \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 E_g(\tau_1 - \tau_2)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

のように計算することができる．ここで $\tau' \equiv \tau_1 - \tau_2$ と変数変換することで

$$\langle \left| \int_0^t u_g(\tau) d\tau \right|^2 \rangle = 2 \underbrace{\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau' E_g(\tau')}_{\text{(脚注 12)}} = 2 \int_0^t d\tau' \int_{\tau'}^t d\tau_1 E_g(\tau') = 2 \int_0^t d\tau' (t - \tau') E_g(\tau') \tag{3.52}$$

を得る．これを式 (3.49) に代入すると

$$D_g = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \left[\langle |x_g(0)|^2 \rangle + 2 \int_0^t d\tau' (t - \tau') E_g(\tau') \right] = \int_0^{\infty} E_g(\tau') d\tau' \tag{3.54}$$

となって、さらにフーリエ逆変換 $E_g(\tau') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{E}_g(\omega) e^{i\omega\tau'}$ を代入することで

$$\begin{aligned}
D_g &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{E}_g(\omega) e^{i\omega\tau'} \\
&= \frac{1}{2} \hat{E}_g(0) = \langle u_g^2 \rangle t_{\text{eddy}}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

¹¹ 積分の順序を交換すると

$$\int_0^t \tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau_2 E_g(-(\tau_1 - \tau_2)) = \int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 E_g(-(\tau_1 - \tau_2)) \tag{3.51}$$

とできて (図 3.2), 文字 τ_1 と τ_2 を入れ替えると $\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 E_g(\tau_1 - \tau_2)$ を得る．

¹² 同じく積分順序の交換より

$$\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau' E_g(\tau') = \int_0^t d\tau' \int_{\tau'}^t d\tau_1 E_g(\tau') \tag{3.53}$$

となる (図 3.3).

が導かれる. ただし, ここでデルタ関数のフーリエ表現 $\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau'} d\tau'$ を用いた (もちろん式 (3.54) に直接 式 (3.46) を代入することでも同じ結果が得られる). 関係式 (3.55) は, 乱流のカスケード過程において注入されるエネルギーと散逸して失われるエネルギーのバランスを表す形になっている (付録 E の式 (E.11) で $\langle u_g^2 \rangle \rightarrow k_B T / m_p$, $\gamma_p \rightarrow 1/t_{\text{eddy}}$ としたものと対応している).

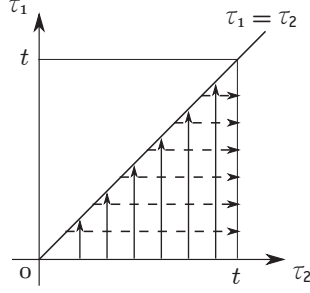


図 3.2: 積分順序の交換 [式 (3.51)]

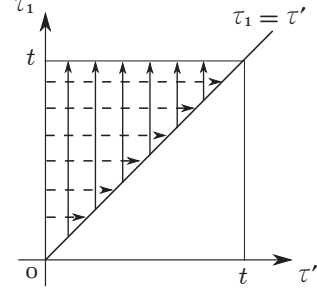


図 3.3: 積分順序の交換 [式 (3.53)]

3.3.2 動径方向拡散

エピサイクリック振動するダスト粒子に乱流による揺動力が加わることを考える. ここでは, 原点 O が回転角速度 Ω_K でケプラー円運動するようなデカルト座標系すなわち Hill 座標系 (付録 D) を用いてダスト粒子の運動を記述する. ただし, z 方向の運動は分離して考えるため, ここでは原点 O に対するダストの位置を (x_p, y_p) と表すような 2 次元 Hill 座標を張ることにする. x_p, y_p はそれぞれ, 原点 O から測ったダスト粒子の位置の動径方向成分と角度方向成分である. この座標系ではケプラー回転するダスト粒子の運動は, x, y 方向に振動数 Ω_K で振動し, y 方向に関してはその振動に加えて速度 $v_{\text{shear}} = -(3/2)\Omega_K x_p$ で角度方向に少しずつずれていくシア運動をしているように見える. 振動成分に着目するため, ダスト粒子の速度は

$$\begin{cases} u_p = \dot{x}_p \\ v_p = \dot{y}_p + \frac{3}{2}\Omega_K x_p \end{cases} \quad (3.56)$$

のように角度方向に関してはシア速度 v_{shear} に対して測ったものとして定義する. このとき, ガス要素からもたらされる揺動力を加えた運動方程式は

$$\begin{cases} \dot{u}_p = 2\Omega_K v_p - \frac{u_p - u_g}{t_{\text{stop}}} \\ \dot{v}_p = -\frac{\Omega_K u_p}{2} - \frac{v_p - v_g}{t_{\text{stop}}} \end{cases} \quad (3.57)$$

のように書くことが出来る (式 (D.3), (D.4) 参照). それぞれフーリエ逆変換の式を代入し, まとめると

$$\begin{cases} \hat{u}_p = \frac{(1 + i\nu_s)\hat{u}_g + 2\tau_s\hat{v}_g}{\tau_s^2 + (1 + i\nu_s)^2} \\ \hat{v}_p = \frac{-(\tau_s/2)\hat{u}_g + (1 + i\nu_s)\hat{v}_g}{\tau_s^2 + (1 + i\nu_s)^2} \end{cases} \quad (3.58)$$

となる. ここで $\tau_s \equiv \Omega_K t_{\text{stop}}$, $\nu_s \equiv \omega t_{\text{stop}}$ を導入した. これより $|\hat{u}_p|^2$, $|\hat{v}_p|^2$, $(\hat{u}_p \hat{v}_p^* + \hat{u}_p^* \hat{v}_p)/2$ を計算すると

$$\left\{ \begin{aligned} |\hat{u}_p|^2 &= \frac{1}{k(\nu_s)} \left[(1 + \nu_s^2) |\hat{u}_g|^2 + 4\tau_s^2 |\hat{v}_g|^2 + 4\tau_s \frac{\hat{u}_g \hat{v}_g^* + \hat{u}_g^* \hat{v}_g}{2} + 4\tau_s \frac{i \nu_s (\hat{u}_g \hat{v}_g^* - \hat{u}_g^* \hat{v}_g)}{2} \right] \end{aligned} \right. \quad (3.59)$$

$$\left\{ \begin{aligned} |\hat{v}_p|^2 &= \frac{1}{k(\nu_s)} \left[\frac{\tau_s^2}{4} |\hat{u}_g|^2 + (1 + \nu_s^2) |\hat{v}_g|^2 - \tau_s \frac{\hat{u}_g \hat{v}_g^* + \hat{u}_g^* \hat{v}_g}{2} + \tau_s \frac{i \nu_s (\hat{u}_g \hat{v}_g^* - \hat{u}_g^* \hat{v}_g)}{2} \right] \end{aligned} \right. \quad (3.60)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\hat{u}_p \hat{v}_p^* + \hat{u}_p^* \hat{v}_p}{2} &= \frac{1}{k(\nu_s)} \left[-\frac{\tau_s}{2} |\hat{u}_g|^2 + 2\tau_s |\hat{v}_g|^2 + (1 - \tau_s^2 + \nu_s^2) \frac{\hat{u}_g \hat{v}_g^* + \hat{u}_g^* \hat{v}_g}{2} \right] \end{aligned} \right. \quad (3.61)$$

を得る. ただし

$$k(\nu_s) \equiv (1 + \tau_s^2 + \nu_s^2)^2 - 4\tau_s^2 \nu_s^2 \quad (3.62)$$

と定義した. 以下, ガスの速度相関関数を

$$E_g^{(x)}(t) \equiv \langle u_g(t) u_g(0) \rangle, \quad E_g^{(y)}(t) \equiv \langle v_g(t) v_g(0) \rangle, \quad E_g^{(xy)}(t) \equiv \langle u_g(t) v_g(0) \rangle \quad (3.63)$$

とし, ダスト粒子の速度相関関数についても同様に定義する.

次に, ダスト粒子に関して

$$\hat{E}_p^{(x)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle |\hat{u}_p|^2 \rangle}{T}, \quad \hat{E}_p^{(y)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle |\hat{v}_p|^2 \rangle}{T}, \quad \hat{E}_p^{(xy)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle \hat{u}_p \hat{v}_p^* + \hat{u}_p^* \hat{v}_p \rangle}{2T} \quad (3.64)$$

を求めることを考える. 式 (3.59), (3.60), (3.61) のそれぞれの第3項 $(\hat{u}_g \hat{v}_g^* + \hat{u}_g^* \hat{v}_g)/2$ は

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_g \hat{v}_g^* + \hat{u}_g^* \hat{v}_g}{2} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 u_g(t_1) v_g(t_2) \left[e^{i\omega(t_1-t_2)} + e^{-i\omega(t_1-t_2)} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 u_g(t_1) v_g(t_2) \cdot \cos[\omega(t_1 - t_2)] \end{aligned} \quad (3.65)$$

であり, この両辺の平均を取ると

$$\frac{\langle \hat{u}_g \hat{v}_g^* + \hat{u}_g^* \hat{v}_g \rangle}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 E_g^{(xy)}(t_1 - t_2) \cdot \cos[\omega(t_1 - t_2)] \quad (3.66)$$

と表すことが出来る一方で, 式 (3.59), (3.60) に現れる $i \nu_s (\hat{u}_g \hat{v}_g^* - \hat{u}_g^* \hat{v}_g)/2$ については

$$\begin{aligned} \frac{i \nu_s (\hat{u}_g \hat{v}_g^* - \hat{u}_g^* \hat{v}_g)}{2} &= \frac{i \nu_s}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 u_g(t_1) v_g(t_2) \left[e^{-i\omega(t_1-t_2)} - e^{i\omega(t_1-t_2)} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 u_g(t_1) v_g(t_2) \cdot \nu_s \sin[\omega(t_1 - t_2)] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \int_{-T/2}^{T/2} dt_2 u_g(t_1) v_g(t_2) \cdot \nu_s \sin[\omega(t_1 - t_2)] \end{aligned} \quad (3.67)$$

より その平均は

$$\begin{aligned} \frac{i \nu_s \langle \hat{u}_g \hat{v}_g^* - \hat{u}_g^* \hat{v}_g \rangle}{2} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \int_{-T/2}^{T/2} dt_2 \langle u_g(t_1) v_g(t_2) \rangle \cdot \nu_s \sin[\omega(t_1 - t_2)] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \int_{-T/2}^{T/2} dt_2 E_g^{(xy)}(t_1 - t_2) \cdot \nu_s \sin[\omega(t_1 - t_2)] \end{aligned} \quad (3.68)$$

となる. これは $\tau \equiv t_1 - t_2$ と変数変換すれば

$$\frac{i\nu_s \langle \hat{u}_g \hat{v}_g^* - \hat{u}_g^* \hat{v}_g \rangle}{2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \underbrace{\int_{t_1-T/2}^{t_1+T/2} d\tau E_g^{(xy)}(\tau) \cdot \nu_s \sin \omega \tau}_{\equiv F(t_1)} \quad (3.69)$$

とできるが, $F(t_1) \equiv \int_{t_1-T/2}^{t_1+T/2} d\tau E_g^{(xy)}(\tau) \cdot \nu_s \sin \omega \tau$ の被積分関数は奇関数なので

$$\begin{aligned} F(t_1) + F(-t_1) &= \left[\int_{t_1-T/2}^0 d\tau + \int_0^{t_1+T/2} d\tau + \int_{-t_1-T/2}^0 d\tau + \int_0^{-t_1+T/2} d\tau \right] E_g^{(xy)}(\tau) \cdot \nu_s \sin \omega \tau \\ &= \left[\int_{t_1-T/2}^{-(t_1-T/2)} d\tau + \int_{-(t_1+T/2)}^{t_1+T/2} d\tau \right] E_g^{(xy)}(\tau) \cdot \nu_s \sin \omega \tau = 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

すなわち, $F(t_1) = -F(-t_1)$ のように $F(t_1)$ 自身も奇関数であり, 結局

$$\frac{i\nu_s \langle \hat{u}_g \hat{v}_g^* - \hat{u}_g^* \hat{v}_g \rangle}{2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 F(t_1) = 0 \quad (3.71)$$

となることがわかる. 以上のことから, $\hat{E}_p^{(x)}, \hat{E}_p^{(y)}, \hat{E}_p^{(xy)}$ はそれぞれ式 (3.59), (3.60), (3.61) より

$$\begin{cases} \hat{E}_p^{(x)} = \frac{1}{k(\nu_s)} \left[(1 + \nu_s^2) \hat{E}_g^{(x)} + 4\tau_s^2 \hat{E}_g^{(y)} + 4\tau_s \hat{E}_g^{(xy)} \right] \\ \hat{E}_p^{(y)} = \frac{1}{k(\nu_s)} \left[\frac{\tau_s^2}{4} \hat{E}_g^{(x)} + (1 + \nu_s^2) \hat{E}_g^{(y)} - \tau_s \hat{E}_g^{(xy)} \right] \\ \hat{E}_p^{(xy)} = \frac{1}{k(\nu_s)} \left[-\frac{\tau_s}{2} \hat{E}_g^{(x)} + 2\tau_s \hat{E}_g^{(y)} + (1 - \tau_s^2 + \nu_s^2) \hat{E}_g^{(xy)} \right] \end{cases} \quad (3.72)$$

と表される. さらにコルモゴロフ乱流を仮定し, 式 (3.48) を代入することで

$$\begin{cases} \hat{E}_p^{(x)} = \frac{1}{k(\nu_s)} \left[(1 + \nu_s^2) \langle u_g^2 \rangle + 4\tau_s^2 \langle v_g^2 \rangle + 4\tau_s \langle u_g v_g \rangle \right] \hat{P}(\nu_s) \end{cases} \quad (3.73)$$

$$\begin{cases} \hat{E}_p^{(y)} = \frac{1}{k(\nu_s)} \left[\frac{\tau_s^2}{4} \langle u_g^2 \rangle + (1 + \nu_s^2) \langle v_g^2 \rangle - \tau_s \langle u_g v_g \rangle \right] \hat{P}(\nu_s) \end{cases} \quad (3.74)$$

$$\begin{cases} \hat{E}_p^{(xy)} = \frac{1}{k(\nu_s)} \left[-\frac{\tau_s}{2} \langle u_g^2 \rangle + 2\tau_s \langle v_g^2 \rangle + (1 - \tau_s^2 + \nu_s^2) \langle u_g v_g \rangle \right] \hat{P}(\nu_s) \end{cases} \quad (3.75)$$

が得られる. ただし $St \equiv t_{\text{stop}}/t_{\text{eddy}}$ (Stokes number) であり

$$\hat{P}(\nu_s) \equiv \frac{2t_{\text{eddy}} St^2}{St^2 + \nu_s^2} \quad (3.76)$$

とした. 以上の式 (3.73), (3.74), (3.75) を振動数 $\omega = \nu_s/t_{\text{stop}}$ で積分することで, それぞれ $\langle u_p^2 \rangle$, $\langle v_p^2 \rangle$, $\langle u_p v_p \rangle$ が求められる. 今回の場合は, 基本的には全て留数定理を用いて積分は計算できる.

以下, その計算を行う. $k(\nu_s) = (\nu_s^2 - 2\tau_s \nu_s + 1 + \tau_s^2)(\nu_s^2 + 2\tau_s \nu_s + 1 + \tau_s^2)$ より $1/k(\nu_s)$ の「極 (Pole)」は

$$\begin{cases} \nu_1 = \tau_s + i & , & \nu_2 = \tau_s - i \\ \nu_3 = -\tau_s + i & , & \nu_4 = -\tau_s - i \end{cases} \quad (3.77)$$

であり,

一方 $\hat{P}(\nu_s)$ の極は

$$\begin{cases} \nu_5 = i St \\ \nu_6 = -i St \end{cases} \quad (3.78)$$

となる. これより, 以上の計 6 つの極の中で $\text{Im}[\nu_s] > 0$ のものに関しては ν_1, ν_3, ν_5 の 3 つであることがわかる. 積分路を複素平面の上半面に取れば, この 3 つの極に対する留数計算は次のように行うことができる.

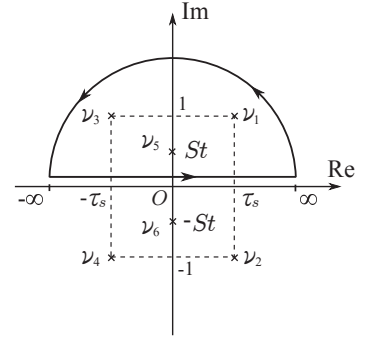


図 3.4: 積分路

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{P}(\nu_s)}{k(\nu_s)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{t_{\text{stop}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{P}(\nu_s)}{k(\nu_s)} d\nu_s \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{t_{\text{stop}}} \cdot 2\pi i \left[\text{Res}_{\nu_s=\nu_1} + \text{Res}_{\nu_s=\nu_3} + \text{Res}_{\nu_s=\nu_5} \right] \frac{\hat{P}(\nu_s)}{k(\nu_s)} \\ &= \frac{i}{t_{\text{stop}}} \left[\frac{1}{(\nu_1 - \nu_2)(\nu_1 - \nu_3)(\nu_1 - \nu_4)} \hat{P}(\nu_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\nu_3 - \nu_1)(\nu_3 - \nu_2)(\nu_3 - \nu_4)} \hat{P}(\nu_3) + \frac{1}{k(\nu_5)} \frac{2 t_{\text{eddy}} St^2}{\nu_5 - \nu_6} \right] \\ &= \frac{1}{K} \cdot \frac{2 + St}{2} \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{P}(\nu_s)}{k(\nu_s)} (1 + \nu_s^2) d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{t_{\text{stop}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{P}(\nu_s)}{k(\nu_s)} (1 + \nu_s^2) d\nu_s \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{t_{\text{stop}}} \cdot 2\pi i \left[\text{Res}_{\nu_s=\nu_1} + \text{Res}_{\nu_s=\nu_3} + \text{Res}_{\nu_s=\nu_5} \right] \frac{\hat{P}(\nu_s)}{k(\nu_s)} (1 + \nu_s^2) \\ &= \frac{i}{t_{\text{stop}}} \left[\frac{1 + \nu_1^2}{(\nu_1 - \nu_2)(\nu_1 - \nu_3)(\nu_1 - \nu_4)} \hat{P}(\nu_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + \nu_3^2}{(\nu_3 - \nu_1)(\nu_3 - \nu_2)(\nu_3 - \nu_4)} \hat{P}(\nu_3) + \frac{1 + \nu_5^2}{k(\nu_5)} \frac{2 t_{\text{eddy}} St^2}{\nu_5 - \nu_6} \right] \\ &= \frac{1}{K} \left[1 + St \left(1 + \frac{\tau_s^2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} I_3 &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{P}(\nu_s)}{k(\nu_s)} (1 - \tau_s^2 + \nu_s^2) d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{t_{\text{stop}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{P}(\nu_s)}{k(\nu_s)} (1 - \tau_s^2 + \nu_s^2) d\nu_s \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{t_{\text{stop}}} \cdot 2\pi i \left[\text{Res}_{\nu_s=\nu_1} + \text{Res}_{\nu_s=\nu_3} + \text{Res}_{\nu_s=\nu_5} \right] \frac{\hat{P}(\nu_s)}{k(\nu_s)} (1 - \tau_s^2 + \nu_s^2) \\ &= \frac{i}{t_{\text{stop}}} \left[\frac{1 - \tau_s^2 + \nu_1^2}{(\nu_1 - \nu_2)(\nu_1 - \nu_3)(\nu_1 - \nu_4)} \hat{P}(\nu_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \tau_s^2 + \nu_3^2}{(\nu_3 - \nu_1)(\nu_3 - \nu_2)(\nu_3 - \nu_4)} \hat{P}(\nu_3) + \frac{1 - \tau_s^2 + \nu_5^2}{k(\nu_5)} \frac{2 t_{\text{eddy}} St^2}{\nu_5 - \nu_6} \right] \\ &= \frac{1}{K} (1 + St - \tau_s^2) \end{aligned} \quad (3.81)$$

ただしここで,

$$K \equiv (1 + \tau_s^2)[(1 + St)^2 + \tau_s^2] \quad (3.82)$$

である.

以上より $\langle u_p^2 \rangle, \langle v_p^2 \rangle, \langle u_p v_p \rangle$ を計算することが出来て

$$\left\{ \begin{aligned} \langle u_p^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_p^{(x)} d\omega = I_2 \langle u_g^2 \rangle + 4\tau_s^2 I_1 \langle v_g^2 \rangle + 4\tau_s I_1 \langle u_g v_g \rangle \\ &= \frac{1}{K} \left\{ \left[1 + St \left(1 + \frac{\tau_s^2}{2} \right) \right] \langle u_g^2 \rangle + 2\tau_s^2 (2 + St) \langle v_g^2 \rangle + 2\tau_s (2 + St) \langle u_g v_g \rangle \right\} \end{aligned} \right. \quad (3.83)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \langle v_p^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_p^{(y)} d\omega = \frac{\tau_s^2}{4} I_1 \langle u_g^2 \rangle + I_2 \langle v_g^2 \rangle - \tau_s I_1 \langle u_g v_g \rangle \\ &= \frac{1}{K} \left\{ \frac{\tau_s^2 (2 + St)}{8} \langle u_g^2 \rangle + \left[1 + St \left(1 + \frac{\tau_s^2}{2} \right) \right] \langle v_g^2 \rangle - \frac{\tau_s (2 + St)}{2} \langle u_g v_g \rangle \right\} \end{aligned} \right. \quad (3.84)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \langle u_p v_p \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_p^{(xy)} d\omega = -\frac{\tau_s}{2} I_1 \langle u_g^2 \rangle + 2\tau_s I_1 \langle v_g^2 \rangle + I_3 \langle u_g v_g \rangle \\ &= \frac{1}{K} \left\{ -\frac{\tau_s (2 + St)}{4} \langle u_g^2 \rangle + \tau_s (2 + St) \langle v_g^2 \rangle + (1 + St - \tau_s^2) \langle u_g v_g \rangle \right\} \end{aligned} \right. \quad (3.85)$$

となる. これで u_p, v_p の 2 乗平均および相関が求められた. 拡散係数については式 (3.55) と同様に計算することが出来て, 特に動径方向の拡散係数は式 (3.73) より

$$D_p^{(x)} = \frac{1}{2} \hat{E}_p(0) = t_{\text{eddy}} \frac{\langle u_g^2 \rangle + 4\tau_s^2 \langle v_g^2 \rangle + 4\tau_s \langle u_g v_g \rangle}{(1 + \tau_s^2)^2} \quad (3.86)$$

と求められる. この式 (3.83), (3.84), (3.85), (3.86) の性質について, $\tau_s \ll 1$ および $\tau_s \gg 1$ という 2 つの極限をとることによって調べてみることにする. まず $\tau_s \ll 1$, すなわち, ガスとダストのカップリングが強い極限をとると, このとき

$$\frac{\langle u_p^2 \rangle}{\langle u_g^2 \rangle} = \frac{\langle v_p^2 \rangle}{\langle v_g^2 \rangle} = \frac{\langle u_p v_p \rangle}{\langle u_g v_g \rangle} = \frac{1}{1 + St} \quad (3.87)$$

$$D_p^{(x)} = \langle u_p^2 \rangle t_{\text{eddy}} \quad (3.88)$$

となって, orbital effect の無い極限と一致することがわかる¹³. これはガスとのカップリングが強すぎてダスト粒子のエピサイクリック運動が効かないことを示している.

¹³ エピサイクリック振動, あるいは, 揺動力以外の外力がない場合について考える. この場合も同様の手続きでダスト粒子の速度の 2 乗平均を求めることが出来る. 乱流下にあるダスト粒子に成り立つ運動方程式

$$\dot{u}_p = -\frac{u_p}{t_{\text{stop}}} + \frac{u_g}{t_{\text{stop}}} \quad (3.89)$$

にフーリエ変換の式を代入すると

$$|\hat{u}_p|^2 = \frac{|\hat{u}_g|^2}{1 + \nu_s^2} \quad (3.90)$$

が得られる ($\nu_s \equiv \omega t_{\text{stop}}$). これよりパワースペクトルは $\hat{E}_p(\omega) = \hat{E}_g(\omega)/(1 + \omega^2 t_{\text{stop}}^2)$ であり

$$\langle u_p^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_p(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\langle u_g^2 \rangle}{t_{\text{stop}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{P}(\nu_s)}{1 + \nu_s^2} d\nu_s \quad (3.91)$$

よりこれを計算すると

$$\frac{\langle u_p^2 \rangle}{\langle u_g^2 \rangle} = \frac{1}{1 + St} \quad (3.92)$$

が導かれる. また拡散係数については

$$D_p = \frac{1}{2} \hat{E}_p(0) = \langle u_g^2 \rangle t_{\text{eddy}} \quad (3.93)$$

と求められ, ガスの拡散係数と一致する結果になっていることがわかる.

一方で $St \gg \tau_s \gg 1 \gg \Omega_K t_{\text{eddy}}$ の極限に関しては

$$\left\{ \begin{aligned} \langle u_p^2 \rangle &= \frac{[1 + (\tau_s^2/2)]\langle u_g^2 \rangle + 2\tau_s^2\langle v_g^2 \rangle + 2\tau_s\langle u_g v_g \rangle}{St(1 + \tau_s^2)} \end{aligned} \right. \quad (3.94)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \langle v_p^2 \rangle &= \frac{(\tau_s^2/8)\langle u_g^2 \rangle + [1 + (\tau_s^2/2)]\langle v_g^2 \rangle - (\tau_s/2)\langle u_g v_g \rangle}{St(1 + \tau_s^2)} \end{aligned} \right. \quad (3.95)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \langle u_p v_p \rangle &= \frac{(-\tau_s/4)\langle u_g^2 \rangle + \tau_s\langle v_g^2 \rangle + \langle u_g v_g \rangle}{St(1 + \tau_s^2)} \end{aligned} \right. \quad (3.96)$$

および

$$D_p^{(x)} = \frac{4t_{\text{eddy}}}{\tau_s^2} \langle v_g^2 \rangle \quad (3.97)$$

となる．特に拡散係数については、 $\tau_s \ll 1$ の極限が式 (3.88) のように角度方向の速度揺らぎが効いていなかったのに対して、極限 $\tau_s \gg 1$ の式 (3.97) では $\langle v_g^2 \rangle$ の項が動径拡散について支配的であることがわかる．動径拡散は、一つ一つの粒子の軌道運動を見た場合 その軌道長半径の変化に他ならないので、これはつまりダスト粒子の動径拡散には角運動量の揺らぎが必要となることを意味している． $\tau_s \ll 1$ の場合はガスと強くカップリングしているために、回転角方向に擾乱を受けてもダスト粒子はすぐに局所的な軌道速度に戻されてしまって結局 拡散は効かなかったというわけである．ここで、あらためて乱流が一様等方であると仮定して、 $\langle u_g^2 \rangle = \langle v_g^2 \rangle$ および $\langle u_g v_g \rangle = 0$ を式 (3.94),(3.95),(3.96) に代入すると

$$\left\{ \begin{aligned} \langle u_p^2 \rangle &= \frac{\langle u_g^2 \rangle}{St} \frac{1 + (5/2)\tau_s^2}{1 + \tau_s^2} \end{aligned} \right. \quad (3.98)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \langle v_p^2 \rangle &= \frac{\langle u_g^2 \rangle}{St} \frac{1 + (5/8)\tau_s^2}{1 + \tau_s^2} \end{aligned} \right. \quad (3.99)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \langle u_p v_p \rangle &= \frac{\langle u_g^2 \rangle}{St} \frac{(3/4)\tau_s^2}{1 + \tau_s^2} \end{aligned} \right. \quad (3.100)$$

となる． $\tau_s \gg 1$ の場合について考えると、式 (3.98),(3.99) は

$$\left\{ \begin{aligned} \langle u_p^2 \rangle &= \frac{5}{2} \frac{\langle u_g^2 \rangle}{St} \\ \langle v_p^2 \rangle &= \frac{5}{8} \frac{\langle u_g^2 \rangle}{St} \end{aligned} \right. \quad (3.101)$$

$$\therefore \sqrt{\langle u_p^2 \rangle} = 2\sqrt{\langle v_p^2 \rangle} \quad (3.102)$$

となってエピサイクリック運動を再現していることがわかる (付録 D [式 (D.13)])．これは言うまでもなく、ストークス数 $St \gg 1$ のようにガスとダストのカップリングが小さいため、揺動力の影響がほとんど及んでいないことを示している．

さて、得られた式 (3.83),(3.84),(3.85) の結果を数値的に評価するために、 $\langle u_g^2 \rangle, \langle v_g^2 \rangle$ と $\langle u_g v_g \rangle$ の関係を大まかに評価してみることにする．ここでは $\langle u_g^2 \rangle = \langle v_g^2 \rangle$ を仮定した上で、 $\tau_e \equiv \Omega_K t_{\text{eddy}}$ が十分小さい極限と十分大きい極限を考え、その 2 つの場合の関係式を単純に結合することを試みる．

まず $\tau_e \ll 1$ の場合であるが, このとき x 方向の速度 u_g と y 方向の速度 v_g の相関は弱く, 単位質量あたりの運動量フラックス (角運動量フラックス) は単純に $\langle u_g v_g \rangle \sim -D_g \cdot (\partial v_{\text{shear},g} / \partial x_g)$ と書くことが出来る. つまり乱流拡散でシア速度 $v_{\text{shear},g} = -(3/2)\Omega_K x_p$ の勾配分だけ動径方向に運動量 (角運動量) が流れるというわけである. ガスの拡散係数は式 (3.55) より既に $D_g = \langle u_g^2 \rangle t_{\text{eddy}}$ とわかっているので

$$\begin{aligned} \langle u_g v_g \rangle &\sim \frac{3}{2} \tau_e \langle u_g^2 \rangle \\ \therefore \langle u_g^2 \rangle = \langle v_g^2 \rangle &\sim \frac{2}{3\tau_e} \langle u_g v_g \rangle \quad (\tau_e \ll 1) \end{aligned} \quad (3.103)$$

と見積もることが出来る. ただし $\tau_e \equiv \Omega_K t_{\text{eddy}}$ とした.

一方, $\tau_s \gg 1$ の場合を考える [11][12]. このとき角度 φ 方向に平均化したガスの流れについて, 動径 r 方向に

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \rho_g + \frac{\partial}{\partial r} (\rho_g U_g) = 0 \end{array} \right. \quad (3.104)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g J) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho_g J U_g) = -\frac{\partial F_J^{(\text{vis})}}{\partial r} \end{array} \right. \quad (3.105)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g E) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho_g E U_g) = -\frac{\partial F_E^{(\text{vis})}}{\partial r} + \rho_g \dot{\epsilon}_{\text{eddy}} \end{array} \right. \quad (3.106)$$

が成り立つものとする. 式 (3.104) が質量保存, 式 (3.105) が角運動量保存, 式 (3.106) がエネルギー保存をそれぞれ表している. ただし, ここで $J(r), E(r)$ はそれぞれ, 動径 r の位置のガスが持つ単位質量あたりの角運動量と力学的エネルギーであり, ケプラー円軌道の場合

$$J(r) = r^2 \Omega_K = \sqrt{GM_* r} \quad (3.107)$$

$$E(r) = \frac{J^2}{2r^2} - \frac{GM_*}{r} = -\frac{GM_*}{2r} \quad (3.108)$$

と表される. また, U_g はガスの平均流の動径方向速度であり, $F_J^{(\text{vis})}$ および $F_E^{(\text{vis})}$ は粘性トルクによってもたらされる角運動量およびエネルギーのフラックスである. 最後の項の $\dot{\epsilon}_{\text{eddy}}$ は, 乱流渦のなかで散逸して失われるガスの単位時間・単位質量あたりのエネルギーであり, ここでは $\dot{\epsilon}_{\text{eddy}} \sim \langle u_g^2 + v_g^2 \rangle / t_{\text{eddy}}$ とする. 式 (3.107), (3.108) よりそれぞれの動径方向の勾配が

$$\frac{\partial J(r)}{\partial r} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM_*}{r}} = \frac{r \Omega_K}{2} \quad (3.109)$$

$$\frac{\partial E(r)}{\partial r} = \frac{GM_*}{2r^2} = \frac{r \Omega_K^2}{2} \quad (3.110)$$

と書けることから, 角運動量の変化 δJ には必ずエネルギーの変化 $\delta E = \Omega_K \delta J$ が伴うことがわかる. これより角運動量フラックス $F_J^{(\text{vis})}$ とエネルギーフラックス $F_E^{(\text{vis})}$ の間には

$$\frac{F_E^{(\text{vis})}}{F_J^{(\text{vis})}} = \frac{\delta E}{\delta J} = \Omega_K \quad (3.111)$$

$$\frac{\partial F_E^{(\text{vis})}}{\partial r} = -\frac{3}{2} \frac{\Omega_K}{r} F_J^{(\text{vis})} + \Omega_K \frac{\partial F_J^{(\text{vis})}}{\partial r} \quad (3.112)$$

の関係があることになる. [式 (3.105) – $J \times$ 式 (3.104)] および [式 (3.106) – $E \times$ 式 (3.104)] より

$$\begin{cases} \rho_g U_g \frac{r \Omega_K}{2} = -\frac{\partial F_J^{(\text{vis})}}{\partial r} \\ \rho_g U_g \frac{r \Omega_K^2}{2} = -\frac{\partial F_E^{(\text{vis})}}{\partial r} + \rho_g \frac{\langle u_g^2 + v_g^2 \rangle}{t_{\text{eddy}}} \end{cases} \quad (3.113)$$

であり, これを式 (3.112) に注意してまとめると

$$\begin{cases} \rho_g U_g = -\frac{2}{r \Omega_K} \frac{\partial F_J^{(\text{vis})}}{\partial r} \\ F_J^{(\text{vis})} = \frac{2r}{3 \Omega_K} \rho_g \frac{\langle u_g^2 + v_g^2 \rangle}{t_{\text{eddy}}} \end{cases} \quad (3.114)$$

$$(3.115)$$

が導かれる. 式 (3.114) がガスの降着速度を与える式である一方, 式 (3.115) は粘性による角運動量輸送とエネルギーの散逸の関係を表す形になっている. 乱流粘性による角運動量フラックスはレイノルズ応力 $-\rho_g \langle u_g v_g \rangle$ を用いて $F_J^{(\text{vis})} = r \rho_g \langle u_g v_g \rangle$ のように書けるので¹⁴, 結局 考えていた $\tau_e \gg 1$ 場合は

$$\begin{aligned} \langle u_g v_g \rangle &\sim \frac{2 \langle u_g^2 + v_g^2 \rangle}{3 \tau_e} \\ \therefore \langle u_g^2 \rangle = \langle v_g^2 \rangle &\sim \frac{3 \tau_e}{4} \langle u_g v_g \rangle \quad (\tau_e \gg 1) \end{aligned} \quad (3.116)$$

となることがわかる. 以上, 式 (3.103), (3.116) で見積もられた結果を単純に合わせると

$$\langle u_g^2 \rangle = \langle v_g^2 \rangle \sim \frac{2 + (9 \tau_e^2 / 4)}{3 \tau_e} \langle u_g v_g \rangle \quad (3.124)$$

¹⁴非圧縮性流体に対する連続の式およびナビエ・ストークス方程式は, 成分で書くと

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.117)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial P_g}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad (3.118)$$

と書くことが出来る (ν は動粘性係数). これらの方程式において, 流速および圧力をその統計平均 $\langle v_i \rangle, \langle P_g \rangle$ と変動 v'_i, P'_g の和として

$$v_i = \langle v_i \rangle + v'_i, \quad P = \langle P_g \rangle + P'_g \quad (3.119)$$

のように表すことにする. 式 (3.119) を式 (3.117) に代入して両辺の平均を取ると

$$\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_i} = \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.120)$$

を得る. 同様に式 (3.119) を式 (3.118) に代入して両辺の平均を取ると

$$\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} + \langle v_j \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} + \langle v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \rangle = -\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \langle P_g \rangle}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \langle v_i \rangle}{\partial x_j^2} \quad (3.121)$$

となるが, 左辺第 3 項については式 (3.120) を用いて

$$\langle v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial x_j} (v'_i v'_j) \rangle - \underbrace{\langle v'_i \frac{\partial v'_j}{\partial x_j} \rangle}_0 = \frac{\partial}{\partial x_j} \langle v'_i v'_j \rangle \quad (3.122)$$

とできるので

$$\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} + \langle v_j \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \langle P_g \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} - \rho_g \langle v'_i v'_j \rangle \right] \quad (3.123)$$

が得られる ($\mu = \rho_g \nu$). これより乱流による平均流は分子粘性による応力 $\mu \partial \langle v_i \rangle / \partial x_j$ に加えて, 揺らぎによる応力 $-\rho_g \langle v'_i v'_j \rangle$ を受けることがわかる. この応力が「レイノルズ応力 (Reynolds stress)」である.

が得られる. 図 3.5 および図 3.6 に, 式 (3.83),(3.84),(3.85) でそれぞれ得られた $\langle u_p^2 \rangle, \langle v_p^2 \rangle, \langle u_p v_p \rangle$ の τ_s, τ_e 依存性を示しておく ($\tau_s \equiv \Omega_K t_{\text{stop}}$, $\tau_e \equiv \Omega_K t_{\text{eddy}}$). 図 3.5 が式 (3.124) で求められた $\langle u_g v_g \rangle$ の評価を用いたグラフであり, それに対して図 3.6 は $\langle u_g v_g \rangle = 0$ で描いたものになっている. それぞれ, $\tau_s \approx 1$ 付近で特徴的な振る舞いを見せていることがわかる. 特に図 3.5 では $\tau_e = 1$ および $\tau_e = 10$ の場合の動径方向の速度分散には $\tau_s \approx 1$ 付近に「こぶ」状の $V_{\text{particle}}/V_{\text{turb}} > 1$ となっている小さな山が存在する. $\tau_e = 1$ の方の こぶ に関しては, $\langle u_g v_g \rangle = 0$ とした図 3.6 では同じものが認められないことからわかるように, これはレイノルズ応力 $-\rho_g \langle u_g v_g \rangle$ に押し上げられて出来ているものである. そうは言いながらも, $\langle u_g v_g \rangle$ がこのとき 1 に近い大きな値を持つのに反してこの こぶ の影響はあまり大きくない. 加えて $\tau_e = 10$ の方の こぶ に至っては $\langle u_g v_g \rangle = 0$ の場合にも存在しているように, これはレイノルズ応力が原因のものではない. 総じて結局, レイノルズ応力がもたらす効果は大きくはないと言える [10].

同様に, 動径方向に関するダストの拡散係数についても式 (3.124) を用いて評価すると, 式 (3.55),(3.86) よりガスとダストの拡散係数比 $Sc \equiv D_p^{(x)}/D_g^{(x)}$ (Schmidt number) について図 3.7 を描くことができる.

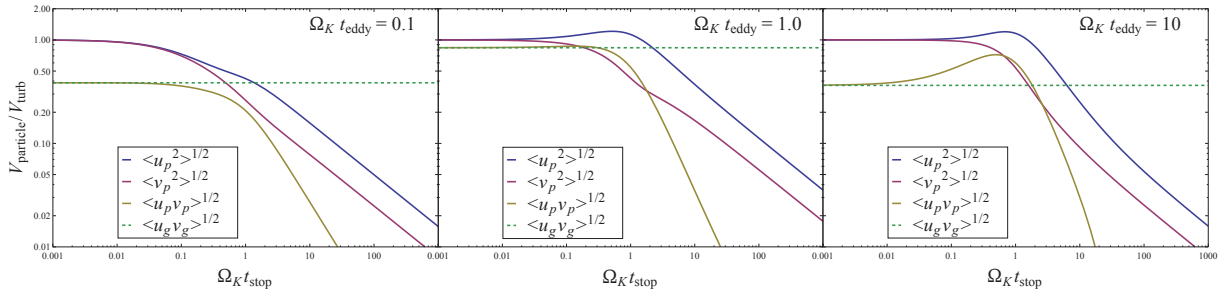


図 3.5: ダスト速度の分散と相関 $\langle u_g v_g \rangle = \frac{3\tau_e}{2 + (9\tau_e^2/4)} \langle u_g^2 \rangle$

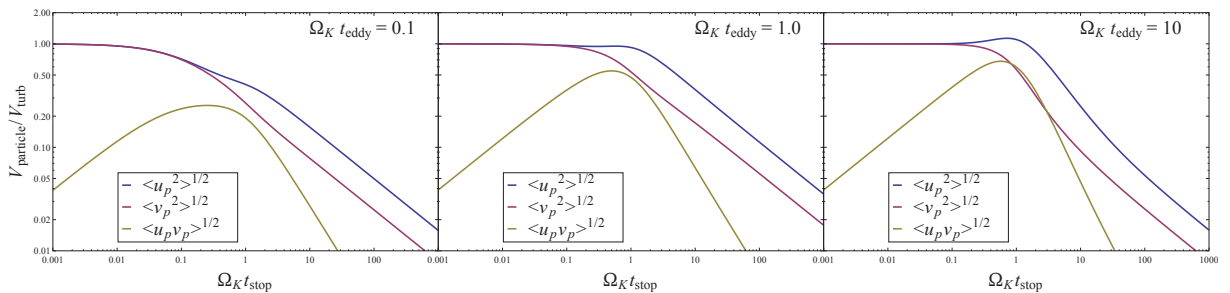


図 3.6: ダスト速度の分散と相関 $\langle u_g v_g \rangle = 0$

図 3.7 よりシュミット数 Sc は, τ_e に対してあまり敏感ではないことが読み取れる. シュミット数 Sc にとっては τ_e の依存性は $\langle u_g v_g \rangle$ に含まれているだけなので, つまりは $\langle u_g v_g \rangle$ の影響が少ないことになる. 実際, $\tau_e = 0.1, 10$ のものについては式 (3.124) で見積もると $\langle u_g v_g \rangle$ が小さいため, $\tau_s \approx 1$ 付近であってもほとんど違いが出ていない. $\tau_s < 1$ の領域では $\langle u_g^2 \rangle$ の項が支配的である一方, τ_s が大きくなって $\tau_s > 1$ の領域になると今度は $\langle v_g^2 \rangle$ の項が効いてくる. $\langle u_g v_g \rangle$ の効果が入り込む余地がある $\tau_s \approx 1$ 付近では $\tau_e = 1$ の拡散係数が他よりわずかに大きな値を持っている. これは式 (3.124) より $\tau_e \sim 1$ で $\langle u_g v_g \rangle$ が最大値を取るためである. 仮に $\langle u_g v_g \rangle = 0$ とするとダストの拡散係数は式 (3.86) より

$$D_p^{(x)} = \frac{1 + 4\tau_s^2}{(1 + \tau_s^2)^2} D_g^{(x)} \quad (3.125)$$

とできる. この $\langle u_g v_g \rangle = 0$ のモデルと式 (3.124) のモデルとの比較でさえあまり差が出ていない様子が図からはうかがえる. このことからさらに概算的に式 (3.125) を簡略化し分母の数係数 4 を落とせば

$$D_p^{(x)} = \frac{D_g^{(x)}}{1 + \tau_s^2} \quad (3.126)$$

が得られる. 実務的な側面から見ると, ダストの拡散を扱うときには結局, ガスの拡散係数 $D_g^{(x)}$ に対して乱流粘性の α パラメータを与えて計算を行うことになる (式 (2.6), (2.60) 参照). そのパラメータの不定性や計算の諸過程の近似から来る誤差を鑑みると, 式 (3.125) から式 (3.126) の処理は妥当であると考えてよい. 以上のことから, 本稿でもダストの拡散係数を見積もる際には主に概算式 (3.126) を使用して考えることにする.

3.3.3 鉛直方向拡散

動径方向の拡散と同様に, 円盤鉛直方向の拡散についても解析を行う. ここではダスト粒子の鉛直振動に注目する. ガスとの相互作用がない場合, ダスト粒子は鉛直方向に中心星重力 $-GM_*/r^3 = -\Omega_K^2 z$ を受けて $\ddot{z} = -\Omega_K^2 z$ のように振動数 Ω_K で「鉛直振動」する (ダストには圧力は働かない). ガスとの相互作用がある場合は, その鉛直振動を妨げるガス抵抗の項が加わってダストは減衰振動し, $\tau_s = \Omega_K t_{\text{stop}} \ll 1$ のときに至っては振動周期より十分短い制動時間で終端速度に達し過減衰運動することになる (3.2 節). さらに乱流による揺らぎがある場合は単純な沈殿運動に加えて, ガス抵抗を通じてダストは円盤上層へと乱流で「巻き上げられる」ことになる. 流体的に見れば, 中心星が円盤赤道面へと落とし込もうとする重力の効果とガス抵抗からもたらされる円盤上層への乱流拡散の 2 つが平衡するところでダストの鉛直方向の運動は定常状態となる.

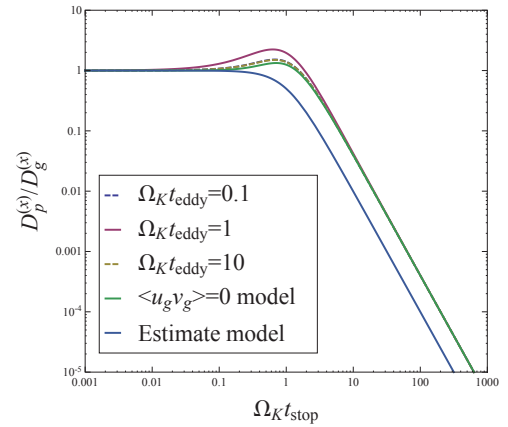


図 3.7: ダストの動径拡散係数

以下では、この乱流拡散についてダスト粒子の鉛直振動にガス抵抗を通じて揺動力が加わるものとして定量的に議論する。ダスト粒子の鉛直座標を z_p とし、また速度を $w_p = dz_p/dt$ とする。ガス要素の速度については w_g と表し、式 (3.48) のパワースペクトルに従うものとする。このとき運動方程式は

$$\frac{dw_p}{dt} = -\Omega_K^2 z_p - \frac{w_p - w_g}{t_{\text{stop}}} \quad (3.127)$$

と書ける。この両辺を時間微分し、フーリエ逆変換の式を代入することで

$$\begin{aligned} -\omega^2 \hat{w}_p &= -\Omega_K^2 \hat{w}_p - \frac{i\omega}{t_{\text{stop}}} (\hat{w}_p - \hat{w}_g) \\ \therefore \hat{w}_p &= \frac{i\omega}{t_{\text{stop}}(\Omega_K^2 - \omega^2) + i\omega} \hat{w}_g \end{aligned} \quad (3.128)$$

が得られる。これより

$$|\hat{w}_p|^2 = \frac{\omega^2}{t_{\text{stop}}^2(\Omega_K^2 - \omega^2)^2 + \omega^2} |\hat{w}_g|^2 \quad (3.129)$$

であり、このときダスト粒子のパワースペクトルは

$$\hat{E}_p^{(z)} = \frac{\omega^2}{t_{\text{stop}}^2(\Omega_K^2 - \omega^2)^2 + \omega^2} \hat{E}_g^{(z)} = \frac{\nu_s^2 \hat{P}(\nu_s)}{(\tau_s^2 - \nu_s^2)^2 + \nu_s^2} \langle w_g^2 \rangle = \frac{\nu_s^2 \hat{P}(\nu_s)}{\ell(\nu_s)} \langle w_g^2 \rangle \quad (3.130)$$

と書くことが出来る。ただしここで、 $\nu_s \equiv \omega t_{\text{stop}}$ および $\ell(\nu_s) \equiv (\nu_s^2 - \tau_s^2)^2 + \nu_s^2$ 、 $\hat{P}(\nu_s) \equiv 2t_{\text{eddy}} St^2 / (St^2 + \nu_s^2)$ である。動径拡散のときと同様に、 $\langle w_g^2 \rangle$ を求めるためにはこの $\hat{E}_p^{(z)}$ を $\omega = \nu_s / t_{\text{stop}}$ について積分すれば良く、その積分は留数定理を用いて計算することが出来る。 $\hat{P}(\nu_s)$ の極に関しては式 (3.78) と同じく

$$\begin{cases} \nu_5 = i St \\ \nu_6 = -i St \end{cases} \quad (3.131)$$

であり、一方 $\ell(\nu_s) = (\nu_s^2 - i\nu_s - \tau_s^2)(\nu_s^2 + i\nu_s - \tau_s^2)$ の極は

$$\begin{cases} \nu_7 = \frac{\sqrt{4\tau_s^2 - 1}}{2} + \frac{i}{2}, & \nu_8 = \frac{\sqrt{4\tau_s^2 - 1}}{2} - \frac{i}{2} \\ \nu_9 = -\frac{\sqrt{4\tau_s^2 - 1}}{2} + \frac{i}{2}, & \nu_{10} = -\frac{\sqrt{4\tau_s^2 - 1}}{2} - \frac{i}{2} \end{cases} \quad (3.132)$$

であり、この中で $\text{Im}[\nu_s] > 0$ の極は $\nu_s = \nu_5, \nu_7, \nu_9$ の3つということになる¹⁵。積分路を複素平面の上半面にとって、この積分路に囲まれる極 ν_5, ν_7, ν_9 について留数定理を用いると次のように計算することができる。

¹⁵ このように書くと $(\sqrt{4\tau_s^2 - 1})/2$ および $-(\sqrt{4\tau_s^2 - 1})/2$ が実数部のように見えるがこの部分が実数であるのは $\tau_s > 1/2$ の場合だけである。 $\tau_s < 1/2$ の場合は

$$\begin{cases} \nu_7 = \frac{i}{2}(1 + \sqrt{1 - 4\tau_s^2}), & \nu_8 = -\frac{i}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\tau_s^2}) \\ \nu_9 = \frac{i}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\tau_s^2}), & \nu_{10} = -\frac{i}{2}(1 + \sqrt{1 - 4\tau_s^2}) \end{cases} \quad (3.133)$$

のようにそれぞれ純虚数の形で書かなければならない。ただし、この場合でも $\text{Im}[\nu_s] > 0$ の極は $\nu_s = \nu_5, \nu_7, \nu_9$ であり、結局 $\tau_s > 1/2$ のときと同じになるため留数計算は変わらない。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_p^{(z)} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \frac{\langle w_g^2 \rangle}{t_{\text{stop}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu_s^2 \hat{P}(\nu_s)}{\ell(\nu_s)} d\nu_s \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{\langle w_g^2 \rangle}{t_{\text{stop}}} \cdot 2\pi i \left[\text{Res}_{\nu_s=\nu_5} + \text{Res}_{\nu_s=\nu_7} + \text{Res}_{\nu_s=\nu_9} \right] \frac{\nu_s^2 \hat{P}(\nu_s)}{\ell(\nu_s)} \\
&= i \frac{\langle w_g^2 \rangle}{t_{\text{stop}}} \left[\frac{2t_{\text{eddy}} St^2}{\nu_5 - \nu_6} \frac{\nu_5^2}{\ell(\nu_5)} + \hat{P}(\nu_7) \frac{\nu_7^2}{(\nu_7 - \nu_8)(\nu_7 - \nu_9)(\nu_7 - \nu_{10})} \right. \\
&\quad \left. + \hat{P}(\nu_9) \frac{\nu_9^2}{(\nu_9 - \nu_7)(\nu_9 - \nu_8)(\nu_9 - \nu_{10})} \right] \\
&= \frac{\langle w_g^2 \rangle}{1 + (\tau_s/\tau_e) + \tau_s \tau_e} \quad (3.134)
\end{aligned}$$

$$\therefore \langle w_p^2 \rangle = \frac{\langle w_g^2 \rangle}{1 + (\tau_s/\tau_e) + \tau_s \tau_e} = \frac{\langle w_g^2 \rangle}{1 + St(1 + \tau_e^2)} \quad (3.135)$$

この式は $\tau_e = \Omega_K t_{\text{eddy}} \ll 1$ の極限で式 (3.92) に一致する (脚注 13). 次にダスト粒子のスケールハイト H_p については

$$H_p^2 = \overline{\langle |z_p(t)|^2 \rangle} \quad (3.136)$$

を用いて計算することができる. 式 (3.136) 右辺は, ダスト粒子の時刻 t における鉛直座標 $z_p(t)$ の 2 乗のアンサンブル平均を長時間平均したものを意味している. $\langle |z_p(t)|^2 \rangle$ が $t \rightarrow \infty$ で収束しているものとすれば, この場合, 長時間平均 $\overline{\langle |z_p(t)|^2 \rangle}$ はその収束値に等しくなると考えて良い. $z_p(t)$ をフーリエ逆変換で $z_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{z}_p e^{i\omega t} d\omega$ と表せば, $dz_p/dt = w_p$ より

$$\hat{z}_p = -\frac{i\hat{w}_p}{\omega} \quad \therefore |\hat{z}_p|^2 = \frac{|\hat{w}_p|^2}{\omega^2} \quad (3.137)$$

なので

$$\begin{aligned}
H_p^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \langle |z_p(t)|^2 \rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \langle \hat{z}_p^*(\omega_1) \hat{z}_p(\omega_2) \rangle e^{i(-\omega_1 + \omega_2)t} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle |\hat{z}_p(\omega_1)|^2 \rangle}{T} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \frac{1}{\omega_1^2} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle |\hat{w}_p(\omega_1)|^2 \rangle}{T} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \frac{\hat{E}_p^z(\omega_1)}{\omega_1^2} = \frac{\langle w_g^2 \rangle t_{\text{stop}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_s \frac{\hat{P}(\nu_s)}{\ell(\nu_s)} \quad (3.138)
\end{aligned}$$

となって ($\hat{E}_p^{(z)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle |\hat{w}_p|^2 \rangle / T$), スケールハイト H_p に関しても留数定理で積分を求めれば良いことになる.

計算は以下のようにできて

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{P}(\nu_s)}{\ell(\nu_s)} d\nu_s &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi i \left[\text{Res}_{\nu_s=\nu_5} + \text{Res}_{\nu_s=\nu_7} + \text{Res}_{\nu_s=\nu_9} \right] \frac{\hat{P}(\nu_s)}{\ell(\nu_s)} \\
 &= i \left[\frac{2t_{\text{eddy}} St^2}{\nu_5 - \nu_6} \frac{1}{\ell(\nu_5)} + \hat{P}(\nu_7) \frac{1}{(\nu_7 - \nu_8)(\nu_7 - \nu_9)(\nu_7 - \nu_{10})} \right. \\
 &\quad \left. + \hat{P}(\nu_9) \frac{1}{(\nu_9 - \nu_7)(\nu_9 - \nu_8)(\nu_9 - \nu_{10})} \right] \\
 &= \frac{t_{\text{eddy}}}{\tau_s^2} \frac{1}{1 + \frac{St\tau_e^2}{1 + St}} \quad (3.139)
 \end{aligned}$$

結局, ダストのスケールハイトは

$$H_p = \sqrt{\frac{D_g^{(z)}}{\Omega_K \tau_s}} \frac{1}{\sqrt{\xi(\tau_s, \tau_e)}} \quad (3.140)$$

となる. ただし $D_g^{(z)} = \langle w_g^2 \rangle t_{\text{eddy}}$ であり, また

$$\xi(\tau_s, \tau_e) \equiv \frac{1 + St(1 + \tau_e^2)}{1 + St} = 1 + \frac{St\tau_e^2}{1 + St} \quad (3.141)$$

とした. さらに, ガスの拡散係数 $D_g^{(z)}$ を乱流粘性のパラメータ α を用いて (式 (2.6))

$$D_g^{(z)} = \alpha c_{s,g} H_g = \alpha H_g^2 \Omega_K \quad (3.142)$$

と与えれば, ダストのスケールハイト H_p はガスのスケールハイト H_g に対して

$$\frac{H_p}{H_g} = \sqrt{\frac{\alpha}{\tau_s}} \xi^{-1/2} \quad (3.143)$$

と表せることになる. これを用いれば, $\langle w_p^2 \rangle^{1/2}$ と沈殿速度 $\overline{|w_{\text{sett}}|^2}^{1/2} \approx \Omega_K \tau_s H_p$ の比は

$$\frac{\overline{|w_{\text{sett}}|^2}^{1/2}}{\langle w_p^2 \rangle^{1/2}} \approx \underbrace{\frac{\Omega_K H_g}{\langle w_g^2 \rangle^{1/2}}}_{\sqrt{\tau_e/\alpha}} \tau_s \sqrt{\frac{\alpha}{\tau_s}} \sqrt{1 + St} = \sqrt{(\tau_e + \tau_s) \tau_s} \quad (3.144)$$

と書ける. $\tau_e > 1/\tau_s$ のときを除けば, τ_s が小さい場合は乱流によって駆動されるランダム運動の方が沈降運動より支配的であることがわかる. $\tau_e = \Omega_K t_{\text{eddy}} \gg 1$ のときランダム運動が有効ではなくなるのは, 長い eddy time の間に短い振動周期 Ω_K^{-1} で幾度も鉛直振動しているうちに乱流渦からの「キック」がキャンセルされてしまうためである [10].

以上ではダスト粒子の制動時間 τ_s および乱流のスペクトル $\hat{E}_g^{(z)}$ はともに座標 z_p 自体には依存しないものとして扱ってきた. 既にダストが赤道面近くまで沈殿している状況を考えるのであればこの取扱いは妥当とも言えるが, 本来は円盤ガスの成層構造を考慮して計算しなければならない. 式 (3.143) に忠実なままで, $\tau_s \ll 1$ とすると $H_p > H_g$ となってしまう問題が発生するのはこのためである. このことを鑑み, ガスの鉛直方向の密度分布を考慮するための補正として式 (3.143) を

$$\frac{H_p}{H_g} = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + \tau_s}} \xi^{-1/2} \quad (3.145)$$

と改めることにする. ここで右辺の分母に加わった α には, ダストの拡散が「Fick の法則」(付録 E 参照) に従うということが含意されている. つまり, ダストの拡散フラックスはガス密度に対する濃度勾配に比例するということがここに考慮されている.

この Fick の法則が円盤ガス中の乱流拡散を良く記述することは, 乱流数値シミュレーションによって確かめられている [13][14]. そこで, 式 (3.145) との比較の目的も含めて, 円盤鉛直方向に成り立つ移流拡散方程式

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(\rho_p w_{sett}) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho_g D_p^{(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_p}{\rho_g} \right) \right] \quad (3.146)$$

を考えることにする. 右辺第 1 項が沈殿を表す移流項であり, 第 2 項が Fick の法則に従う形の拡散項である. 以下, この式の定常解からダストのスケールハイトを求める. 式 (3.146) は定常状態において, 移流拡散フラックス $F_{ad.diff}^{(z)}(z) \equiv \rho_p w_{sett} - \rho_g D_p^{(z)} \partial(\rho_p/\rho_g)/\partial z$ が

$$\frac{\partial F_{ad.diff}^{(z)}(z)}{\partial z} = 0 \quad (3.147)$$

になるが, 特に今の場合は円盤遠方 $|z| \rightarrow \infty$ でフラックスが 0 であることは明らかなので式 (3.147) の両辺を積分することで, このとき任意の z に関して $F_{ad.diff}^{(z)}(z) = 0$ を得る. これよりダスト粒子の濃度 $c_p \equiv \rho_p/\rho_g$ について

$$D_p^{(z)} \frac{\partial \ln c_p}{\partial z} = w_{sett} \quad (3.148)$$

が成り立つことがわかる. ここで注意すべきは沈殿速度である. 本来であれば $\Omega_K t_{stop} \ll 1$ の場合にしかダスト粒子の過減衰運動は成り立たないが, 解析的な都合上, 以下では近似的に沈殿速度を過減衰の速度 $w_{sett} = -\Omega_K \tau_s z$ で与えることにする.

まずは, Ros 2012 [15] に従い τ_s が z に依らないものとし, ダストの拡散係数をガスの拡散係数 $D_g^{(z)} = \alpha H_g^2 \Omega_K$ に等しいものと置いてスケールハイト H_p の計算を行う. このとき式 (3.148) より

$$\frac{\partial \ln c_p}{\partial z} = -\frac{\tau_s z}{\alpha H_g^2} \quad (3.149)$$

であり両辺を積分して

$$\begin{aligned} c_p &= c_{p,c} \exp \left[-\frac{\tau_s}{\alpha} \frac{z^2}{2H_g^2} \right] \\ \therefore \rho_p &= \rho_{p,c} \exp \left[-\frac{\alpha + \tau_s}{\alpha} \frac{z^2}{2H_g^2} \right] \end{aligned} \quad (3.150)$$

のようにダスト粒子の密度分布を得る ($c_{p,c}$ および $\rho_{p,c}$ は赤道面におけるダスト粒子の濃度 および密度). これよりスケールハイト H_p は

$$H_p = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} z^2 \rho_p(z) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_p(z) dz}} \quad (3.151)$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + \tau_s}} H_g \quad (3.152)$$

となって、これは式 (3.145) で $\xi(\tau_s, \tau_e) \rightarrow 1$ としたものに等しくなっていることがわかる。

以上の計算では、 τ_s を一定とし円盤上層のガス密度が薄い場所でも制動時間は変わらないものとした。しかし実際は、エプスタイン則が適用される場合、式 (3.8) のように $\tau_s \propto \rho_g^{-1} \propto e^{z^2/2H_g^2}$ という z 依存性がある¹⁶。このことに注意し、ダストの拡散係数に関しても式 (3.126) を用いて同様の評価をすれば¹⁷

$$\rho_p = \rho_{p,c} \exp \left[-\frac{z^2}{2H_g^2} - \frac{1}{\alpha} \left\{ \tau_{s,c} (e^{z^2/2H_g^2} - 1) + \frac{\tau_{s,c}^3}{3} (e^{3z^2/2H_g^2} - 1) \right\} \right] \quad (3.154)$$

となって、これを式 (3.151) を用いて数値積分すれば、この場合のスケールハイト H_p が求まることになる。ただしここで、 $\tau_{s,c}$ は赤道面 $z = 0$ での値を表しており、 $\tau_s = \tau_{s,c} e^{z^2/2H_g^2}$ である。

以上で得られた結果について図 3.8 にまとめておく。 **Model 1** とラベル付されたものが式 (3.145) を用いてスケールハイト H_p を計算したものであり、 $\tau_s = \text{const}$, $D_p^{(z)} = D_g^{(z)}$ の設定で移流拡散方程式を解いた結果 (3.152) を描いたものが **Model 2** である。そして、**Model 3** が $\tau_s \propto e^{z^2/2H_g^2}$, $D_p^{(z)} = D_p^{(x)}$ の設定で解いた H_p になっている。ただし、**Model 3** については赤道面における制動時間 $\tau_{s,c}$ に対する H_p/H_g を描いている。なお、 α パラメータについては $\alpha = 10^{-2}$ と与えた (式 (2.60))。

Model 1 について、 τ_e が大きいとき H_p が小さくなる振る舞いに、式 (3.144) の下で述べた振動運動による「キック」のキャンセルの効果が現れている。その一方で、 τ_e が小さいときはほとんど **Model 1** と **Model 2** は重なっていることがわかる。**Model 3** が $\tau_{s,c}$ の大きいところで H_p の値が落ちているのは、 $D_p^{(z)} = D_g^{(x)}/[1 + \tau_s^2]$ という形でダスト粒子の拡散係数を与えたため、 $\tau_{s,c} > 1$ の領域で拡散が効かなくなってしまうためである。拡散係数だけを $D_g^{(z)}$ に戻すと **Model 3** はほとんど **Model 2** に重なる。つまり、ここでは成層構造はあまり効いていないことになる。いずれにしても、 $\tau_s < 0.1$ の領域ではダスト粒子がガスに強くカップリング

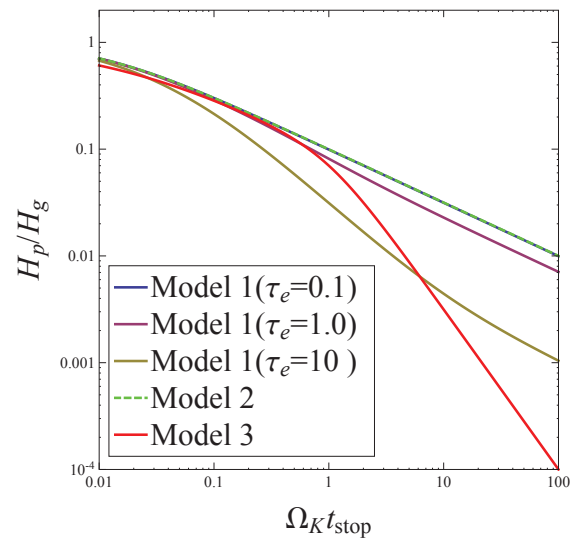


図 3.8: ダストのスケールハイト ($\alpha = 10^{-2}$)

Model 1: 式 (3.145) (Youdin & Lithwick 2007)

Model 2: $\tau_s = \text{const.}$, $D_p^{(z)} = D_g^{(z)}$ (Ros 2012)

Model 3: $\tau_s \propto e^{z^2/2H_g^2}$, $D_p^{(z)} = D_p^{(x)}$

¹⁶ ストークス則 (3.9) の場合は、平均自由行程が $l_g \propto \rho_g^{-1}$ であるため相殺して z 依存性はなくなる。これは粘性係数 $\mu = \rho_g \nu$ がガスの密度あるいは圧力に依存しないことに由来している (付録 C 参照; [16])。

¹⁷ このとき $d\tau_s = (\tau_s z/H_g^2) dz$ のなので、式 (3.148) より

$$\begin{aligned} \ln c_p &= - \int_0^z \frac{D_g^{(z)}}{D_p^{(z)}} \frac{\tau_s z}{\alpha H_g^2} dz = - \frac{1}{\alpha} \int_{\tau_{s,c}}^{\tau_s} \frac{D_g^{(z)}}{D_p^{(z)}} d\tau_s \\ \therefore \rho_p &= \rho_{p,c} \exp \left[-\frac{z^2}{2H_g^2} - \frac{1}{\alpha} \int_{\tau_{s,c}}^{\tau_s} \frac{D_g^{(z)}}{D_p^{(z)}} d\tau_s \right] \end{aligned} \quad (3.153)$$

のようにして計算することが出来る。

しているため、どの場合も同程度の値を取っていることがわかる。さらに、 $\tau_e = 10$ という τ_e が特別大きい場合さえ除けば、オーバーラップしている領域は ながく見て取れる。目安として $\tau_e = 1$ という値を取れば式 (3.145) は

$$H_p = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + \tau_s}} \sqrt{\frac{1 + \tau_s}{1 + 2\tau_s}} H_g \quad (3.155)$$

となって、結局、式 (3.152) と最大でも $\sqrt{2}$ 倍程度の違いしかないことになる ($\tau_s \gg 1$)。

以下、本稿では議論の簡単化のため、 x 方向と z 方向のダストの拡散係数が等しいものとして式 (3.126) を用いて

$$D_p^{(x)} = D_p^{(z)} = \frac{D_g}{1 + \tau_s^2} \quad (3.156)$$

と置いて計算を行うことにする。ただし、ガスの拡散係数についてもここでは x 方向と z 方向とで等しいものと仮定して $D_g \equiv D_g^{(x)} = D_g^{(z)}$ と表してある。この設定は **Model 3** に対応しているので、拡散係数をこのように評価すると以上の議論より $\tau_s > 1$ の領域にやや不定性が残ってしまうように思えるが、本稿で主題とする計算ではダスト粒子はたかだか $\tau_s \sim 0.1$ (10cm サイズ) となる粒径までしか成長しない。つまり、扱う領域はほとんどの場合 $\tau_s \lesssim 0.1$ に限られるためこの問題はあまり深刻にならないと考えてよい。

4 凝縮・昇華過程

4.1 Radial ice line と Atmospheric ice line

原始惑星系円盤における H_2O について、気体 (あるいは液体) として存在できる領域と固体として存在できる領域の境界面のことを「ice line」と言う。「面」と言っているのは、以下で見るように境界が円盤動径 r 方向だけでなく鉛直 z 方向にも存在するためである。動径方向に存在する ice line を「radial ice line」、鉛直方向に存在する ice line を「atmospheric ice line」と呼ぶ。惑星形成の分野で通常 単に ice line と呼ぶときには、ここで言う radial ice line のことを指すことが多い。

本稿では、ice line の位置を飽和水蒸気圧 P_{sat} と水蒸気分圧 P_v が等しくなるところと考えることにする。このように定義した ice line のことを「pressure ice line」と言う。以下、原始惑星系円盤における ice line について考えるためにまず飽和水蒸気圧 P_{sat} を求めることにする。

飽和水蒸気圧とは文字通り、水蒸気が飽和して気相と固相が相平衡に至っている状態の蒸気圧のことである。この相平衡の状態では、水蒸気 (気体) と氷 (固体) の化学ポテンシャルは

$$\mu_v = \mu_{\text{ice}} \quad (4.1)$$

のように等しくなると、このとき気体から固体へと凝縮する分子数と固体から気体へと昇華する分子数がちょうど等しくなる。一方、ギブス・デュエムの式 $SdT - VdP + Nd\mu = 0$ を用いると化学ポテンシャルの微小変化 $d\mu$ は

$$d\mu = \frac{V}{N}dP - \frac{S}{N}dT = v dP - s dT \quad (4.2)$$

と書くことが出来る. ここで v, s はそれぞれ 1 粒子あたりが占める体積とエントロピーである. 式 (4.1), (4.2) より

$$\begin{aligned} v_v dP - s_v dT &= v_{ice} dP - s_{ice} dT \\ \therefore \frac{dP}{dT} &= \frac{s_v - s_{ice}}{v_v - v_{ice}} = \frac{\Delta Q_{sub}}{T(v_v - v_{ice})} \end{aligned} \quad (4.3)$$

が導かれる. ΔQ_{sub} は H_2O 分子 1 個を液体から気体へと状態変化させるのに必要な熱量を表している. この式 (4.3) のことを「クラウジウス・クラペイロンの式」と言う. $v_v \gg v_{ice}$ であることに注意すれば

$$\frac{dP}{dT} \simeq \frac{\Delta Q_{sub}}{Tv_v} \quad (4.4)$$

とできて, 理想気体状態方程式 $Pv = k_B T$ より $v_v = k_B T / P$ をこの式に代入して

$$\frac{d \ln P}{dT} = \frac{\Delta Q_{sub}}{k_B T^2} \quad (4.5)$$

となる. さらにこの両辺を積分することで, 飽和水蒸気圧 P_{sat} を温度 T で表す式

$$P_{sat} = P_0 \exp \left[-\frac{\Delta Q_{sub}}{k_B T} \right] \quad (4.6)$$

を得る. 定数 ΔQ_{sub} および P_0 については実験的に求められていて [17],

$$P_{sat} = 6.034 \times 10^{12} \exp \left[-\frac{5938 \text{ K}}{T} \right] \quad [\text{dyn/cm}^2] \quad (4.7)$$

のようになる [9][18]. 本稿ではこの式 (4.7) を飽和水蒸気圧を表す式として採用し使用する. また, ここで得られた P_{sat} を用いて描ける昇華曲線 (氷-蒸気) に加え, 蒸気圧曲線 (蒸気-水) および融解曲線 (水-氷) を書き加えたもの, すなわち「 H_2O の相図」を図 4.1 に表しておく [19].

これに対し水蒸気圧に関しては, ここでも理想気体状態方程式を用いて

$$P_v = \frac{\rho_v k_B T}{\mu_{H_2O} m_H} \quad (4.8)$$

を用いて計算することが出来る. ただし, ρ_v は水蒸気の空間質量密度であり, $\mu_{H_2O} (= 18)$ は H_2O の分子量, m_H は原子質量単位を表している. ρ_v の具体的な値については, 原始惑星系円盤内で H_2O の気体成分は, 特に radial ice line 付近において質量密度でガス全体の約 1% 程度存在するとされていることから $\rho_v \sim 0.01 \rho_g$ とできる [20]. また, 式 (4.8) に現れる温度 T については林モデルの温度分布 (2.1)

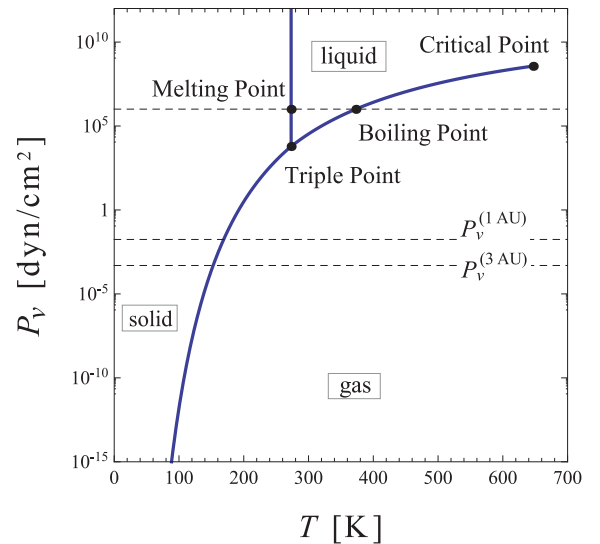


図 4.1: H_2O の相図

$$T = 2.8 \times 10^2 \left(\frac{r}{1 \text{ AU}} \right)^{-1/2} \quad [\text{K}] \quad (4.9)$$

を用いて円盤鉛直 z 方向には等温であるものとする. ガスの面密度分布に関しても林モデルを用いて, 式 (2.4) から

$$\Sigma_g = 1.7 \times 10^3 \left(\frac{r}{1 \text{ AU}} \right)^{-3/2} \quad [\text{cm}] \quad (4.10)$$

とすれば, 以上より原始惑星系円盤における水蒸気圧の分布は

$$P_v = 1.8 \times 10^{-2} \left(\frac{r}{1 \text{ AU}} \right)^{-13/4} \exp \left[-\frac{z^2}{2H_g^2} \right] \quad [\text{dyn/cm}^2] \quad (4.11)$$

と表せることになる. ここまで H_2O は固体と気体の状態しか存在しないものと暗に仮定して液相を無視してきたが, 式 (4.11) より円盤赤道面 $r = 3\text{AU}$ で見積もって $P_v \sim 10^{-4} \text{dyn/cm}^2$, あるいは, $r = 1\text{AU}$ であってもなお $P_v \sim 10^{-2} \text{dyn/cm}^2$ であり, 図 4.1 より固体-気体の 2 相状態が成り立つのに十分なほどに P_v が低圧であることがわかる.

図 4.2 に式 (4.7), (4.11) から得られる ice line を示す. ice line と赤道面 $z = 0$ が交わる位置を $r = r_{\text{ice}}$ と表すならば, 林モデルで見積もった場合 $r_{\text{ice}} \approx 3\text{AU}$ であり, この図から atmospheric ice line がスケールハイトを下回って存在している r の範囲は, $r_{\text{ice}} \lesssim r \lesssim 3.2\text{AU}$ のように r_{ice} すぐ外側 (中心星から遠い方向) の非常に狭い領域しかないことがわかる.

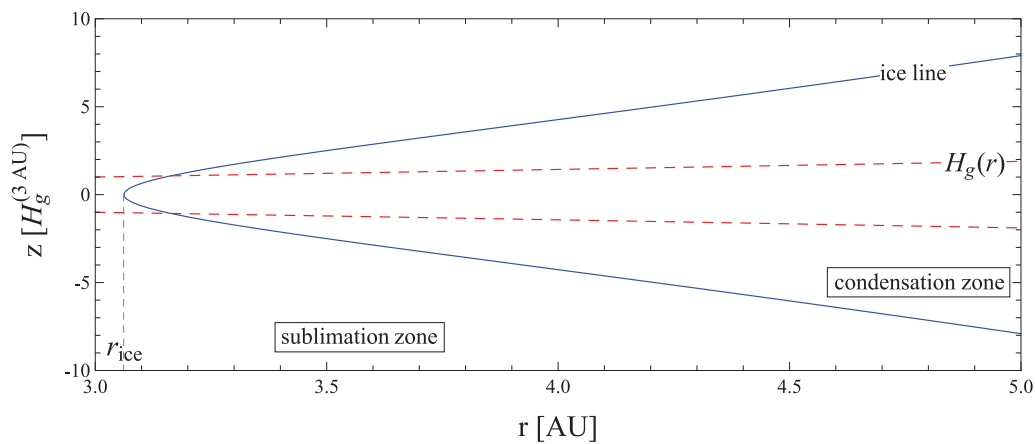


図 4.2: Ice line (Pressure ice line) 横軸を動径 r 座標, 縦軸を鉛直 z 座標として, 青の実線が ice line ($P_v = P_{\text{sat}}$ の位置) を, 赤の破線がガスのスケールハイト H_g を表している. 温度および面密度の分布に関しては林モデル式 (2.1), (2.4) を用いている. ただし, r 座標に関しては AU 単位で, z 座標に関しては $H_g^{(3\text{AU})}$ ($r = 3\text{AU}$ におけるガスのスケールハイト) を単位としている.

4.2 氷ダストの成長モデル

氷から成るダスト粒子は, その近傍の水蒸気の凝縮 (condensation) によってサイズを大きくし, 一方 水蒸気への昇華 (sublimation) で小さくなっていく. ここでは主に Morfill 1985 [21] に従って, その凝縮と昇華による氷ダストの成長についてモデル化して考えることにする.

ダスト粒子が受けるガス抵抗にエプスタイン則とストークス則があったように, 凝縮・昇華に関しても, 平均自由行程 l_g に対してダスト粒径 R が $R \lesssim l_g$ のときと $R \gtrsim l_g$ のときとで場合分けが出来る. 原始惑星系円盤における平均自由行程の具体的な値に関しては, 林モデルのガス面密度 (2.4), および, H_2O 分子の H_2 , He 分子に対する衝突断面積 $\sigma = 2 \times 10^{-15} \text{cm}^2$ を用いると, 円盤赤道面で見積もって

$$l_{g,c} \simeq \frac{1}{n_{g,c}\sigma} \simeq 29.4 \left(\frac{r}{3 \text{ AU}} \right)^{11/4} [\text{cm}] \quad (4.12)$$

とできる. これより, 凝縮・昇華の効果が重要となる $r_{\text{ice}} \simeq 3 \text{ AU}$ 近傍においては, $R \sim 30 \text{ cm}$ を境に粒径が小さい場合はその周りのガス成分は自由分子流と見なせる一方, 粒径が大きい場合は流体 (連続体) として見なさなければならなくなる. 今回の解析では結果的に表式の上で両者は比較できる形になるが, 取り扱い方に大きな相違があるため, 以下では氷ダスト粒子が平均自由行程より小さい場合と大きい場合とに分けて議論する. なお, ここでは, 気相水蒸気とダスト粒子の相対速度は水蒸気の音速に比べ十分に小さいものとして, 凝縮・昇華による氷ダスト粒子の質量増加率は, その氷ダスト粒子の空間的な速度に依らず決まるものとする.

4.2.1 ダスト粒子が小さい場合

氷ダスト粒子のまわりに存在する気相の H_2O 分子の分布関数を $f_v(\mathbf{v})$ とし, このとき, その分子の個数密度 n_v が

$$n_v = \int d^3\mathbf{v} f_v(\mathbf{v}) \quad (4.13)$$

と書けるものとする¹⁸. ただし, ある氷ダストに注目したとき, その粒子の形状・物質密度 およびそのまわりのガスの空間分布は球対称一様であることを仮定する. エプスタイン則を導く際の図 A.1 と同じように粒子表面に微小面 dS を考え, その面に対して $v_z < 0$ (z 方向は粒子表面の法線方向) で単位時間あたりに衝突してくる気相分子数を計算すると

$$dS \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^0 dv_z |v_z| f_v(\mathbf{v}) = dS n_v v_{th,v} \quad (4.14)$$

と表すことが出来る (cf. 式 (A.5)). ここで熱速度 (thermal velocity)

$$v_{th,v} \equiv \frac{\int_{v_z \leq 0} d^3\mathbf{v} |v_z| f_v(\mathbf{v})}{\int d^3\mathbf{v} f_v(\mathbf{v})} \quad (4.15)$$

¹⁸本節で用いる $\mathbf{r}$ や $\mathbf{v}$ 等は注目するダスト粒子近傍の局所的な空間位置ベクトル および 速度ベクトルである. 原始惑星系円盤内の大域的な座標を表す位置ベクトルや速度ベクトルとは別物であることに注意されたい.

を導入し¹⁹, 式 (4.13) を用いた. この $v_{th,v}$ は速度分布 $f_v(\mathbf{v})$ がマクスウェル・ボルツマン分布であるとき

$$v_{th,v} = \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi\mu_{H_2O}m_H}} = \sqrt{\frac{\mu_g}{2\pi\mu_{H_2O}}}c_{s,g} \quad (4.17)$$

である. 微小面 dS を氷ダスト粒子の球面上に取って, 式 (4.14) をその球表面にわたって積分することで, 球面に衝突する単位時間あたりの気相分子数の合計を計算できて, このとき対称性より

$$4\pi R^2 n_v v_{th,v} \quad (4.18)$$

となる (R はダストの粒径). 衝突してきた気相粒子のすべてがダスト球表面へと取り込まれるとし, 分子 1 個あたり $m_v = \mu_{H_2O}m_H$ の質量を持つものとするれば, 凝縮によるこの氷ダスト球の質量増加率 $(dm_p/dt)_{\text{cond}}$ は式 (4.18) より

$$\left(\frac{dm_p}{dt}\right)_{\text{cond}} = 4\pi R^2 m_v n_v v_{th,v} = 4\pi R^2 \rho_v v_{th,v} \quad (4.19)$$

と表せる. 式 (4.19) は少し見方を簡単にして, 面積 $4\pi R^2$ の標的に対して 速度 $v_{th,v}$ で運動する気体分子 1 個が衝突する典型的な時間 τ_v が $4\pi R^2 v_{th} \tau_v n_v = 1$ と書けることを考えれば

$$\left(\frac{dm_p}{dt}\right)_{\text{cond}} = \frac{m_v}{\tau_v} \quad (4.20)$$

と書くこともできる. この式 (4.19) あるいは式 (4.20) は凝縮によるダスト質量の増加を表すものであるが, 昇華によるダスト質量の減少についても同様な形で表すことが出来る. ただし, 凝縮過程においてはダスト表面に外側から衝突してくる分子に関してその密度を一律な値 ρ_v で表せたが, 昇華過程の場合のダスト表面から外側に飛び出ていく H_2O 分子に関しては, ダスト球表面上で飽和水蒸気量 ρ_{sat} であるとしてその密度で評価する. これより, 昇華による氷ダスト粒子の質量減少率 $(dm_p/dt)_{\text{sub}}$ は

$$\left(\frac{dm_p}{dt}\right)_{\text{sub}} = -4\pi R^2 \rho_{\text{sat}} v_{th,v} \quad (4.21)$$

となる. ただし, 飽和水蒸気量 ρ_{sat} は飽和水蒸気圧 P_{sat} と理想気体状態方程式

$$P_{\text{sat}} = \frac{\rho_{\text{sat}} k_B T}{\mu_{H_2O} m_H} \quad (4.22)$$

の関係が成り立つものとする. 以上の凝縮と昇華は本来, 同時進行的になされる過程であるから, 式 (4.19) と式 (4.21) を合わせることで凝縮・昇華による氷ダスト粒子の質量変化率 dm_p/dt について

$$\frac{dm_p}{dt} = 4\pi R^2 v_{th,v} (\rho_v - \rho_{\text{sat}}) \quad (4.23)$$

¹⁹本稿では熱速度 v_{th} を式 (4.15) を用いて表すことにするが, 文献によってこの熱速度の定義の仕方はまちまちである. 熱速度として速さ $|\mathbf{v}|$ の平均で定義することもあれば, 音速と特段区別しないこともある. なお, 本稿では $|\mathbf{v}|$ の平均を v_m , 音速を c_s という表記で表して区別することにする. それぞれマクスウェル・ボルツマン分布を用いると

$$v_{th} = \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}} \quad v_m = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad c_s = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \quad (4.16)$$

と評価できる (m は気体分子 1 粒子の質量).

が導かれる．式 (4.8) と式 (4.22) の辺々の商をとれば $P_{\text{sat}}/P_v = \rho_{\text{sat}}/\rho_v$ であるので，これを用いれば

$$\frac{dm_p}{dt} = 4\pi R^2 v_{th,v} \rho_v \left(1 - \frac{P_{\text{sat}}}{P_v}\right) \quad (4.24)$$

と表すこともできる [18]．つまり，水蒸気圧が飽和水蒸気圧に等しくなったとき凝縮と昇華が釣り合って，氷ダスト粒子の質量変化 すなわち 成長は止まることになる． $P_v = P_{\text{sat}}$ となるところを ice line と定義したことを思い出すと，ice line がまさしく，凝縮優勢の領域と昇華優勢の領域の境界であることがわかる．図 4.2 で言えば，青の実線で描いている ice line の内側（紙面右側）に広がる領域が $dm_p/dt > 0$ の「凝縮領域 (condensation zone)」であり，一方，ice line 外側（紙面左側）が $dm_p/dt < 0$ の「昇華領域 (sublimation zone)」となっている．

以上で述べた ice line 外側では氷ダストは成長し ($dm_p/dt > 0$)，外側では逆成長 ($dm_p/dt < 0$) するということは常に正しいが，ice line 自体が固定されていて動かないというわけではないことに注意すべきである．氷ダストに凝縮した分だけその周囲の水蒸気密度 ρ_v は減少し，また氷ダストから昇華した分だけ増加する． ρ_{sat} が時間に依存しない一方で²⁰， ρ_v が時間に依存するので時間とともに ice line の位置は動くことになって凝縮領域・昇華領域も少しずつ変わることになる．

4.2.2 ダスト粒子が大きい場合

前節のようにダスト粒子がガスの平均自由行程 (H_2O 分子のガスに対する平均自由行程) よりも小さい場合には，そのまわりに存在している気相 H_2O 分子が「弾道的」にダスト表面に飛び込んでくるもの，あるいはダスト表面から飛び去ったものとして凝縮・昇華を取り扱った．しかし，粒径が平均自由行程より大きい場合はそのように取り扱うことはできない．この場合には，ダスト粒子周囲の水蒸気は1つ1つの分子というよりも，まとまりとしての連続体あるいは流体であると見なして扱うのが有効である．そしてこのとき，氷ダストの成長の議論は時間依存しない球対称拡散方程式の問題へと帰着する [22]．つまり凝縮過程とはこの場合，水蒸気が過飽和なガスの中で氷ダスト粒子に向かう気相 H_2O 分子の拡散流が発生し，それが氷表面上で取り込まれることでダストが成長する行程に他ならないというわけである（昇華の過程についてもまた同様である）．

ある氷ダスト粒子に注目し，そのダスト球中心からの（局所的な）動径座標を r とし，動径 r に依存する氷ダスト粒子近傍周囲の水蒸気密度を $\rho_v(r)$ と表して，背景水蒸気密度 ρ_v と区別することにする．このとき r 方向に流れる気相蒸気分子の拡散フラックス F_v は拡散係数を ν_v として

$$F_v = -\rho_g \nu_v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \quad (4.25)$$

のように濃度拡散の形で書くことが出来る．ただし，氷ダスト粒子を局所的に見てそのまわりのガスを見た場合，ガス密度の勾配 $\partial \rho_g / \partial r$ および 水蒸気の濃度 ρ_v / ρ_g はともに十分小さいものと考えられることから，ここでは

$$F_v \simeq -\nu_v \frac{\partial \rho_v}{\partial r} \quad (4.26)$$

²⁰ 飽和水蒸気圧 P_{sat} および飽和水蒸気量 ρ_{sat} は，それぞれ式 (4.7) および式 (4.22) より，ともに温度 T のみにしか依らない．温度 T 自体は中心星からの輻射によって決まるので（式 (2.2) 参照），それが時間に対し一定であれば $P_{\text{sat}}, \rho_{\text{sat}}$ は時間に依存しないとできる．

と近似する. これより氷ダスト粒子周囲の水蒸気密度 ρ_v に関する拡散方程式は

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{F}_v \quad \therefore \quad \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \frac{\nu_v}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \rho_v}{\partial r} \right) \quad (4.27)$$

と表せることになる²¹. 今, 注目している氷粒子のまわりの水蒸気分子の拡散場がその氷粒子の成長過程によってそれほど影響を受けないものと考えれば, 拡散方程式 (4.27) の左辺は近似的にゼロと見なせるので

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \rho_v}{\partial r} \right) = 0 \quad (4.29)$$

とできる. これより $r^2(\partial \rho_v / \partial r) = \text{const.} \equiv A$ とでも置けば

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial r} = \frac{A}{r^2} \quad \therefore \quad \rho_v = -\frac{A}{r} + B \quad (4.30)$$

と表すことが出来る (B は積分定数). 氷ダスト粒子から十分遠方で背景水蒸気密度 ρ_v になるものとして $r \rightarrow \infty$ で $\rho_v \rightarrow \rho_v$, 加えて, 氷ダスト粒子表面では飽和水蒸気密度 ρ_{sat} になるものとして $r \rightarrow R$ で $\rho_v \rightarrow \rho_{\text{sat}}$ という境界条件を課すことで積分定数 A, B は決定出来て, 氷粒子まわりの気相 H_2O 分子の密度分布 $\rho_v(r)$ は

$$\rho_v(r) = -\frac{R}{r}(\rho_v - \rho_{\text{sat}}) + \rho_{\text{sat}} \quad (4.31)$$

と得られる. これより拡散流 (4.26) は

$$F_v(r) = -\nu_v \frac{R(\rho_v - \rho_{\text{sat}})}{r^2} \quad (4.32)$$

となる. この拡散フラックスが氷ダスト球表面でダスト質量 m_p へと取り込まれるとすれば, m_p の質量増加は

$$\begin{aligned} \frac{dm_p}{dt} &= -4\pi R^2 F_v(R) \\ &= 4\pi R \nu_v (\rho_v - \rho_{\text{sat}}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

と評価することが出来る. これで, 式 (4.23) に対応する $R \gtrsim l_g$ の場合のダスト質量の成長率が導かれたことになる. 比較しやすいようにさらに, 式 (4.33) において拡散係数として分子粘性の拡散係数 $\nu_v = v_{\text{m,v}} l_g / 2$ (付録 C 参照) を用いると

$$\frac{dm_p}{dt} = 4\pi R^2 v_{\text{th,v}} (\rho_v - \rho_{\text{sat}}) \cdot \frac{2l_g}{R} \quad (4.34)$$

と表される. これより, 式 (4.23) と式 (4.34) の右辺は $R = 2l_g$ のとき等しくなって, $R < 2l_g$ のときは式 (4.23) が, $R > 2l_g$ のときは式 (4.34) が氷ダストの質量変化率として適用できることがわかる.

²¹3次元極座標系 (r, θ, φ) における発散 (div) の形が³

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (4.28)$$

であることを用い, 今の場合, 球対称であることから角度 θ, φ に関する微分の項は消去されることを考慮した.

氷ダスト粒子の物質密度 ρ_s が一定, すなわち, 均質であるとすればダスト質量は

$$m_p = \frac{4}{3}\pi\rho_s R^3 \quad (4.35)$$

と書けることから, 質量増加の式 (4.23),(4.34) は

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = \frac{v_{th,v}}{\rho_s}(\rho_v - \rho_{sat}) & (R \leq 2l_g) \\ \frac{dR}{dt} = \frac{v_{th,v}}{\rho_s}(\rho_v - \rho_{sat}) \cdot \frac{2l_g}{R} & (R > 2l_g) \end{cases} \quad (4.36)$$

$$(4.37)$$

と粒径の成長を表す式に変形できる. このように粒径 R の時間変化で見ると, $R < 2l_g$ の場合は粒径に依らず一定の成長率であるのに対し, $R > 2l_g$ の場合は大きい粒子ほど成長率が落ちることになる.

本節では, 氷ダスト粒子を物質密度一定の均質球であると見なし簡単化した上で, その成長率を計算してきた. しかし, 実際の氷あるいは雪の結晶の凝縮・昇華過程はこれよりはるかに複雑である. さらに今回のモデルには, 氷ダストの核形成過程やダスト同士の衝突合体による成長効果等を入れていない. これには簡単化という目的ももちろん含まれているが, それ以外にも物理的な理由がある. 1つに, 実際の氷ダストは岩石質のコアを持っていることも多く, 自発的な氷の核形成よりも既にある核に対しての凝縮の方が有効に働くと考えられるためである [9][15]. 2つ目に, 本稿の主題となる 1mm サイズから 10cm サイズへのダストの成長過程では, ダスト粒子同士が衝突したとしても互いに反跳して合体しないという「跳ね返り (Bounce)」の問題があるためである [23]. 今回はダスト粒子の組成として H_2O のみを考えたが, 実際は多様な組成のバリエーションが考えられ, それを解析的・数値的に区別し取り扱うことが非常に難しいということもある. ただし, 氷ダストに関しては, 近年活発に研究されている空隙率を考慮したダストアグリゲイトの合体衝突による成長理論も非常に有効なシナリオである [24][25][26]. しかし, 本研究が目指す ice line 近傍における成長には, この高空隙ダストの成長シナリオは有効に働かないものと考えている. なぜなら, ice line 近傍の相変化が活発な領域では, 凝縮・昇華によって氷粒子はコンパクト球になってしまいアグリゲイトの空隙率が低くなるからである. 凝縮・昇華が活発な ice line 近傍の氷ダストに関しては, クッションの役割を果たすはずの空隙が少なくなることによって, アグリゲイトは衝突しても合体することなく「跳ね返ってしまう」というわけである.

以上のことから, 本節の解析結果 式 (4.36),(4.37) はあくまでもモデルとしての見積もりであり不定性が多く含まれているということに注意をしなければならない. 特に本稿の場合はただか 10cm 程度までのダスト成長しか考えないため, ほとんどが $R \lesssim l_g$ に当てはまることを考慮して, 以下では式 (4.23) および式 (4.36) を氷ダストの質量 m_p および粒径 R の成長率として採用し用いることにする.

5 数値計算手法

この章では、本研究で用いた数値計算手法について記述する．原始惑星系円盤内におけるガスとダストのダイナミクス、およびそれに伴う ice line 近傍における気相 (水蒸気)-固相 (氷) 間の質量交換による氷ダストの成長は、移流拡散方程式 (Advective-Diffusion equation)

$$\begin{cases} \frac{\partial f_p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial R}(v_R f_p) - \frac{\partial}{\partial r}(v_r f_p) + \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho_g D_p \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f_p}{\rho_g} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z}(v_z f_p) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho_g D_p \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_p}{\rho_g} \right) \right] \\ \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \int_0^\infty m_p \frac{\partial}{\partial R}(v_R f_p) dR + \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho_g D_g \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho_g D_g \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \right] \end{cases} \quad (5.1)$$

を解くことによって議論することができる．ここで、 f_p および ρ_v は氷ダストのサイズ分布関数および水蒸気の質量密度であり、また $m_p = (4\pi/3)\rho_s R^3$ は粒径 R の氷ダストの質量である．粒径が R から $R + dR$ の間にある氷ダスト粒子の数密度は、サイズ分布関数を用いて $f_p(R, r, z, t) dR$ と表され、これより氷ダストの空間質量密度は

$$\rho_p \equiv \int_0^\infty m_p f_p dR \quad (5.3)$$

と定義される．式 (5.1) 右辺の第 1 項が粒径 R 方向の移流 (粒径の成長)、第 2 項が円盤動径 r 方向の移流 (中心星落下)、第 4 項が円盤鉛直 z 方向の移流 (赤道面沈殿)、そして第 3 項および第 5 項が氷ダストの r 方向および z 方向の拡散を表している．また、式 (5.2) 右辺の第 1 項は氷ダストが成長した分 その周囲を取り巻く水蒸気量が減少する効果であり²²、同じく第 2 項および第 3 項は水蒸気の r 方向および z 方向の拡散を表している (水蒸気に関しては移流項はない)．³

この移流拡散方程式 (5.1),(5.2) は一見複雑に見えるが、以下に述べるような「演算子分割法 (operator splitting method)」を用いると、それぞれの右辺にある移流項および拡散項を各々あたかも部分的に扱うかのようにして f_p, ρ_v の時間発展を決めることができるため、数値計算のアルゴリズムは比較的単純なものとなる．数値解法の大まかな方針としてはこの演算子分割法を採用し、移流項には「風上差分法」を、拡散項には「クラנק・ニコルソン法」をそれぞれ用いることで氷ダストのサイズ分布関数 f_p および水蒸気密度 ρ_v の時間発展を解いていくことにする．

5.1 方程式の無次元化

氷ダストのサイズ分布関数 $f_p(R, r, z, t)$ および水蒸気の質量密度 $\rho_v(r, z, t)$ に関する移流拡散方程式 (5.1),(5.2) を数値的に解くことを考え、ここではまず本章以前で議論した内容を簡単にまとめ、方程式の無次元化を行う．式 (5.1),(5.2) において、ガスの分布については、常に中心星重力とガスの圧力が平衡 (静水圧平衡) しているものとして、式 (3.28) より

$$\rho_g = \frac{\Sigma_g}{\sqrt{2\pi} H_g} \exp \left[-\frac{z^2}{2H_g^2} \right] \quad (5.4)$$

²² 式 (5.1) の両辺に氷ダスト質量 m_p を掛けて粒径 R に関して積分すると、単純な質量密度 ρ_p に関する空間的な移流拡散方程式となって、その右辺第 1 項と式 (5.2) 右辺の第 1 項とが異符号で等しくなる．

とする. R, r, z 方向の各移流速度は式 (4.36) および式 (3.42) の第 1 式, 第 3 式より

$$v_R = \frac{v_{th,v}}{\rho_s}(\rho_v - \rho_{sat}) \quad (5.5)$$

$$v_r = -\frac{2\eta v_K}{\tau_s + \tau_s^{-1}} \quad (5.6)$$

$$v_z = -\Omega_K \tau_s z \quad (5.7)$$

であり ($v_{th,v}$ は H_2O 分子の熱速度, ρ_s は氷ダストの物質密度), 拡散係数については式 (2.6), (3.156) より水蒸気 (ガス) および氷ダストそれぞれについて

$$D_g = \alpha c_{s,g} H_g \quad (5.8)$$

$$D_p = \frac{D_g}{1 + \tau_s^2} \quad (5.9)$$

と表すことが出来る. ここで α は乱流粘性の α パラメータであり, 今回はデフォルトで $\alpha = 10^{-2}$ と評価する (式 (2.60) 参照). ガス分子・気相水蒸気の音速および熱速度はそれぞれマクスウェル・ボルツマン分布を適用して

$$c_{s,g} = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu_g m_H}} \quad (5.10)$$

$$c_{s,v} = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu_{H_2O} m_H}} = \sqrt{\frac{\mu_g}{\mu_{H_2O}}} c_{s,g} \quad (5.11)$$

$$v_{th,g} = \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi \mu_g m_H}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_{s,g} \quad (5.12)$$

$$v_{th,v} = \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi \mu_{H_2O} m_H}} = \sqrt{\frac{\mu_g}{2\pi \mu_{H_2O}}} c_{s,g} \quad (5.13)$$

と書ける (式 (4.16) 参照). ただし μ_g, μ_{H_2O} はそれぞれガスの平均分子量および H_2O の分子量であり, $\mu_g = 2.34$, $\mu_{H_2O} = 18$ である. 飽和水蒸気密度 ρ_{sat} については, クラウジウス・クラペイロンの式 (4.3) より飽和水蒸気圧が

$$P_{sat} = 6.034 \times 10^{12} \exp \left[-\frac{5938 \text{ K}}{T} \right] \quad [\text{dyn/cm}^2] \quad (5.14)$$

と書ける (式 (4.7)) ことを用いて

$$\rho_{sat} = \frac{P_{sat}}{c_{s,v}^2} = \frac{\mu_{H_2O}}{\mu_g} \frac{P_{sat}}{c_{s,g}^2} \quad (5.15)$$

と表せる. 円盤ガスの面密度分布および温度分布に関しては, 林モデル式 (2.1), (2.4) を採用, 円盤鉛直 z 方向には温度一定とする.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_g = 3.3 \times 10^2 \left(\frac{r}{3\text{AU}} \right)^{-3/2} \quad [\text{g/cm}^2] \\ T = 1.6 \times 10^2 \left(\frac{r}{3\text{AU}} \right)^{-1/2} \quad [\text{K}] \end{array} \right. \quad (5.16)$$

$$\quad (5.17)$$

また $\tau_s = \Omega_K t_{\text{stop}}$ は無次元制動時間 (Stokes number) を表しており

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{\text{stop}}^{(\text{Ep})} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{R \rho_s}{H_g \rho_g} \quad (\text{Epstein drag} : R \leq \frac{9}{4} l_g) \end{array} \right. \quad (5.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{\text{stop}}^{(\text{St})} = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{R^2 \rho_s}{H_g \rho_g l_g} \quad (\text{Stokes drag} : R > \frac{9}{4} l_g) \end{array} \right. \quad (5.19)$$

である. ここで l_g はガスの平均自由行程であり, 分子の衝突断面積 $\sigma = 2 \times 10^{-15} \text{ [cm}^2\text{]}$ を用いて,

$$\begin{aligned} l_g &= \frac{1}{n_g \sigma} = \frac{\mu_g m_H}{\rho_g \sigma} \\ &\simeq 29.4 \exp \left[\frac{z^2}{2 H_g^2} \right] \left(\frac{r}{3 \text{AU}} \right)^{11/4} \text{ [cm]} \end{aligned} \quad (5.20)$$

と表すことが出来る (式 (4.12) 参照). $l_g \simeq 30 \text{ cm}$ であることから少なくともデシメートルサイズまでの氷ダストの成長であれば, その周囲の気相蒸気は自由分子流と見なせるため, 今回の計算ではほとんどエプスタイン則が適用できるものと思ってよい. r 方向のドリフト速度に現れる η は, ガスとダストの相対速度を表す無次元のパラメータであり, 式 (3.25) より

$$\eta = -\frac{c_{s,g}^2}{2v_K^2} \frac{\partial \ln P_g}{\partial \ln r} = \frac{13}{8} \frac{H_g^2}{r^2} \quad (5.21)$$

$$\simeq 3.2 \times 10^{-3} \left(\frac{r}{3 \text{AU}} \right)^{1/2} \quad (5.22)$$

と書くことができる.

以下, 数値的に式 (5.1), (5.2) を解くために諸量の無次元化を行う. まず氷ダストの粒径に関しては $\tau_{\text{stop}}^{(\text{Ep})} \Big|_{r=3 \text{AU}} = 1$ となる $R = R_1^{(3 \text{AU})}$ を導入し, この R_1 および粒径 R_1 の氷ダストの質量 $m_{p,1}$

$$R_1^{(3 \text{AU})} \equiv \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{H_g^{(3 \text{AU})} \rho_{g,c}^{(3 \text{AU})}}{\rho_s}, \quad m_{p,1}^{(3 \text{AU})} \equiv \frac{4}{3} \pi \rho_s R_1^{(3 \text{AU})^3} \quad (5.23)$$

を用いて, R および m_p を無次元化する ($R_1^{(3 \text{AU})} \simeq 2.1 \times 10^2 \text{ cm}$).

$$\tilde{R} = \frac{R}{R_1^{(3 \text{AU})}}, \quad \tilde{m}_p = \frac{m_p}{m_{p,1}^{(3 \text{AU})}} = \tilde{R}^3 \quad (5.24)$$

次に, 動径座標 r , 鉛直座標 z , 時間 t に関してはそれぞれ 3AU , $H_g^{(3 \text{AU})}$, $1/\Omega_K^{(3 \text{AU})}$ で無次元化する.

$$\tilde{r} = \frac{r}{3 \text{AU}}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{H_g^{(3 \text{AU})}}, \quad \tilde{t} = \Omega_K^{(3 \text{AU})} t \quad (5.25)$$

$\rho_p = \int_0^\infty m_p f_p dR$ よりダスト分布関数 f_p は $\frac{[\rho]}{[m][R]}$ の次元を持っていることがわかるので, 質量密度に関しては $\rho_{g,c}^{(3 \text{AU})}$ で無次元化すれば

$$\tilde{f}_p = \frac{m_{p,1}^{(3 \text{AU})} R_1^{(3 \text{AU})}}{\rho_{g,c}^{(3 \text{AU})}} f_p, \quad \tilde{\rho}_v = \frac{\rho_v}{\rho_{g,c}^{(3 \text{AU})}} \quad (5.26)$$

となる. さらに座標 r と z のスケールの比を表すパラメータ $h \equiv \frac{H_g^{(3\text{AU})}}{3\text{AU}} \simeq 4.4 \times 10^{-2}$ を導入し, 各方向の移流速度と拡散係数も同様に無次元化すると

$$\tilde{v}_R = \frac{v_R}{R_1^{(3\text{AU})} \Omega_K^{(3\text{AU})}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \tilde{v}_{th,v} (\tilde{\rho}_v - \tilde{\rho}_{\text{sat}}) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu_g}{\mu_{\text{H}_2\text{O}}}} \tilde{r}^{-1/4} (\tilde{\rho}_v - \tilde{\rho}_{\text{sat}}) \quad (5.27)$$

$$\tilde{v}_r = \frac{v_r}{3\text{AU} \Omega_K^{(3\text{AU})}} = -\frac{2\eta \tilde{v}_K}{\tau_s + \tau_s^{-1}} = -\frac{13h^2}{4} \frac{1}{\tau_s + \tau_s^{-1}} \quad (5.28)$$

$$\tilde{v}_z = \frac{v_z}{c_{s,g}^{(3\text{AU})}} = -\tilde{\Omega}_K \tau_s \tilde{z} = -\tilde{r}^{-3/2} \tilde{z} \tau_s \quad (5.29)$$

$$\tilde{D}_g = \frac{D_g}{c_{s,g}^{(3\text{AU})} H_g^{(3\text{AU})}} = \alpha \tilde{c}_{s,g} \tilde{H}_g = \alpha \tilde{r} \quad (5.30)$$

$$\tilde{D}_p = \frac{D_p}{c_{s,g}^{(3\text{AU})} H_g^{(3\text{AU})}} = \frac{\alpha}{1 + \tau_s^2} \tilde{c}_{s,g} \tilde{H}_g = \frac{\alpha}{1 + \tau_s^2} \tilde{r} \quad (5.31)$$

となる. ただし, ここで

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{H}_g = \frac{H_g}{H_g^{(3\text{AU})}} = \tilde{r}^{5/4} \\ \tilde{\Omega}_K = \frac{\Omega_K}{\Omega_K^{(3\text{AU})}} = \tilde{r}^{-3/2} \\ \tilde{v}_K = \frac{v_K}{3\text{AU} \Omega_K^{(3\text{AU})}} = \tilde{r}^{-1/2} \\ \tilde{c}_{s,g} = \frac{c_{s,g}}{c_{s,g}^{(3\text{AU})}} = \tilde{r}^{-1/4} \\ \tilde{v}_{th,v} = \frac{v_{th,v}}{c_{s,g}^{(3\text{AU})}} = \sqrt{\frac{\mu_g}{2\pi\mu_{\text{H}_2\text{O}}}} \tilde{r}^{-1/4} \end{array} \right. \quad (5.32)$$

および $\eta \tilde{v}_K = 13h^2/8$ を用いた. このとき $\tilde{\rho}_g, \tilde{\rho}_{\text{sat}}, \tau_s^{(\text{Ep})}$ を無次元量で表せば

$$\tilde{\rho}_g = \frac{\rho_g}{\rho_{g,c}^{(3\text{AU})}} = \tilde{r}^{-11/4} \exp \left[\frac{-\tilde{z}^2}{2\tilde{r}^{5/2}} \right] \quad (5.33)$$

$$\tilde{\rho}_{\text{sat}} = \frac{\rho_{\text{sat}}}{\rho_{g,c}^{(3\text{AU})}} = \frac{\mu_{\text{H}_2\text{O}}}{\mu_g} \tilde{r}^{1/2} \tilde{P}_{\text{sat}} \quad (5.34)$$

$$\tau_s^{(\text{Ep})} = \frac{\tilde{R}}{\tilde{H}_g \tilde{\rho}_g} = \tilde{R} \tilde{r}^{3/2} \exp \left[\frac{\tilde{z}^2}{2\tilde{r}^{5/2}} \right] \quad (5.35)$$

と書くことが出来る. ただし $\tilde{P}_{\text{sat}} = P_{\text{sat}}/P_{g,c}^{(3\text{AU})}$ としてある.

以上を用いて, 移流拡散方程式 (5.1), (5.2) を無次元化すると

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{f}_p}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{R}} (\tilde{v}_R \tilde{f}_p) - \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{v}_r \tilde{f}_p) + h^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[\tilde{\rho}_g \tilde{D}_p \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\tilde{f}_p}{\tilde{\rho}_g} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\tilde{v}_z \tilde{f}_p) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\tilde{\rho}_g \tilde{D}_p \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\tilde{f}_p}{\tilde{\rho}_g} \right) \right] \\ \frac{\partial \tilde{\rho}_v}{\partial \tilde{t}} = \int_0^\infty \tilde{m}_p \frac{\partial}{\partial \tilde{R}} (\tilde{v}_R \tilde{f}_p) d\tilde{R} + h^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[\tilde{\rho}_g \tilde{D}_g \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\tilde{\rho}_v}{\tilde{\rho}_g} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\tilde{\rho}_g \tilde{D}_g \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\tilde{\rho}_v}{\tilde{\rho}_g} \right) \right] \end{array} \right. \quad (5.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{f}_p}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{R}} (\tilde{v}_R \tilde{f}_p) - \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{v}_r \tilde{f}_p) + h^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[\tilde{\rho}_g \tilde{D}_p \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\tilde{f}_p}{\tilde{\rho}_g} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\tilde{v}_z \tilde{f}_p) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\tilde{\rho}_g \tilde{D}_p \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\tilde{f}_p}{\tilde{\rho}_g} \right) \right] \\ \frac{\partial \tilde{\rho}_v}{\partial \tilde{t}} = \int_0^\infty \tilde{m}_p \frac{\partial}{\partial \tilde{R}} (\tilde{v}_R \tilde{f}_p) d\tilde{R} + h^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[\tilde{\rho}_g \tilde{D}_g \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\tilde{\rho}_v}{\tilde{\rho}_g} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\tilde{\rho}_g \tilde{D}_g \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\tilde{\rho}_v}{\tilde{\rho}_g} \right) \right] \end{array} \right. \quad (5.37)$$

となる.

5.2 演算子分割法 (Operator splitting method)

初期値問題の方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{L}_1 f + \mathcal{L}_2 f + \cdots + \mathcal{L}_N f \quad (5.38)$$

があるとする. ここで右辺は N 個の何らかの演算子 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_N$ が加法的に f に作用していることを表している. 仮に, このように分割された演算子のうちそれぞれ一つだけが右辺にある場合については既に, 時間ステップ n から $n+1$ に f を更新する差分スキームはわかっているものとして, これらの更新を記号的に

$$\begin{cases} f^{n+1} = \mathcal{F}_1(f^n, \Delta t) \\ f^{n+1} = \mathcal{F}_2(f^n, \Delta t) \\ \vdots \\ f^{n+1} = \mathcal{F}_N(f^n, \Delta t) \end{cases} \quad (5.39)$$

と表す. このとき, 式 (5.38) のように N 個の演算子の和で時間発展が表されている場合の時間ステップ更新の一つの方法として

$$\begin{cases} f^{n+1/N} = \mathcal{F}_1(f^n, \Delta t) \\ f^{n+2/N} = \mathcal{F}_2(f^{n+1/N}, \Delta t) \\ \vdots \\ f^{n+1} = \mathcal{F}_N(f^{n+(N-1)/N}, \Delta t) \end{cases} \quad (5.40)$$

とすることができる. 以上のように, 分割された演算子それぞれについて適当な差分スキームを当て, 式 (5.40) のような一連の更新によって時間発展を記述する方法を「演算子分割法」あるいは「部分段階法」という [27][28].

今回考える移流拡散方程式 (5.1), (5.2) も時間発展が演算子の和の形で表されているので, この演算子分割法を使うことが出来る. 表記上の簡便のため, 以下では無次元した移流拡散方程式 (5.36), (5.37) を

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial R}(uf) - \frac{\partial}{\partial r}(vf) + h^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f}{\rho} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z}(wf) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho D \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f}{\rho} \right) \right] \end{cases} \quad (5.41)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \int_0^\infty R^3 \frac{\partial}{\partial R}(uf) dR + h^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho C \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{y}{\rho} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho C \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{\rho} \right) \right] \end{cases} \quad (5.42)$$

と表すことにする. 数値解法としては, それぞれ移流項には「風上差分法」を使い, 拡散項には「クラנק・ニコルソン法」を使って時間発展を解いていくことにする.

離散化としては R, r, z, t それぞれに関して以下のようにステップ点を取ることにする.

$$\begin{cases} R_i = T_R(R'_i) & (i = 0, 1, \dots, N_R) \\ r_j = r_{ini} + (j-1)\Delta r & (j = 0, 1, \dots, N_r+2) \\ z_k = T_z(z'_k) & (k = 0, 1, \dots, N_z+2) \\ t_n = t_{ini} + n\Delta t & (n = 0, 1, \dots, N_t) \end{cases} \quad (5.43)$$

なお, r_0, r_{N_r+2} および z_0, z_{N_z+2} はゴーストメッシュであり, それぞれ r, z 方向の拡散を解くために仮想的に挿入しているメッシュである. また, r, t に関してはそれぞれ $\Delta r, \Delta t$ で等間隔に離散化

してある一方で R, z に関しては, R, z で等間隔に離散化するのではなく, それぞれ以下のように R', z' について等間隔に離散化し, それを 適当な関数 $T_R(R'), T_z(z')$ を用いて変換することで不等間隔メッシュとしている.

$$R'_i = R'_{ini} + i\Delta R' \quad (i = 0, 1, \dots, N_R) \quad (5.44)$$

$$z'_k = z'_{ini} + (k-1)\Delta z' \quad (k = 0, 1, \dots, N_z + 2) \quad (5.45)$$

5.3 時間発展

5.3.1 ダスト分布関数

凝縮・昇華項 (R 方向)

氷ダストの粒径 R 方向の移流項 (凝縮・昇華項) のみが右辺にある方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial R}(uf) \quad (5.46)$$

について考える. この両辺を R で積分すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{R_{i-1/2}}^{R_{i+1/2}} f dR = - \left[uf \right]_{R_{i-1/2}}^{R_{i+1/2}} \quad (5.47)$$

となる. ただし $R_{i-1/2}, R_{i+1/2}$ は半メッシュ点での R の値を表していて, 有限の体積を持つセルを考えた場合のセル境界を意味している (図 5.1 参照). 一つのセル内で f の値は一定であるとすれば, f は積分の外に出て

$$(R_{i+1/2} - R_{i-1/2}) \frac{\partial}{\partial t} f_i = - \left\{ (uf)_{R_{i+1/2}} - (uf)_{R_{i-1/2}} \right\} \quad (5.48)$$

とできる. さらに時間に関しても差分化することで

$$f_i^{n+1/5} = f_i^n - \frac{\Delta t}{R_{i+1/2} - R_{i-1/2}} \left\{ (\phi_R)_{i+1/2}^n - (\phi_R)_{i-1/2}^n \right\} \quad (5.49)$$

を得る. ここで $f_{i,j,k}^n \equiv f(R_i, r_j, z_k, t_n)$ であり, 省略記号 f_i^n は両辺のすべての項に関して $r = r_j, z = z_k$ であることから表記上の簡略化のために用いている. 以下同様に, 下付きの添え字については, 特に混乱を招く恐れがない限り更新に関係する座標のインデックスのみ書くことにする. また, 式 (5.49) の $(\phi_R)_{i-1/2}^n, (\phi_R)_{i+1/2}^n$ はそれぞれ半メッシュ点 $R_{i-1/2}, R_{i+1/2}$ における R 方向の数値流束を表しており, 風上差分の考え方から

$$(\phi_R)_{i+1/2}^n = u^n \begin{cases} f_i^n & (u^n > 0) \\ f_{i+1}^n & (u^n < 0) \end{cases} \quad (5.50)$$

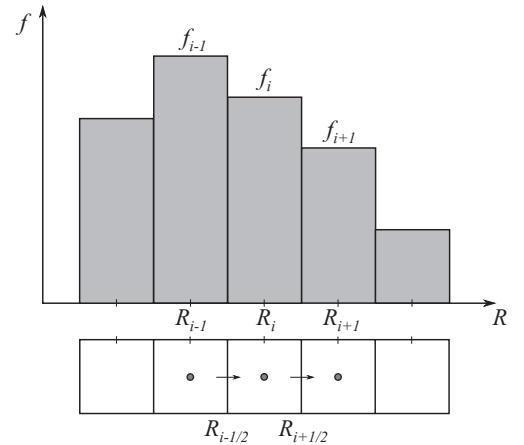


図 5.1: セル境界を通る流束

とする [28].

$$Cond_{i,j,k}^n \equiv -\frac{\Delta t \{(\phi_R)_{i+1/2,j,k}^n - (\phi_R)_{i-1/2,j,k}^n\}}{R_{i+1/2} - R_{i-1/2}} \quad (5.51)$$

とすれば, 時間 Δt のあいだに凝縮・昇華項によって増加する氷ダスト全体としての質量密度は $r = r_j, z = z_k$ において

$$\begin{aligned} Cond\ sum_{j,k}^n &= -\Delta t \int_0^\infty R^3 \frac{\partial}{\partial R} (u f) dR \\ &= \sum_i Cond_{i,j,k}^n \int_{R_{i-1/2}}^{R_{i+1/2}} R^3 dR \\ &= \frac{1}{4} \sum_i Cond_{i,j,k}^n (R_{i+1/2}^4 - R_{i-1/2}^4) \end{aligned} \quad (5.52)$$

と表せることになる.

ドリフト項 (r 方向)

円盤 r 方向の移流項 (ドリフト項) のみが右辺にある方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} (v f) \quad (5.53)$$

に関しても, 式 (5.49) と同じように保存形の風上差分を用いて差分化すれば

$$f_j^{n+2/5} = f_j^{n+1/5} - \frac{\Delta t}{\Delta r} \left\{ (\phi_r)_{j+1/2}^{n+1/5} - (\phi_r)_{j-1/2}^{n+1/5} \right\} \quad (5.54)$$

$$(\phi_r)_{j+1/2}^{n+1/5} = \begin{cases} v_j f_j^{n+1/5} & (v_j f_j^{n+1/5} + v_{j+1} f_{j+1}^{n+1/5} > 0) \\ v_{j+1} f_{j+1}^{n+1/5} & (v_j f_j^{n+1/5} + v_{j+1} f_{j+1}^{n+1/5} < 0) \end{cases} \quad (5.55)$$

とできる.

拡散項 (r 方向)

円盤 r 方向の拡散項のみが右辺にある方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = h^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f}{\rho} \right) \right] \quad (5.56)$$

についてはクランク・ニコルソン法を用いて更新を考える [27][28]. 拡散に関する演算子の作用を

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f}{\rho} \right) \right] \right|_j^{n+2/5} \\ &= \frac{1}{\Delta r} \left\{ \rho_{j+1/2} D_{j+1/2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f}{\rho} \right) \Big|_{j+1/2}^{n+2/5} - \rho_{j-1/2} D_{j-1/2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f}{\rho} \right) \Big|_{j-1/2}^{n+2/5} \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta r} \left\{ \rho_{j+1/2} D_{j+1/2} \frac{1}{\Delta r} \left(\frac{f_{j+1}^{n+2/5}}{\rho_{j+1}} - \frac{f_j^{n+2/5}}{\rho_j} \right) - \rho_{j-1/2} D_{j-1/2} \frac{1}{\Delta r} \left(\frac{f_j^{n+2/5}}{\rho_j} - \frac{f_{j-1}^{n+2/5}}{\rho_{j-1}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{(\Delta r)^2} \left\{ \frac{\rho_{j-1/2} D_{j-1/2}}{\rho_{j-1}} f_{j-1}^{n+2/5} - \frac{\rho_{j-1/2} D_{j-1/2} + \rho_{j+1/2} D_{j+1/2}}{\rho_j} f_j^{n+2/5} + \frac{\rho_{j+1/2} D_{j+1/2}}{\rho_{j+1}} f_{j+1}^{n+2/5} \right\} \\ &= -\frac{2}{h^2 \Delta t} (a_r)_j f_{j-1}^{n+2/5} + \frac{2}{h^2 \Delta t} \{1 - (b_r)_j\} f_j^{n+2/5} - \frac{2}{h^2 \Delta t} (c_r)_j f_{j+1}^{n+2/5} \end{aligned} \quad (5.57)$$

と差分化して表すことにする. ただし, ここで

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_r)_j \equiv -\frac{h^2 \Delta t}{2(\Delta r)^2} \frac{\rho_{j-1/2} D_{j-1/2}}{\rho_{j-1}} \\ (b_r)_j \equiv 1 + \frac{h^2 \Delta t}{2(\Delta r)^2} \frac{\rho_{j-1/2} D_{j-1/2} + \rho_{j+1/2} D_{j+1/2}}{\rho_j} \\ (c_r)_j \equiv -\frac{h^2 \Delta t}{2(\Delta r)^2} \frac{\rho_{j+1/2} D_{j+1/2}}{\rho_{j+1}} \end{array} \right. \quad (j = 1, 2, \dots, N_r + 1) \quad (5.58)$$

である. 式 (5.56) を半陽的・半陰的に

$$\frac{f_j^{n+3/5} - f_j^{n+2/5}}{\Delta t} = \frac{h^2}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f}{\rho} \right) \right] \Big|_j^{n+2/5} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f}{\rho} \right) \right] \Big|_j^{n+3/5} \right\} \quad (5.59)$$

と差分化すれば, 式 (5.57) を代入することで

$$(a_r)_j f_{j-1}^{n+3/5} + (b_r)_j f_j^{n+3/5} + (c_r)_j f_{j+1}^{n+3/5} = (q_r)_j^{n+2/5} \quad (5.60)$$

$$(q_r)_j^{n+2/5} \equiv -(a_r)_j f_{j-1}^{n+2/5} + \{2 - (b_r)_j\} f_j^{n+2/5} - (c_r)_j f_{j+1}^{n+2/5} \quad (5.61)$$

$$(j = 1, 2, \dots, N_r + 1)$$

を得る. $j = 0, j = N_r + 2$ における境界条件を式 (5.60) に追加すると, 連立方程式は結局

$$\begin{bmatrix} (b_r)_0 & (c_r)_0 & & & 0 \\ (a_r)_1 & (b_r)_1 & (c_r)_1 & & \\ & (a_r)_2 & (b_r)_2 & (c_r)_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & (a_r)_{N_r+1} & (b_r)_{N_r+1} & (c_r)_{N_r+1} \\ 0 & & & & (a_r)_{N_r+2} & (b_r)_{N_r+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^{n+3/5} \\ f_1^{n+3/5} \\ f_2^{n+3/5} \\ \vdots \\ f_{N_r+1}^{n+3/5} \\ f_{N_r+2}^{n+3/5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (q_r)_0^{n+2/5} \\ (q_r)_1^{n+2/5} \\ (q_r)_2^{n+2/5} \\ \vdots \\ (q_r)_{N_r+1}^{n+2/5} \\ (q_r)_{N_r+2}^{n+2/5} \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

という 3 重対角の形になるので, F 節の方法を用いることで容易に $f_j^{n+3/5}$ が求められる. なお, この左辺の行列が今は時間に依存しない格好になっているので LU 分解自体は最初の 1 回だけ行えばよく, 後は代入操作のみで計算が遂行できる.

沈殿項 (z 方向)

円盤 z 方向の移流項 (沈殿項) のみが右辺にある方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(w f) \quad (5.63)$$

に関しても, 式 (5.49) および式 (5.54) と同じように保存形の風上差分を用いて差分化するが, z 方向のメッシュについては不等間隔であることに注意して

$$f_k^{n+4/5} = f_k^{n+3/5} - \frac{\Delta t}{z_{k+1/2} - z_{k-1/2}} \left\{ (\phi z)_{k+1/2}^{n+3/5} - (\phi z)_{k-1/2}^{n+3/5} \right\} \quad (5.64)$$

$$(\phi_z)_{k+1/2}^{n+3/5} = \begin{cases} w_k f_k^{n+3/5} & (w_k f_k^{n+3/5} + w_{k+1} f_{k+1}^{n+3/5} > 0) \\ w_{k+1} f_{k+1}^{n+3/5} & (w_k f_k^{n+3/5} + w_{k+1} f_{k+1}^{n+3/5} < 0) \end{cases} \quad (5.65)$$

とできる.

拡散項 (z 方向)

円盤 z 方向の拡散項のみが右辺にある方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho D \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f}{\rho} \right) \right] \quad (5.66)$$

については, r 方向の拡散と同様にクランク・ニコルソン法を用いて

$$(a_z)_k f_{k-1}^{n+1} + (b_z)_k f_k^{n+1} + (c_z)_k f_{k+1}^{n+1} = (q_z)_k^{n+4/5} \quad (k = 1, 2, \dots, N_z + 1) \quad (5.67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_z)_k \equiv -\frac{\Delta t}{2(z_{k+1/2} - z_{k-1/2})(z_k - z_{k-1})} \frac{\rho_{k-1/2} D_{k-1/2}}{\rho_{k-1}} \\ (b_z)_k \equiv 1 + \frac{\Delta t}{2(z_{k+1/2} - z_{k-1/2})} \left(\frac{1}{z_k - z_{k-1}} \frac{\rho_{k-1/2} D_{k-1/2}}{\rho_k} + \frac{1}{z_{k+1} - z_k} \frac{\rho_{k+1/2} D_{k+1/2}}{\rho_k} \right) \\ (c_z)_k \equiv -\frac{\Delta t}{2(z_{k+1/2} - z_{k-1/2})(z_{k+1} - z_k)} \frac{\rho_{k+1/2} D_{k+1/2}}{\rho_{k+1}} \\ (q_z)_k^{n+4/5} \equiv -(a_z)_k f_{k-1}^{n+4/5} + \{2 - (b_z)_k\} f_k^{n+4/5} - (c_z)_k f_{k+1}^{n+4/5} \end{array} \right. \quad (k = 1, 2, \dots, N_z + 1) \quad (5.68)$$

と表すことが出来る.

以上の一連の行程で時間ステップが一つ進められ, 各時間ステップで順次同じ計算行程を遂行することでダスト分布関数 f の時間発展を解くことが出来る.

5.3.2 水蒸気密度

凝縮・昇華項 (質量保存)

時間 Δ のあいだの $r = r_j, z = z_k$ における氷ダストの質量密度の増加量は式 (5.52) より $Cond\ sum_{j,k}^n$ と書いており, 氷ダストと水蒸気の質量の和は保存することを用いると, 凝縮・昇華項による水蒸気密度の変化は

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \int_0^\infty R^3 \frac{\partial}{\partial R} (u f) dR \quad (5.69)$$

から

$$y_{j,k}^{n+1/3} = y_{j,k}^n - Cond\ sum_{j,k}^n \quad (5.70)$$

と差分化することが出来る.

拡散項 (r 方向)

円盤 r 方向の拡散項のみが右辺にある方程式

$$\frac{\partial y}{\partial t} = h^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho C \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{y}{\rho} \right) \right] \quad (5.71)$$

については, 氷ダストに関する拡散項の取り扱いと同様にして

$$(\bar{a}_r)_j y_{j-1}^{n+2/3} + (\bar{b}_r)_j y_j^{n+2/3} + (\bar{c}_r)_j y_{j+1}^{n+2/3} = (\bar{q}_r)_j^{n+1/3} \quad (j = 1, 2, \dots, N_r + 1) \quad (5.72)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{a}_r)_j \equiv -\frac{h^2 \Delta t}{2(\Delta r)^2} \frac{\rho_{j-1/2} C_{j-1/2}}{\rho_{j-1}} \\ (\bar{b}_r)_j \equiv 1 + \frac{h^2 \Delta t}{2(\Delta r)^2} \frac{\rho_{j-1/2} C_{j-1/2} + \rho_{j+1/2} C_{j+1/2}}{\rho_j} \\ (\bar{c}_r)_j \equiv -\frac{h^2 \Delta t}{2(\Delta r)^2} \frac{\rho_{j+1/2} C_{j+1/2}}{\rho_{j+1}} \\ (\bar{q}_r)_j^{n+2/3} \equiv -(\bar{a}_r)_j y_{j-1}^{n+1/3} + \{2 - (\bar{b}_r)_j\} y_j^{n+1/3} - (\bar{c}_r)_j y_{j+1}^{n+1/3} \end{array} \right. \quad (j = 1, 2, \dots, N_r + 1) \quad (5.73)$$

と表すことが出来る.

拡散項 (z 方向)

円盤 z 方向の拡散項のみが右辺にある方程式

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho C \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{\rho} \right) \right] \quad (5.74)$$

についても

$$(\bar{a}_z)_k y_{k-1}^{n+1} + (\bar{b}_z)_k y_k^{n+1} + (\bar{c}_z)_k y_{k+1}^{n+1} = (\bar{q}_z)_k^{n+2/3} \quad (k = 1, 2, \dots, N_z + 1) \quad (5.75)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{a}_z)_k \equiv -\frac{\Delta t}{2(z_{k+1/2} - z_{k-1/2})(z_k - z_{k-1})} \frac{\rho_{k-1/2} C}{\rho_{k-1}} \\ (\bar{b}_z)_k \equiv 1 + \frac{\Delta t}{2(z_{k+1/2} - z_{k-1/2})} \left(\frac{1}{z_k - z_{k-1}} \frac{\rho_{k-1/2} C}{\rho_k} + \frac{1}{z_{k+1} - z_k} \frac{\rho_{k+1/2} C}{\rho_k} \right) \\ (\bar{c}_z)_k \equiv -\frac{\Delta t}{2(z_{k+1/2} - z_{k-1/2})(z_{k+1} - z_k)} \frac{\rho_{k+1/2} C}{\rho_{k+1}} \\ (\bar{q}_z)_k^{n+2/3} \equiv -(\bar{a}_z)_k y_{k-1}^{n+2/3} + \{2 - (\bar{b}_z)_k\} y_k^{n+2/3} - (\bar{c}_z)_k y_{k+1}^{n+2/3} \end{array} \right. \quad (k = 1, 2, \dots, N_z + 1) \quad (5.76)$$

と表すことが出来る.

6 テストプログラム

本章では数値計算コードおよびモデルの正確性の確認のために行ったテストプログラムについて記述する. ここで示す内容は単なるテストにとどまらず, 簡潔な設定と単純な状況の下での計算結果から素過程の物理現象を定性的に垣間見ることが出来る点で重要である. 以下では大きく, 鉛直 z 方向の移流拡散項についてのテストプログラム, 粒径 R 方向の移流をもたらず凝縮・昇華項についてのテストプログラムの2つに分けて確認していく. この2つに着目する理由は, 以下に示すように両者ともに密度分布に関して理論解が存在するため数値計算結果と比較照合しやすいためである.

6.1 円盤鉛直方向の移流拡散

ダスト粒子について, 円盤鉛直 z 方向の移流拡散項のみを考えて, 移流拡散方程式

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(v_z \rho_p) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho_g D_p \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_p}{\rho_g} \right) \right] \quad (6.1)$$

を解くことを考える. ただし $\rho_p(z, t)$ はダスト粒子の空間質量密度, $D_p(z)$ は同じくダスト粒子の拡散係数である. 式 (6.1) の定常解は, フラックスについて

$$v_z \rho_p - \rho_g D_p \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_p}{\rho_g} \right) = 0 \quad (6.2)$$

のときに与えられ, z 方向の移流速度 v_z を沈降運動の終端速度 $-\Omega_K \tau_s z$ とし, 拡散係数を $D_p = D_g/(1 + \tau_s^2)$ と評価した場合, ダストの定常密度分布は式 (3.148) 以下の計算から

$$\rho_p^{(ana)} = \rho_{p,c} \exp \left[-\frac{z^2}{2H_g^2} - \frac{1}{\alpha} \left\{ \tau_{s,c} (e^{z^2/2H_g^2} - 1) + \frac{\tau_{s,c}^3}{3} (e^{3z^2/2H_g^2} - 1) \right\} \right] \quad (6.3)$$

のように求めることができる (式 (3.154)). ここで $\rho_{p,c}, \tau_{s,c}$ はそれぞれ円盤赤道面での ρ_p, τ_s の値を表している.

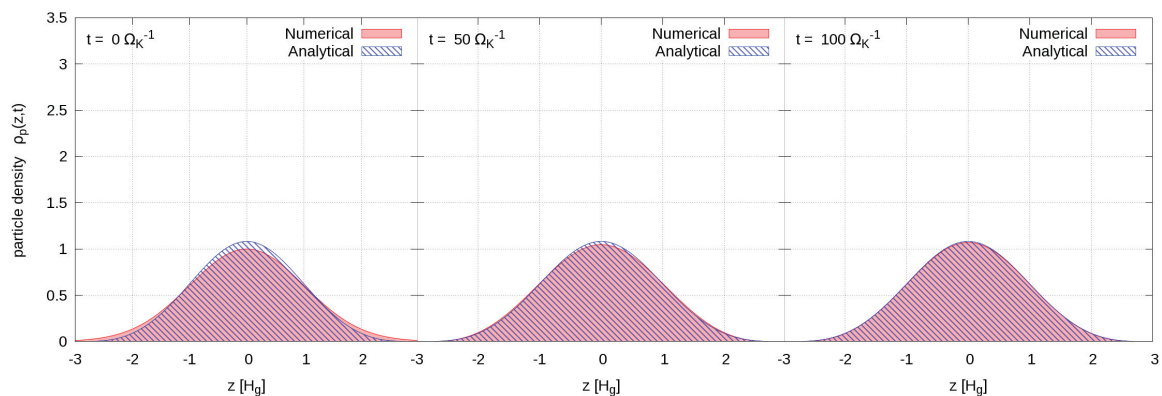
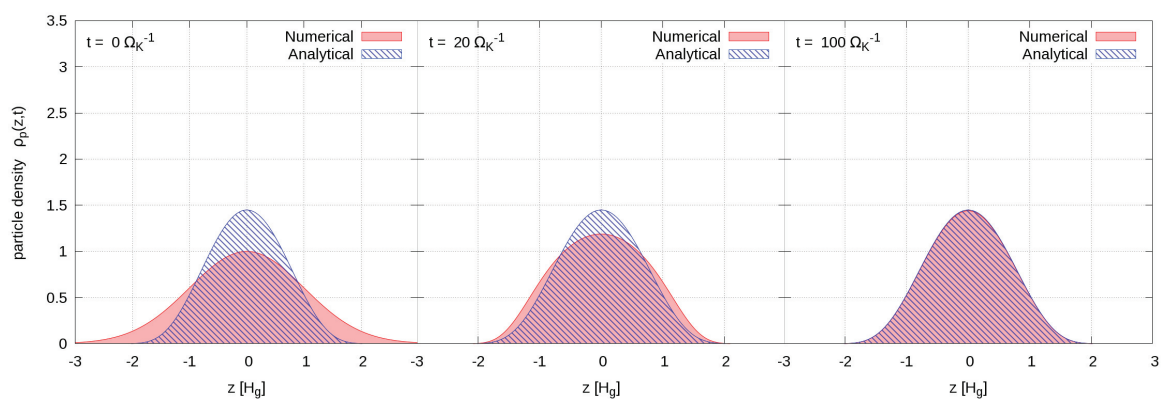
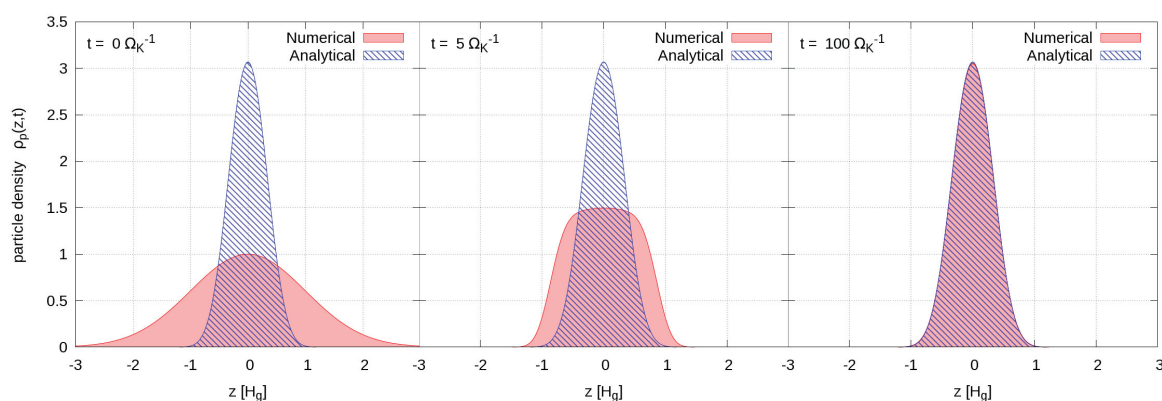
物理的には定常状態は以下のように説明できる. 移流項 $v_z \rho_p \leq 0$ が示すようにダスト粒子は中心星重力の鉛直成分を受けて赤道面に沈殿しようとするが, 拡散項 $-\rho_g D_p \partial_z(\rho_p/\rho_g) \geq 0$ があるために乱流拡散によって濃度の集中は妨げられる. 妨げられるとは言っても, 時間とともにダストの沈殿はじりじりと進み, いずれ濃度を均そうとする拡散の効果とバランスするところで沈殿は停止し定常状態となる. 式 (6.3) はそのときのダスト粒子の密度を表しているというわけである.

この定常状態についての理論解 (6.3) に対して, 数値的に解いた $\rho_p(z, t)$ の結果を図 6.1, 図 6.2, 図 6.3 に示す. 図 6.1 が粒径 $R = 0.001 R_1$ のダスト粒子について移流拡散を解いたものであり, 同じく図 6.2, 図 6.3 がそれぞれ $R = 0.01 R_1, R = 0.1 R_1$ のダストについて密度分布の時間発展を解いたものになっている. いずれの場合も乱流粘性の α パラメータの値は $\alpha = 10^{-2}$ であり, 紙面上で赤色に染められている部分が数値解を, 斜線部の領域が理論解を表している.

これらの図から理論解と数値解とが一致している様子が見て取れ, 数値計算コードが正しく移流拡散を解けていることがわかる. 物理的には, 粒径 R が大きいダストの方がよく赤道面に沈殿して

いることが容易に理解できる。これはダストサイズが大きい方がガスとのカップリングが弱く、制動時間 τ_s がより長くなることが要因である。 τ_s の値が大きくなると、沈殿 $v_z = -\Omega_K \tau_s z$ が強くなり、一方では拡散係数 $D_p = D_g/(1 + \tau_s^2)$ が落ちるため、結果として定常状態では沈殿項 (移流項) が効いて密度分布 ρ_p は赤道面 $z = 0$ に対して鋭くなる。

また、図の時間発展の様子から、円盤上層すなわち z が大きいところで沈降運動が激しいことが読み取れる。これについては、ガスの密度 ρ_g が $\exp(-z^2/2H_g^2)$ に比例する依存性で z に関して小さくなる という円盤の成層構造が関係している。今回の評価では、沈殿速度を z 方向の運動の終端速度 $-\Omega_K \tau_s z$ で見積もっており、制動時間 τ_s はエプスタイン則で ρ_g に反比例するため、計算上、円盤上層のガス密度が小さい部分で急激なダストの沈降が起こっているというわけである。ただし、これはあくまで今回採用したモデルでの結果であって、本来のものより沈殿速度を大きく見積もりすぎているかもしれない。というのも沈殿速度を終端速度で近似して妥当なのは $\tau_s \ll 1$ の場合のダストが過減衰運動する場合に限られるからである。 $\tau_s \gg 1$ の場合 ダストは、ガスとのカップルが弱すぎて z 方向にはただ単に調和振動するだけか、あるいは、小さなガス抵抗を受けながら減衰振動を行う。この場合、終端速度で沈殿速度を評価する近似は破綻してしまう。とは言え、今回の数値計算結果ほどの激しいダストの沈降はないかも知れないが実際のダストも、円盤上層のサイズが大きいものは素早く赤道面へと沈降するはずでもあるため、これは大きな問題ではないと考えられる。

図 6.1: 移流拡散 (z 方向) テスト [$R = 0.001R_1 \sim 0.1\text{cm}$]図 6.2: 移流拡散 (z 方向) テスト [$R = 0.01R_1 \sim 1\text{cm}$]図 6.3: 移流拡散 (z 方向) テスト [$R = 0.1R_1 \sim 10\text{cm}$]

6.2 凝縮・昇華 (粒径方向の移流)

氷ダスト粒子について凝縮・昇華のみを考慮した移流方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial f_p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial R}(v_R f_p) \\ \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \int_0^\infty m_p \frac{\partial}{\partial R}(v_R f_p) dR \\ v_R = \frac{v_{th,v}}{\rho_s}(\rho_v - \rho_{sat}) \end{cases} \quad (6.4)$$

を解くことを考える。ただし、凝縮・昇華項のみを考慮するとは言いながら、ここでは形式的に z 座標についてのダスト粒子および水蒸気の分布を考えて、 $f_p = f_p(R, z, t)$ 、 $\rho_v = \rho_v(z, t)$ として移流方程式を解くことにする。つまり、 z 方向に関して空間的な運動がない場合に凝縮・昇華項を通して氷ダストと水蒸気がどのように質量をやり取りするのかという問題を考える。式 (6.4) は、タイムスケールが長い空間的な移流拡散項を無視し、タイムスケールの短い凝縮・昇華項に焦点を当てた方程式であるとも言えるため、この問題は単なるテストプログラムとしての問題以上に重要な意味を含んでいる。

まずは、理論的に氷ダストと水蒸気の定常空間分布を求めることを考える。式 (6.4) の第 3 式より、粒径の成長速度 $v_R(z, t)$ は粒径 R 自体には依らない形をしている。このことから分布関数 $f_p(R, z, t)$ は、 R 方向に対して分布の形状は変えずに、その時その場所における $v_R(z, t)$ で単に並進するだけである。すべての粒子について初期粒径を $R = R_0 > 0$ と与え、初期分布をデルタ関数 δ および R, t に関しての定数 $f_0(z)$ を用いて

$$f_p(R, z, 0) = f_0(z) \delta(R - R_0) \quad (6.5)$$

とすれば、このとき式 (6.4) の形式解はヘヴィサイドの階段関数 θ を含む

$$\begin{aligned} f_p(R, z, t) &= f_0(z) \theta(R) \delta(R - R_0 - \int_0^t v_R(z, t') dt') \\ &= f_0(z) \theta(R) \delta(R - a(z, t)) \end{aligned} \quad (6.6)$$

のような式で表すことが出来る。ただしここで、階段関数 $\theta(R)$ は、粒径 R が負の領域でダスト分布関数を考えないために導入したものである。また式 (6.6) において登場する $a(z, t)$ に関しては

$$a(z, t) \equiv R_0 + \int_0^t v_R(z, t') dt' \quad (6.7)$$

と定義した。このサイズ分布関数 (6.4) からダストの空間質量密度 $\rho_p(z, t)$ は

$$\begin{aligned} \rho_p(z, t) &= \int_0^\infty m_p f_p(R, z, t) dR \\ &= \frac{4\pi}{3} \rho_s f_0(z) \int_0^\infty R^3 \theta(R) \delta(R - a(z, t)) dR \\ &= \frac{4\pi}{3} \rho_s f_0(z) a(z, t)^3 \theta(a(z, t)) \end{aligned} \quad (6.8)$$

と書ける. 初期 $t = 0$ においてダスト粒子の空間密度が $\rho_{p,0}(z)$ であるとする, 式 (6.8) より $f_0(z)$ は

$$f_0(z) = \frac{\rho_{p,0}(z)}{(4\pi/3)\rho_s R_0^3} \quad (6.9)$$

であり, 結局, ダスト空間密度は

$$\rho_p(z, t) = \rho_{p,0}(z) \left[\frac{a(z, t)}{R_0} \right]^3 \quad (6.10)$$

のように書くことが出来る. 今の設定では, 空間的な移流拡散はないとしているので, 式 (6.10) は, ただ単にその場所その場所で動かない氷ダストに関して粒径が成長した分だけ $\rho_p(z, t)$ が増加することを意味している.

一方, 式 (6.4) の第 2 式に第 3 式を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_v(z, t)}{\partial t} &= \frac{4\pi}{3} v_{th,v} (\rho_v(z, t) - \rho_{sat}) \int_0^\infty R^3 \frac{\partial f_p(R, z, t)}{\partial R} dR \\ &= \frac{4\pi}{3} v_{th,v} (\rho_v(z, t) - \rho_{sat}) \left\{ [R^3 f_p(R, z, t)]_0^\infty - 3 \int_0^\infty R^2 f_p(R, z, t) dR \right\} \\ &= -4\pi v_{th,v} (\rho_v(z, t) - \rho_{sat}) \int_0^\infty R^2 f_p(R, z, t) dR \end{aligned} \quad (6.11)$$

を得る. ただし, 最後の等号では $R \rightarrow \infty$ で $f_p(R, z, t) \rightarrow 0$ という条件を用いた. この式 (6.11) は, 水蒸気が $v_{th,v}$ という典型的な速度でダストの表面積 $4\pi R^2$ を目掛けて衝突することで, 飽和水蒸気量 ρ_{sat} から測った自らの密度に比例する効率でダストに取り込まれて, その結果 密度を減少させるという凝縮 (および昇華) の一連のメカニズムを簡潔に表している. 形式解 (6.6) を式 (6.11) に代入し, $q(z, t) \equiv \rho_v(z, t) - \rho_{sat}$ を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(z, t)}{\partial t} &= -4\pi v_{th,v} q(z, t) f_0(z) \int_0^\infty R^2 \theta(R) \delta(R - a(z, t)) dR \\ &= -4\pi v_{th,v} q(z, t) f_0(z) \theta(a(z, t)) a(z, t)^2 \end{aligned} \quad (6.12)$$

となる. ここで $a(z, t)$ を式 (6.7) で定義していたことを思い出して

$$\frac{\partial a(z, t)}{\partial t} = v_R(z, t) = \frac{v_{th,v}}{\rho_s} q(z, t) \quad (6.13)$$

に注意すると式 (6.12) は

$$\frac{\partial^2 a(z, t)}{\partial t^2} = -4\pi v_{th,v} f_0(z) \theta(a(z, t)) a(z, t)^2 \frac{\partial a(z, t)}{\partial t} \quad (6.14)$$

とできる. さらに, この式の両辺を積分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(z, t)}{\partial t} - \frac{v_{th,v}}{\rho_s} q_0(z) &= -4\pi v_{th,v} f_0(z) \int_{R_0}^{a(z, t)} \theta(a') a'^2 da' \\ \therefore \frac{\partial a(z, t)}{\partial t} &= \frac{v_{th,v}}{\rho_s} q_0(z) - \frac{4\pi}{3} v_{th,v} f_0(z) \begin{cases} a(z, t)^3 - R_0^3 & (a(z, t) \geq 0) \\ -R_0^3 & (a(z, t) < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.15)$$

となって、式 (6.9) を代入することで結局

$$\frac{\partial a(z, t)}{\partial t} = \frac{v_{th, v} \rho_{p, 0}(z)}{\rho_s} \begin{cases} b(z) - \left[\frac{a(z, t)}{R_0} \right]^3 & (a(z, t) \geq 0) \\ b(z) & (a(z, t) < 0) \end{cases} \quad (6.16)$$

$$b(z) \equiv \frac{\rho_{v, 0}(z) - \rho_{\text{sat}} + \rho_{p, 0}(z)}{\rho_{p, 0}(z)} \quad (6.17)$$

が得られる。初期条件を $a(z, 0) = R_0$ のように与えてから凝縮・昇華過程がどのように進むかについて、微分方程式 (6.16) の形より座標 z を大きく 3 つの領域に分けて考えられることがわかる。

まず $b(z) \geq 1$ の領域に関しては、初期条件から始まって $\partial a / \partial t \geq 0$ であるためダスト分布関数は R 正方向へと移流し、いずれ $a(z, t)$ が大きくなった $b(z) - [a(z, t)/R_0]^3 = 0$ のところで分布の並進は終わる。これはまさしく氷ダストの成長過程に他ならない。成長が $b(z) - [a(z, t)/R_0]^3 = 0$ のところで止まってしまうのは豊富にあった水蒸気をダストが「食い尽くす」ことで枯渇し、そのうち $\rho_v = \rho_{\text{sat}}$ となるためである。では、逆に $b(z) < 1$ の領域ではどうだろうか。もちろんこの場合は、初期時刻において $\partial a / \partial t < 0$ であるからダスト分布関数は R 方向 負の向きへと動く。とは言っても、この場合も負の方向へとどこまでも分布がスライドしていけるわけではない。 $0 \leq b(z) < 1$ の領域では、 a が小さくなっていった末に、 $b(z) - [a(z, t)/R_0]^3 = 0$ のところで移流は止まる。この場合は、氷ダストが昇華した分だけ水蒸気の密度 ρ_v が増えて飽和水蒸気量 ρ_{sat} に達し、相平衡状態となってそれ以上ダストが昇華できなくなって定常状態になるというわけである。一方で $b(z) < 0$ の領域では、ここで導入した $a(z, t)$ 自体の減少は式の上でどこまで行っても止まらない。 $a(z, t) \geq 0$ のときは式 (6.16) の第 1 式で減少し、 $a(z, t) < 0$ となってからは第 2 式で減少する。しかし、 0 を下回って $a(z, t)$ がいくら減少し続けようとも負の粒径を持つダストは存在できないためダスト分布関数 $f_p(R, z, t)$ としての「移流」は起こらない(助長に過ぎないが、階段関数 $\theta(R)$ を掛けておいたのはこのためでもある)。今回のモデルでは氷粒子の核形成を考えないので、この $b(z) < 0$ の領域に関してはつまり、 $a(z, t) = 0$ となった時点で分布は定常に達しているに等しいことになる。

以上をまとめて、それぞれの領域での定常ダスト分布関数 $f_p^{(st)}(R, z)$ を書けば

$$f_p^{(st)}(R, z) = f_0(z) \begin{cases} \delta(R - R_0 b(z)^{1/3}) & (b(z) \geq 0) \\ 0 & (b(z) < 0) \end{cases} \quad (6.18)$$

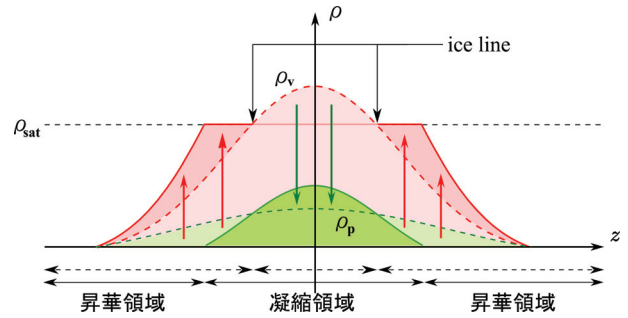


図 6.4: 凝縮・昇華の概念図

となる．これよりダスト粒子の空間定常分布 $\rho_p^{(st)}(z)$ は

$$\rho_p^{(st)}(z) = \int_0^\infty m_p f_p^{(st)}(R, z, t) dR = \begin{cases} \rho_{v,0}(z) + \rho_{p,0}(z) - \rho_{\text{sat}}(z) & (b(z) \geq 0) \\ 0 & (b(z) < 0) \end{cases} \quad (6.19)$$

となる．水蒸気の定常分布に関しては式 (6.19) と質量保存則 $\rho_v^{(st)}(z) + \rho_p^{(st)}(z) = \rho_{v,0}(z) + \rho_{p,0}(z)$ より

$$\rho_v^{(st)}(z) = \begin{cases} \rho_{\text{sat}}(z) & (b(z) \geq 0) \\ \rho_{v,0}(z) + \rho_{p,0}(z) & (b(z) < 0) \end{cases} \quad (6.20)$$

と得られる．あるいは式 (6.20) は、式 (6.16) の左辺に式 (6.13) を代入したうえで、第 1 式については右辺を 0 と置き $q^{(st)} = 0$ から、第 2 式については右辺をそのまま b として $q^{(st)} = \rho_{v,0} - \rho_{\text{sat}} + \rho_{p,0}$ から、それぞれ計算しても同様の結果が求められる．

以上で求められたダスト粒子および水蒸気の定常分布に対して、式 (6.4) を数值的に解いた結果は図 6.5 のようになる．図 6.5 のうち、上段に並んであるグラフがダストと水蒸気の空間密度を描いているものであり、下段に並んでいるのが氷ダスト粒子のサイズ分布のグラフである．上段の空間密度に関しては、赤・緑の斜線領域が理論解 (6.20), (6.19) から求められる水蒸気密度・ダスト密度を、赤・緑で塗りつぶされた領域が数值的に解いた水蒸気密度・ダスト密度をそれぞれ表している．水蒸気密度・ダスト密度の初期分布に関しては林モデルで決まるガスの密度 ρ_g に比例する形、すなわち、ガウス分布を選んだ．具体的には、比例係数を水蒸気に関しては $c_{v,0} = 0.01$ 、ダストに関しては $c_{p,0} = 0.1c_{v,0}$ としそれぞれ $\rho_{v,0} = c_{v,0}\rho_g$ 、 $\rho_{p,0} = c_{p,0}\rho_g$ とし与えた．図の下段のサイズ分布に関しては、空間 z 方向に分布関数 $f_p(R, z, t)$ を積分したものにダスト質量 $m_p = (4\pi/3)\rho_s R^3$ の重みを付けたもの $N_p(R, t)$ をサイズ分布として描いている．粒径が R から $R + \Delta R$ の間にあるダストの質量和を

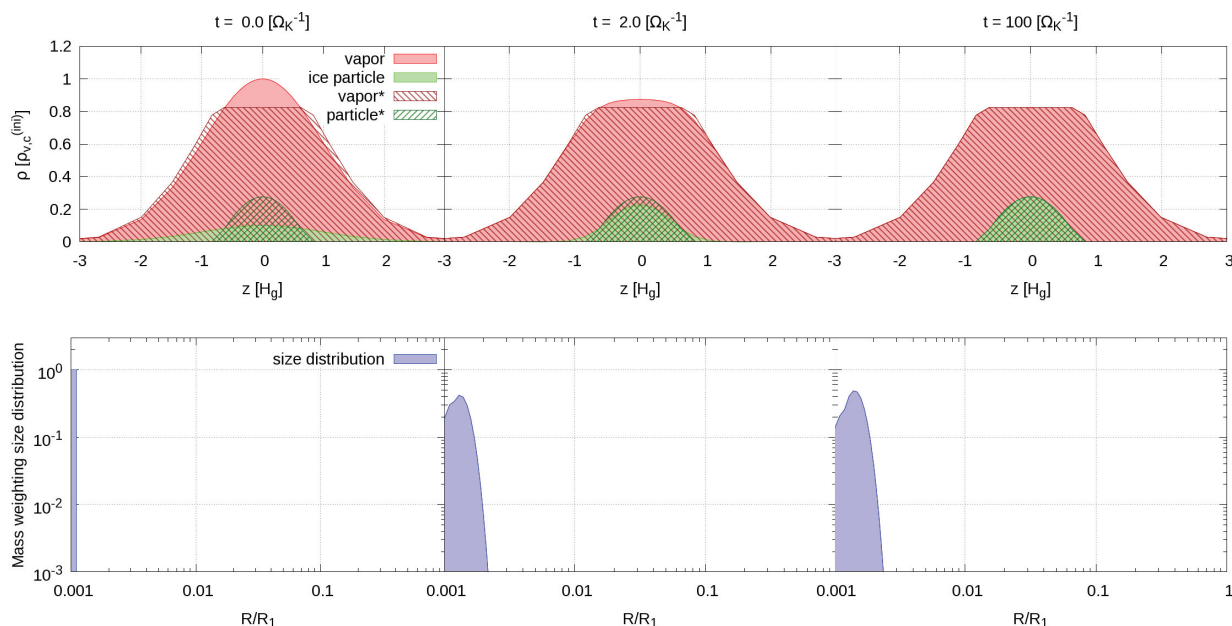
$$\Delta M_p(R, t) = \frac{4\pi}{3} \rho_s R^3 \Delta R \int dz f_p(R, z, t) \quad (6.21)$$

と表す．このときの

$$N_p(R, t) \equiv \frac{\Delta M_p(R, t)}{\Delta \ln R} = \frac{4}{3} \pi \rho_s R^4 \int dz f_p(R, z, t) \quad (6.22)$$

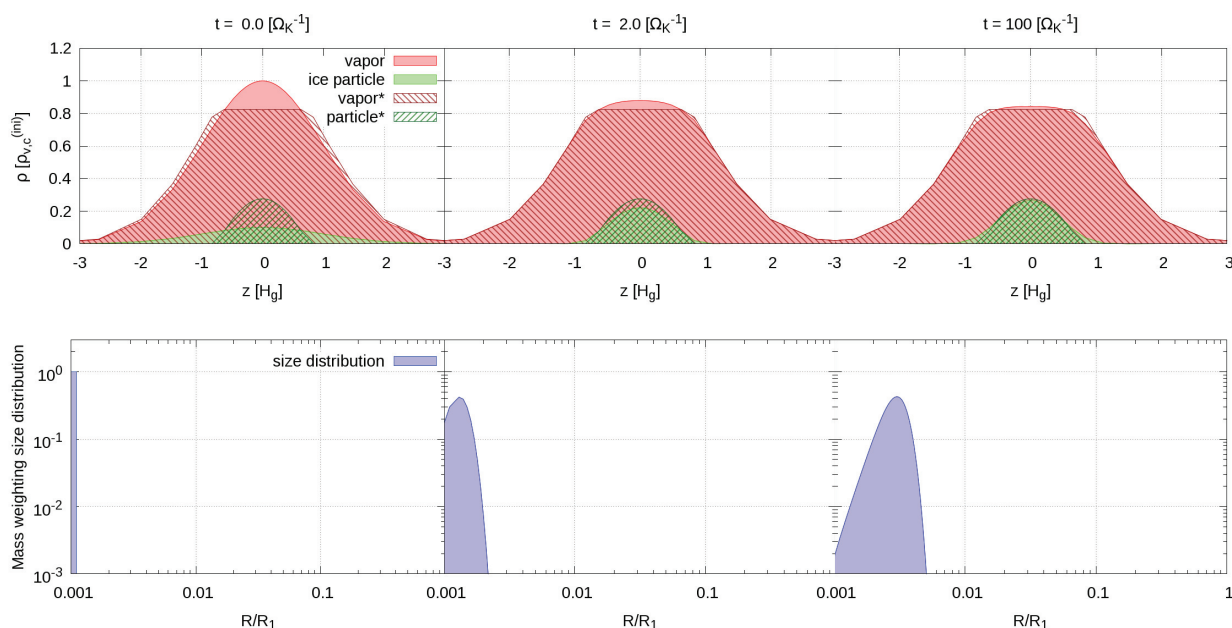
が本稿で採用しているサイズ分布 $N_p(R, t)$ である．グラフには、初期粒径を $R = R_{ini}$ としたときの $N(R, t)/N(R_{ini}, 0)$ を描いている． ΔR ではなく $\Delta \ln R$ で割っているのは、 R を等間隔に切ったビンではなく、 $\ln R$ について等間隔に切ったビンで見たときの質量への寄与を評価するためである．

空間密度に関しては、図 6.5 から数値解と理論解が定常状態でよく一致していることがわかる．特に、上段一番右側のグラフを見ると水蒸気密度が上部でフラットになっている．この平坦になっているところの値がまさに飽和水蒸気密度 ρ_{sat} である． ρ_{sat} によって定常状態が決まる ρ_v がフラットなこの領域以外は、すべての氷ダストが昇華して水蒸気だけになってしまう領域である．まさしくこの 2 つの領域の境界付近が ice line (atmospheric ice line) に相当する場所であり、空間方向の移流拡散がある場合は、この場所で、ダストと水蒸気との活発な質量の交換が行われるというわけである．テストプログラムのレベルを超えてしまうが、仮に、 z 方向の移流拡散の効果を入れて計

図 6.5: 凝縮・昇華テスト (z 方向; 移流拡散なし)

算を行うと、図 6.6 のような結果になる。 $t = 20\Omega_K^{-1}$ ほどの短い時間では z 方向の移流拡散が効いている様子はあまりないが、割と長い時間を掛けて $t = 100\Omega_K^{-1}$ までになると、 ρ_v の平らな領域の角張っている部分 すなわち ice line 近傍の分布がわずかに丸まり、一方で ρ_p は円盤上層側に浸み出ている様子が読み取れる。これは、水蒸気が中央の平らな部分を埋めようと赤道面方向へと拡散し、対照的に氷ダストは、疎になった円盤上層方向へと拡散した結果である。つまり、水蒸気は赤道面方向へと、氷ダストは円盤上層方向へと ice line を横切ることになる。乱流拡散で巻き上げられて ice line の外側に出てしまった氷ダストは、短いタイムスケールで 言えば瞬間的に昇華して水蒸気へと変わる。その分も含めて水蒸気は ice line 内側へとじわじわ拡散してきて、赤道面付近で「居座っている」氷ダスト粒子に凝縮する。小さなダストほど拡散が効いて昇華されるリスクが大きい一方で、サイズの大きな氷ダストほど赤道面へとよく沈殿できて昇華されるリスクが小さくなる。それどころか大きなダストは、小さなダストが昇華した分の水蒸気のうちフィードバックされて拡散されてくるものの恩恵も受けられるので、より成長が促進される。 z 方向移流拡散でのダストの成長メカニズムは、このようにあたかも「お金持ちにお金が集まるように」大きなダストが正の連鎖のうちに成長していくというものである。その片鱗が図 6.6 の下段サイズ分布の時間発展にもわずかに現れている。 $t = 100\Omega_K^{-1}$ というそれほど長くない時間ではあるものの、図 6.5 のサイズ分布と比べるとダスト成長が移流拡散によって促されている様子を読み取ることができる。

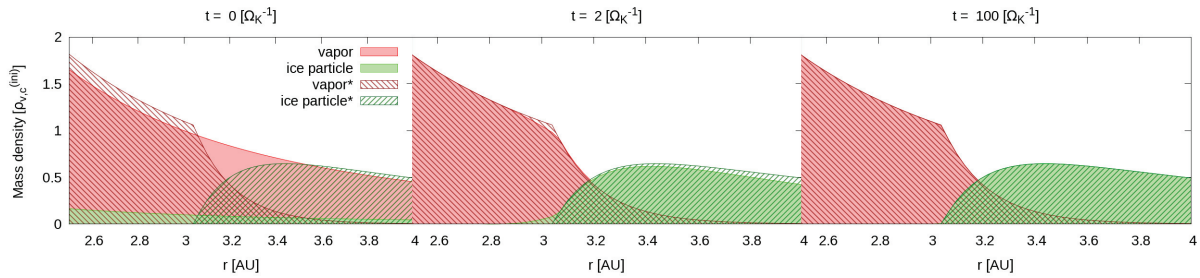
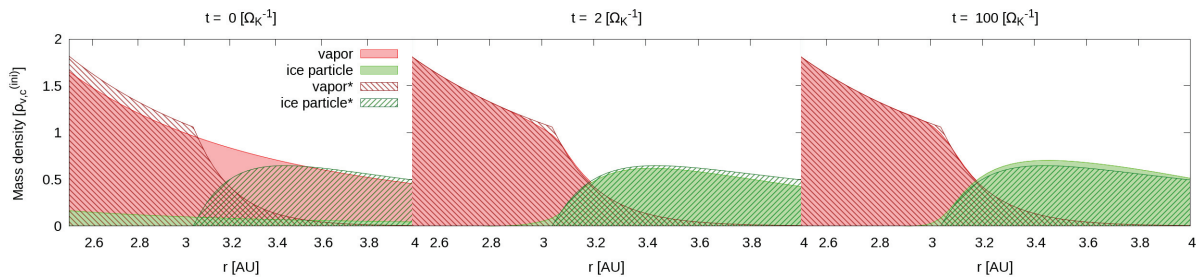
さらに発展させ、鉛直 z 座標に加え動径 r 座標も形式的に含めて凝縮・昇華項を計算した結果が、図 6.7 である。ただし、この場合も空間 r, z 方向には移流拡散はないものとして計算を行い、図 6.7 には赤道面 $z = 0$ におけるダスト密度・水蒸気密度の r 依存性のみを示している。凝縮・昇華項の定常解については、空間が r, z の 2 次元の今の場合でも式 (6.19), (6.20) を同様に用いることがで

図 6.6: 凝縮・昇華テスト (z 方向; 移流拡散あり)

き, 数値解とその理論解とが一致している様子を図 6.7 から読み取れる.

ダスト密度および水蒸気密度の定常解について, 3AU 付近を境に $r \lesssim 3\text{AU}$ と $r \gtrsim 3\text{AU}$ とで振る舞いが大きく違うのは, ちょうどその位置が radial ice line にあたる場所だからである. r 方向の移流拡散がない場合, ダスト密度は図の緑色のような分布になって ice line よりも動径内側には (ほとんど) 存在することができない. radial ice line は時に condensation front と呼ばれることもあるが, まさにこの凝縮領域のフロント面が氷ダストの成長に重要なところとなる.

空間 r, z 方向の移流拡散を含めた数値計算結果が図 6.8 である. 図 6.7 と比べるとフロント面において, 動径内側すなわち温度が高い方向へとダスト密度が移流拡散によって染み出している様子がわかる. この場合も, 拡散はより小さいダストに強く効いて動径内側方向への拡散流をつくる. その拡散流によってフロント面から浸み出たダスト質量は, 昇華過程で水蒸気質量へと変わるが, その水蒸気の一部は今度は動径外側方向への拡散流をつくって結局, 凝縮領域へとフィードバックされる. それを拡散流に乗らなかった 大きなサイズのダストが「食べる」ことで, サイズ分布として より粒径が大きい方向へと分布の中心が動いていく. しかし, 鉛直方向のダスト成長メカニズムと決定的に違うのは, 今考えているダストサイズの成長の場合 r 方向のドリフトは粒径が大きいほど速くなるということである. 粒径が大きいほど拡散が効きにくいことは同様であるが, 一方でドリフトは速くなるので z 方向のみの場合とは異なって「正の連鎖」はいつまでも続くわけではなく, いずれ破綻することになる. これについては次章で詳しく述べることにする.

図 6.7: 凝縮・昇華テスト (r 方向; 移流拡散なし)図 6.8: 凝縮・昇華テスト (r 方向; 移流拡散あり)

7 数値計算結果

本章では, 移流拡散方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial f_p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial R}(v_R f_p) - \frac{\partial}{\partial r}(v_r f_p) + \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho_g D_p \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f_p}{\rho_g} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z}(v_z f_p) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho_g D_p \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_p}{\rho_g} \right) \right] \\ \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \int_0^\infty m_p \frac{\partial}{\partial R}(v_R f_p) dR + \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho_g D_g \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho_g D_g \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \right] \end{cases} \quad (7.1)$$

を数値的に解くことで, 氷ダストの凝縮・昇華, ドリフト, 沈殿, 拡散 および 水蒸気の拡散によって起こる物理現象の理解を試みる. 特に, 氷ダストの 1mm から 10cm サイズまでの成長に焦点を当てて, ice line 近傍における氷粒子と水蒸気の取り扱い方について考察する. このサイズ範囲の成長に注目するのは, 「跳ね返り (Bounce)」という問題があって このサイズ程度のダストどうしの衝突合体は難しく, ダスト成長を考える上で合体成長以外のメカニズムが必要になるからである [23]. 10cm サイズまで成長すれば, あとは Streaming instability およびそれによって誘発される重力不安定性により微惑星形成まで可能であるという報告もある [29],[30]. 以下では, 本稿と同様の問題を氷ダストと水蒸気をともに「particle」として扱い計算を行った Ros & Johansen 2013 [9] の結果と比較しながら議論を進める.

7.1 空間 1D 計算 (z 方向)

ここでは空間に関しては円盤鉛直 z 方向のみの移流拡散を考えて、氷ダストがどのように成長するのかを考察する。このとき解くべき方程式は式 (7.1), (7.2) の r 依存性を落として

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial R}(v_R f_p) - \frac{\partial}{\partial z}(v_z f_p) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho_g D_p \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_p}{\rho_g} \right) \right] \end{array} \right. \quad (7.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \int_0^\infty m_p \frac{\partial}{\partial R}(v_R f_p) dR + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho_g D_g \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \right] \end{array} \right. \quad (7.4)$$

である。式 (7.3) が氷ダスト粒子のサイズ分布関数 $f_p(R, z, t)$ の時間発展を与える移流拡散方程式であり、この式の右辺が凝縮・昇華 および z 方向の沈殿、拡散の効果をそれぞれ表している。ただしダスト粒子の空間質量密度 $\rho_p(z, t)$ はサイズ分布関数 $f_p(R, z, t)$ によって

$$\rho_p(z, t) = \int_0^\infty m_p f_p(R, z, t) dR \quad (7.5)$$

で与えられるものとする ($m_p = (4\pi/3)\rho_s R^3$ は氷ダストを均質球としたときの質量)。一方で、式 (7.4) は水蒸気密度の時間発展を決める式であり、その右辺はそれぞれ凝縮・昇華過程における質量保存 および空間的な拡散の効果を表している。

7.1.1 Ros & Johansen 2013 との比較

本稿で採用するダスト分布関数を用いて移流拡散方程式を解くというモデルは、氷ダストおよび水蒸気は、粒径あるいは空間に関して言えば連続的に分布しているものとするモデルである。これとは対照的に Ros & Johansen 2013 は、氷ダストと水蒸気をともに「particle」として扱って ice line 近傍での氷ダスト粒子の成長を考えた。彼らの手法は particle を扱うため計算のアルゴリズムとそれによる結果は単純明快であるという利点はあるが、particle であるがために非常に多くのシミュレーション粒子数を扱わなければならない分 計算効率が悪いという欠点もある。

Ros & Johansen 2013 が行った空間 z 方向 1 次元での計算 [9, Fig.5] を参考にされたい²³。該当の図 [9, Fig.5] 上段が氷ダスト粒子 (青色) と水蒸気粒子 (赤色) の空間分布を、下段が氷ダストのサイズ分布をそれぞれ表している。初期の空間分布はこのとき、凝縮領域には氷粒子しか存在しないものとし、一方で昇華領域には水蒸気しか存在しないものとして、それぞれの領域でガウス分布を用いて与えられている。またサイズ分布に関しては、デルタ関数の代わりに $R = 0.001R_1$ の位置に十分に幅が細い矩形状の分布を与えている。彼らが設定した凝縮・昇華のメカニズムは非常に簡略化されていて、図 [9, Fig.5] 上段のグレーに染められている部分を凝縮領域とし、その領域では凝縮過程 (氷ダスト成長過程) しか起こらないものと考え

$$v_R = \frac{v_{th,v}}{\rho_s} \rho_v \quad (7.6)$$

という粒径成長率で氷ダストは成長するとしている。これに対して、グレーではない円盤上下層の部分が昇華領域を表しており、この領域では昇華過程のみが働くと考え、また、昇華のタイムスケール

²³ Astronomy & Astrophysics 552, A137 (2013)

ルを(極めて短いものとして) 0 とする極限を取っている. つまり拡散によって凝縮領域に入り込んだ水蒸気粒子は式 (7.6) で特徴づけられる確率で氷粒子に凝縮し, 反対に, 拡散で昇華領域へと出てしまった氷粒子に関しては瞬間的に水蒸気へと昇華するものとし計算している.

図 [9, Fig.5] は円盤上層で与えられた水蒸気が赤道面方向へと拡散し, 一方で氷ダストがその拡散流によって粒径を成長させている様子を視覚的に簡潔に示している. また, サイズ分布の時間発展をみると 1mm サイズで与えられた氷ダストは $t = 2000\Omega_K^{-1}$ 程度の時間で 10cm サイズまで成長していることがわかる.

この Ros & Johansen 2013 の結果に対し, 移流拡散方程式 (7.3),(7.4) を彼らと同じ設定で解いた結果を図 7.1 に示す. 上段が密度分布を, 下段がサイズ分布を表している. 図 [9, Fig.5] と図 7.1 との比較から particle を用いたモデルと分布関数を用いたモデルが同じ結果を示していることがわかる. サイズ分布に関して, 図 [9, Fig.5] に比べて図 7.1 が, 粒径がより小さい側に分布の尾をひいているように見えるのは, Ros & Johansen 2013 のモデルが particle を用いているために粒子数が少ない側で分布を正確に解像できていないことが原因であると考えられる.

空間密度を分布量としてグラフにしたことで図 7.1 では, ダストの質量密度が凝縮領域で効率的に増加している様子が鮮明に読み取れる. これは, 初期分布を凝縮領域で水蒸気がまったく存在しないものと設定したため, その凝縮領域を目掛けて拡散してくる水蒸気のフラックスが大きいためである. 円盤上層から降ってくる水蒸気の拡散流を質量の供給源として氷ダストは成長しているわけである.

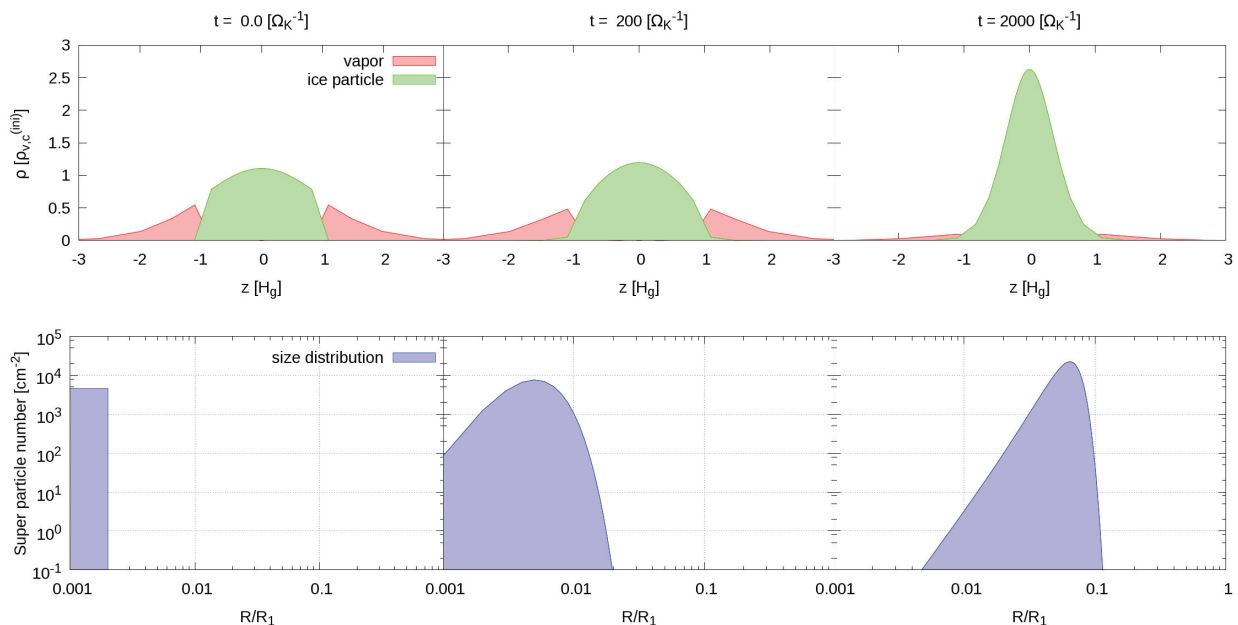


図 7.1: Ros & Johansen 2013 との比較 (空間 1D : z 方向 ; $\alpha = 10^{-2}$)

7.1.2 1D Advanced model

前節では, Ros & Johansen 2013 の設定のもとで彼らの結果が再現できることを示したが, その設定はかなり簡単化したものであった. このことから以下では, 設定をより自然と思われるものに

改めた上で計算を行うことにする.

Ros & Johansen 2013 は凝縮領域と昇華領域を明確に分けて, 与える初期分布では水ダストと水蒸気をそれぞれの領域において 言わば「隔離」していた. それをここでは「共存」できる形で図 7.2 のように与えることにする. ここで用いている初期の密度分布は 6.2 節における考察から得られた凝縮 - 昇華定常分布 (6.19), (6.20) を用いている. また, 凝縮・昇華過程については, 水ダストの粒径成長速度を式 (4.36) より

$$v_R = \frac{v_{th,v}}{\rho_s} (\rho_v - \rho_{sat}) \quad (7.7)$$

と与えて解くようにする. Ros & Johansen 2013 の設定では, 水蒸気の凝縮過程は式 (7.6) のように飽和水蒸気圧 ρ_{sat} に関係なく決まっており, 極端に言えば ρ_v が 0 になるまでダストに凝縮できたわけであるが, 式 (7.7) の場合は相平衡状態が存在するために ρ_{sat} を下回って水蒸気は凝縮できないことになる. そして, 式 (7.7) を凝縮・昇華による粒径成長速度として導入することによって生まれる最も重要な相違点として, ice line が可変になるということがある. その定義を思い出すと, ice line とは $\rho_v = \rho_{sat}$ となる場所であった. Ros & Johansen 2013 の場合は, 図 [9, Fig.5] のグレーの領域とそうでない領域の境界が ice line を示していて, シミュレーションを通してそれは固定されている. ice line は水蒸気と水ダストが互いに質量を活発に交換する場所であるため, その位置が変わり得るということになればその効果は重要であると思われる.

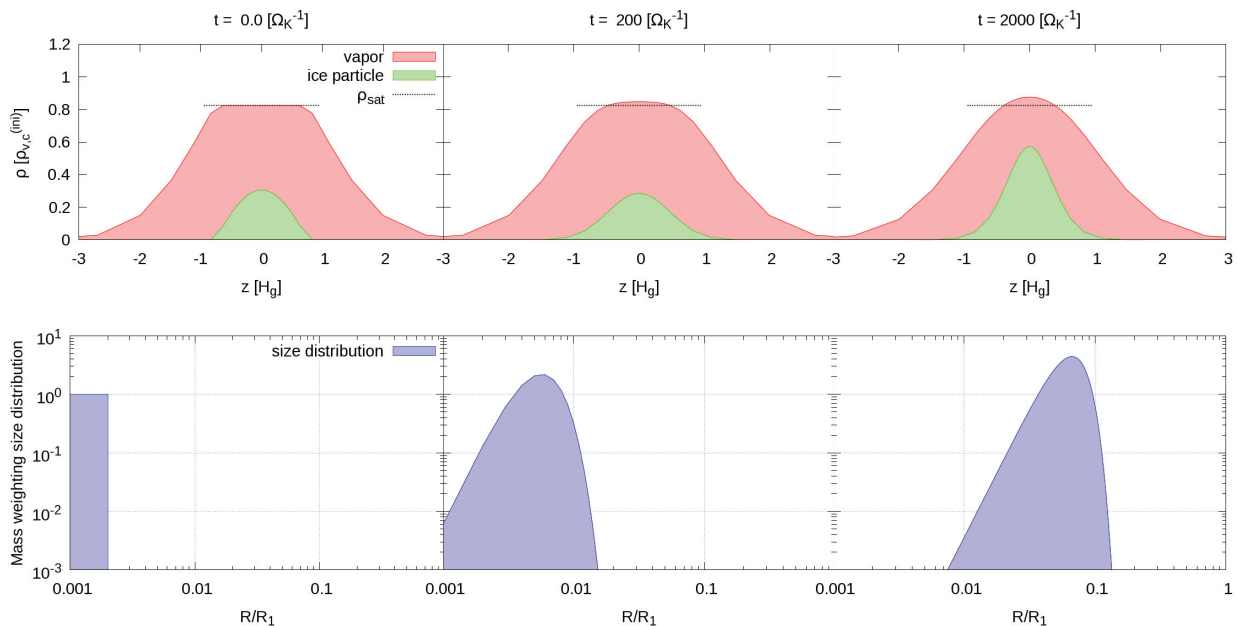


図 7.2: 1D Advanced model (初期条件: 凝縮 - 昇華定常分布; $\alpha = 10^{-2}$)

図 7.2 は以上のような設定のもとで計算した結果を表している. この図 7.2 には, ice line の位置の変化を見るため, 図上段の密度分布のグラフに破線で飽和水蒸気密度 ρ_{sat} の値を描き足している. この破線と水蒸気密度の分布 (赤) がぶつかるところが ice line である. これより, 初期時刻に対してわずかではあるが, ice line は円盤のより内側 (赤道面方向) に動いていることがわかる. これはまさに水蒸気の円盤赤道面方向への拡散が原因となっている. つまり水蒸気は, 水ダストに凝

縮されて少なくなった赤道面付近の密度フラットな場所に対してガウス分布に戻ろうとするために, ice line は内側へと動く. ice line がより赤道面に近くなるということは, 水蒸気とダストの質量交換の場がよりダストの空間密度が濃い部分で行われるということを意味している. すると氷ダストはより昇華しやすくなるが, その分だけ水蒸気からのフィードバックも多く受けることになる. このように考えると, ice line が円盤内側に動くほどにダストの成長率は高くなると考えることが出来る. しかし実際のところは, 図 7.2 のサイズ分布の時間発展を比較すると ice line 不変の図 7.1 の場合と成長率はあまり変わらないように見える. これは図 7.1 の場合において円盤上層からの水蒸気拡散が強く効いて成長率が高くなっている効果と, 図 7.2 の場合の ice line 可変であることによる効果が数値の上でたまたま同程度になっているからだと思われる. 図 7.1 において, もし水蒸気と氷ダストを隔離するような分布でなかったならば, ダストの成長率はもっと小さかったはずである.

続いて, この設定のもとで計算した氷ダストの粒径平均 $\langle R \rangle$ の時間発展を図 7.3 に示しておく. これより確かに $\alpha = 10^{-2}$ の場合, 1mm サイズから 10cm サイズまでの成長は $2000\Omega_K^{-1}$ ほどの時間で行われていることがわかる. また, 乱流粘性の α パラメータについて $\alpha = 10^{-3}, 10^{-4}$ の場合を試すとダスト成長率が小さくなることがこの図には示されている. これは乱流拡散によって氷ダストが巻き上げられて, 昇華される機会が少なくなるため, その分だけ水蒸気からのフィードバックも少なくなってダストはあまり成長できなくことを意味している. 氷ダスト粒子のスケールハイトの時間発展を示した図 7.4 から, 沈殿してダストのスケールハイトが小さくなるほど氷粒子が昇華される機会が少なくなって, 成長率が低下していることが読み取れる. このように, 氷ダストの昇華には単なる氷から水蒸気への相変化という意味以上の役割がある. より小さなサイズのダストを多く昇華させた分だけ, よりサイズの大きい氷ダストは成長できるというわけである. それはなぜなら図 7.5 のように円盤上層の小さなサイズのダストが昇華することによって, 水蒸気を通して よりサイズが大きいダストへと質量の「輸送」が行われるからに他ならない.

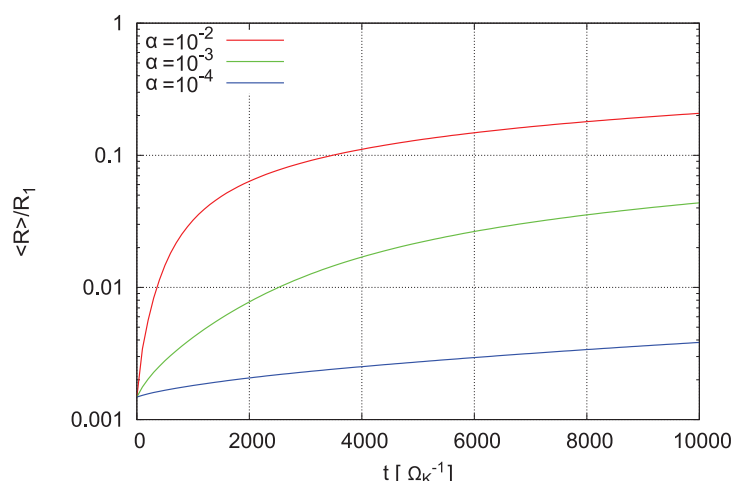


図 7.3: 粒径平均 $\langle R \rangle$ の時間発展
(空間 1D: z 方向; 初期条件: 凝縮-昇華定常分布)

それぞれ赤線が $\alpha = 10^{-2}$, 緑線が $\alpha = 10^{-3}$, 青線が $\alpha = 10^{-4}$ の場合の粒径成長を表している (図 7.4 についても同様). 粒径が成長するにつれて赤道面への沈殿が進み, その分 ice line を横切って昇華する氷粒子が減るため, 粒径成長率は時間とともに小さくなっている. また, 乱流粘性の α パラメータが小さいほど粒径成長率も小さい.

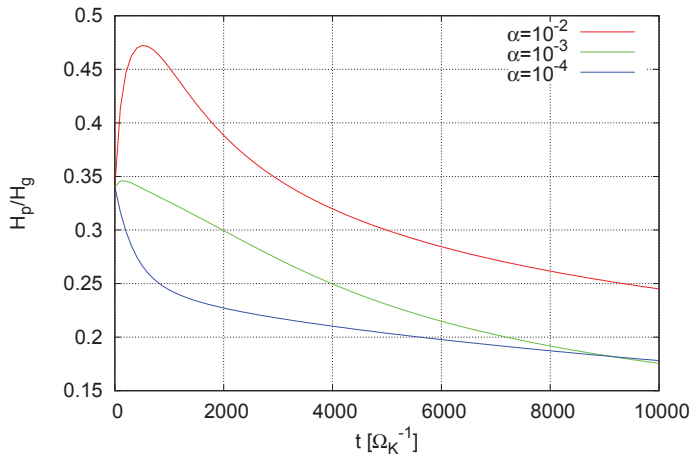


図 7.4: ダスト粒子のスケールハイト H_p の時間発展 (空間 1D: z 方向; 初期条件: 凝縮-昇華定常分布)

式 (3.151) を用いて各時刻における H_p を計算している。 $\alpha = 10^{-3}, 10^{-4}$ の場合, 粒径成長とともに沈殿が進み H_p がほとんど単調に減少するのに対し, $\alpha = 10^{-2}$ の場合は乱流拡散が強いため一旦 拡散によりダストの密度分布が上層へと広がったのちに, 急激な粒径成長により H_p は減少傾向に転じている (ただしこの現象は, 初期分布を凝縮-昇華定常分布で与えたために起こり得るものであることに注意しなければならない)。

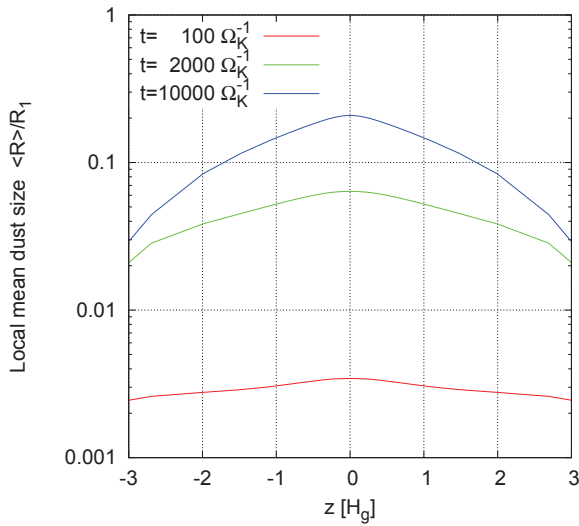


図 7.5: 局所的な粒径平均 $\langle R \rangle$ の時間発展 (空間 1D: z 方向; 初期条件: 凝縮-昇華定常分布)

円盤鉛直座標 z に対する, その場所における局所的な粒径平均を表している。ただし, 乱流粘性の α パラメータは $\alpha = 10^{-2}$ としてある。赤線が $t = 100\Omega_K^{-1}$, 緑線が $t = 2000\Omega_K^{-1}$, 青線が $t = 10000\Omega_K^{-1}$ の時刻の粒径平均分布である。上層の小さな氷ダストが ice line を横切って上層へと拡散することで, よりサイズが大きい氷ダスト粒子のさらなる成長が起こり, 赤道面近くに沈殿している様子がわかる。このように上層の小さな粒子を拡散させて昇華させては, その「犠牲」によって より大きいダスト粒子が成長し「安全」な赤道面へと沈殿していく。

7.2 空間 2D 計算 (r, z 方向)

前節では, 空間については鉛直 z 方向のみを考慮して移流拡散方程式を解き, 氷ダストの成長を考えた。ここではさらに動径 r 方向についても考えて, 空間 2 次元で移流拡散方程式を解くことにする。回転角方向の次元に関しては, 原始惑星系円盤が軸対称であるものとしてここでは考えない。空間 2 次元の計算で重要になってくるのは氷ダストの r 方向のドリフトである。同じ移流項でも z 方向の沈殿では

$$v_z = -\Omega_K \tau_s z \quad (7.8)$$

のように粒径が大きくなるほど赤道面に沈殿し, 昇華の危険を免れる方向に働くのに対して, r 方向の場合はそうはいかない。ドリフト速度 v_r は

$$v_r = -\frac{2\eta v_K}{\tau_s + \tau_s^{-1}} \quad (7.9)$$

のように, 制動時間 τ_s が 1 に近いほどに大きくなって, 今考えるダストのサイズ範囲では, より大きいサイズのダストほど動径内側に速くドリフトしてしまうことになる。大きなダストほどドリ

フトして radial ice line 外側の昇華領域 (より中心星に近い温度が高い領域) に出てしまうということになれば, z 方向において起こっていたような小さなダストを融かして大きなダストを育てるというような「正の連鎖」は起こらない. このことが動径 r 方向を導入した際の, z 方向のみの場合との決定的な違いである.

7.2.1 Ros & Johansen 2013 との比較

動径 r 座標を入れた場合も Ros & Johansen 2013 の計算は手法自体はほとんど同じである. ただし, 注意すべきは r 方向の境界条件である. z 方向には周期境界条件を課していた一方で, r 方向には反射境界条件を課して計算を行っている [9, Fig.9] ²³.

z 方向の atmospheric ice line の効果のほかにこの場合は, r 方向の radial ice line を通して水蒸気と氷ダストが質量をやり取りする効果も存在する. 図 [9, Fig.9] では凝縮領域はグレーで染まっている部分であり, その領域でも紙面左側の境界が radial ice line あるいは condensation front を表している. この部分周辺で氷ダストの空間密度と粒径が大きくなっている様子が読み取れる. ドリフトが過激に効かないサイズでは, radial ice line 周辺で大きくなった氷ダストの一部は動径外側方向へと拡散している. つまり, condensation front 周辺が大きなダストを作る「工場」になって動径外側までその一部を輸送しているというわけである. その様子を図 [9, Fig.9] の時間発展は表している.

この Ros & Johansen 2013 の結果に対して, 同じ設定で移流拡散方程式 (7.1),(7.2) を解いて分布関数の発展を求めた場合の結果が図 7.6 である. 左側に上から 3 つ並んでいるものが氷ダストと水蒸気の質量密度を表しているグラフである. それぞれのグラフで, 紙面右方向に延びているのが r 座標, 紙面左上方向へと延びているのが z 座標, そしてボックスの高さ方向が密度を表している. これらのダスト・水蒸気密度のグラフに対応する時刻のサイズ分布を描いたものが, 右側に縦に並ぶ 3 つのグラフである. ただし空間 2 次元の場合のサイズ分布に関しては式 (6.22) と同様にして

$$N_p(R, t) \equiv \frac{\Delta M_p(R, t)}{\Delta \ln R} = \frac{4}{3} \pi \rho_s R^4 \int dr \int dz f_p(R, r, z, t) \quad (7.10)$$

と定義して用いることにする. また, 境界条件に関しては Ros & Johansen 2013 が課している条件に対応する, r, z 方向それぞれの境界でフラックスを 0 とする条件を用いている.

この図についてもまた Ros & Johansen 2013 の結果の図 [9, Fig.9] とおおよそで一致していることがわかる. 特に radial ice line 付近でダスト密度が大きくなっている様子, および, それだけでなく radial ice line 近傍の昇華領域で水蒸気密度が大きくなっていることがわかる. これは凝縮領域側から氷ダストが拡散して来て昇華することにより質量の供給があるためである. そうやって増えた分の一部は水蒸気拡散で再び凝縮領域へと戻されるが, それでも水蒸気密度が溜まっているということは, それ以上に凝縮領域から落下してくる氷ダストのフラックスが強いということを示している.

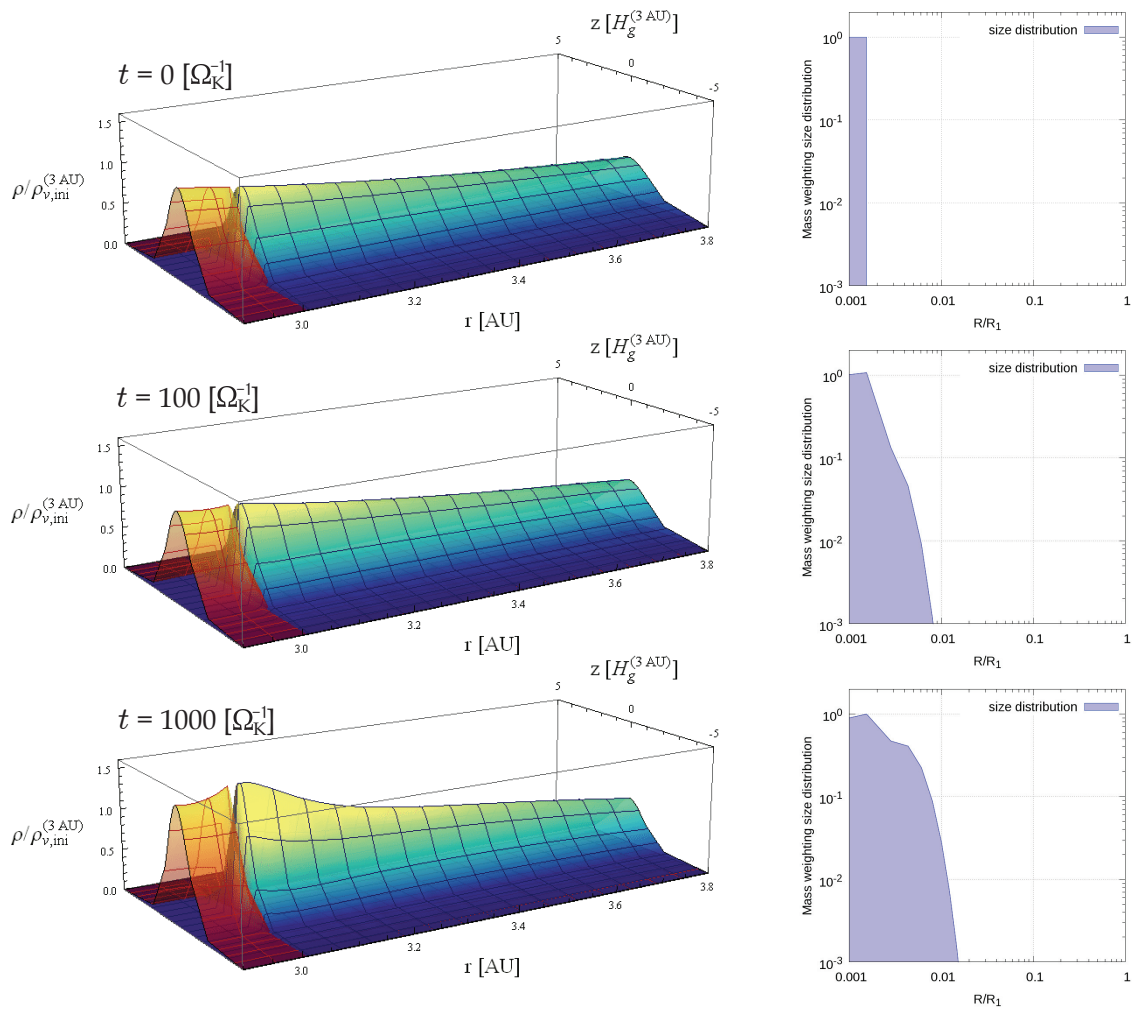


図 7.6: Ros & Johansen 2013 との比較 (空間 2D : r, z 方向 ; $\alpha = 10^{-2}$)

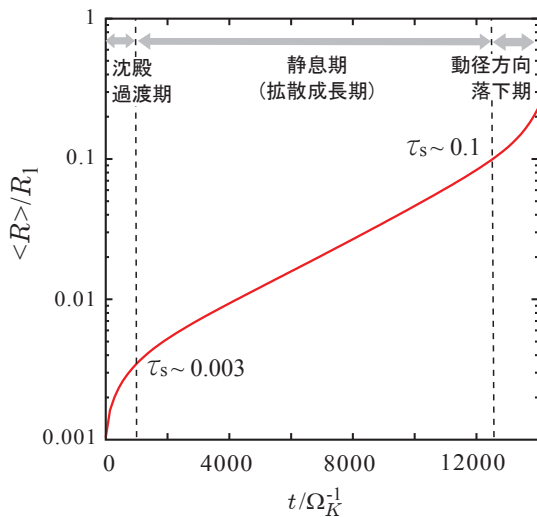


図 7.7: 粒径平均 $\langle R \rangle$ の時間発展の比較 (空間 2D : r, z 方向 ; $\alpha = 10^{-2}$)

Ros & Johansen 2013 の結果に対する今回の再現計算の平均粒径の時間発展のグラフを図 7.7 に示す. この図 7.7 と Ros & Johansen 2013 の図 [9, Fig.10] との比較から平均粒径の成長という観点から見ても, 彼らの計算結果とほぼ一致している様子がわかる. どちらのグラフからも初めの $\langle R \rangle \lesssim 0.01 R_1$ の段階と終わりの $\langle R \rangle \gtrsim 0.1 R_1$ の段階では粒径の成長率は高く, 一方でその間の $0.001 R_1 \lesssim \langle R \rangle \lesssim 0.1 R_1$ では成長率が比較的低く静息段階にあることがうかがえる. このことは, 以下のようにドリフトと拡散のタイムスケール (速度) の比較により理解することが出来る. 乱流 (拡散) の典型的な速度を $|v_{diff}| \sim \alpha c_{s,g}$ と評価すれば, 沈殿速度 $|v_z| = \Omega_K \tau_s |z|$ との比は

$$\frac{|v_z|}{|v_{diff}|} \sim \frac{\Omega_K \tau_s |z|}{\alpha c_{s,g}} = \frac{\tau_s}{\alpha} \frac{|z|}{H_g} \quad (7.11)$$

と見積もることが出来る. Ros & Johansen 2013 の設定では, 鉛直方向の ice line すなわち atmospheric ice line の位置を $z_{ice} = 3H_g$ と定義しており, その atmospheric ice line $|z| = z_{ice}$ において $|v_z| \gtrsim |v_{diff}|$ となるためには

$$\tau_s \gtrsim \alpha \frac{H_g}{z_{ice}} \simeq 0.003 \quad (7.12)$$

となるまで成長しなければならない. $\langle R \rangle \lesssim 0.003R_1$ の段階では, 沈殿よりも拡散の効果が強く効くために最初の段階では成長率が高くなっていたというわけである. 逆に言えば $\langle R \rangle \gtrsim 0.003R_1$ まで成長してしまえば凝縮領域への沈殿は ほぼ完了して atmospheric ice line を通した質量交換による粒径成長は穏やかなものとなる. 一方, $|v_{diff}|$ と r 方向のドリフト速度 $v_r \simeq 2\eta v_K \tau_s$ との比は

$$\frac{|v_r|}{|v_{diff}|} \sim \frac{2\eta v_K \tau_s}{\alpha c_{s,g}} = \frac{2\eta \tau_s}{\alpha} \frac{r}{H_g} \sim \frac{2\eta^{1/2} \tau_s}{\alpha} \quad (7.13)$$

となって, これより

$$\tau_s \gtrsim \frac{\alpha}{2\eta^{1/2}} \sim 0.1 \quad (7.14)$$

となると r 方向のドリフト速度が拡散速度を上回ってしまうことがわかる. すなわち, $\langle R \rangle \gtrsim 0.1R_1$ まで成長すると移流優勢で一方的に昇華領域に落下してしまうことになる. radial ice line をまたいで昇華領域に落ちてしまった氷ダストは昇華し, その分 局所的に増えた水蒸気の一部は凝縮領域へと拡散し氷ダストを成長させる. つまり, 成長しては動径方向に落下して昇華し凝縮領域の氷ダストを成長させて, それがまた落下するという繰り返しで平均粒径は最後の $\langle R \rangle \gtrsim 0.1R_1$ で急激に成長する. 反対に, $\langle R \rangle \lesssim 0.1R_1$ の段階においては拡散によって氷ダストの中心星落下が押しとどめられていたわけである. 以上のことから, 中心星落下を考慮した場合, 成長できる氷ダストの成長上限は $\tau_{s,crit} \sim \alpha/\sqrt{\eta} \sim 0.1$, 粒径で言うと $R_{crit} \sim \alpha R_1/\sqrt{\eta} \sim 10\text{cm}$ であることがわかる.

7.2.2 2D Advanced model

空間 2 次元のこの場合に関しても Ros & Johansen 2013 の設定を発展させたものについて考えることにする. 具体的には, 初期分布として凝縮・昇華定常分布を用い, 凝縮・昇華による氷ダストの粒径成長を式 (7.7) で与え, さらに ice line に関しては可変であるものとして移流拡散方程式を解く. このときの結果が図 7.8 および図 7.9 である. 図 7.8 では Ros & Johansen 2013 との比較のため, シミュレーションボックスの動径内側は $r_{min} = 2.9\text{AU}$ とし動径外側は $r_{max} = 3.8\text{AU}$ としている. 一方で, 図 7.9 の計算では $r_{min} = 2.5\text{AU}$, $r_{max} = 4.0\text{AU}$ としてある (動径内側の境界をある程度余裕を持って より中心星方向に設定しているのは, 昇華領域に水蒸気が過度に溜まってしまふのを防ぐためである). α パラメータに関しては図 7.8, 図 7.9 とともに $\alpha = 10^{-2}$ である.

特に図 7.9 より, $10000\Omega_K^{-1}$ という長時間を掛けてのダスト成長を考えると最終的に r 方向の移流拡散についてドリフトが拡散に勝ってダスト質量の大半が動径内側へと落ちていく様子がわかる. 落ちて行って昇華領域に入ってしまったダストに関しては短いタイムスケールで昇華して水

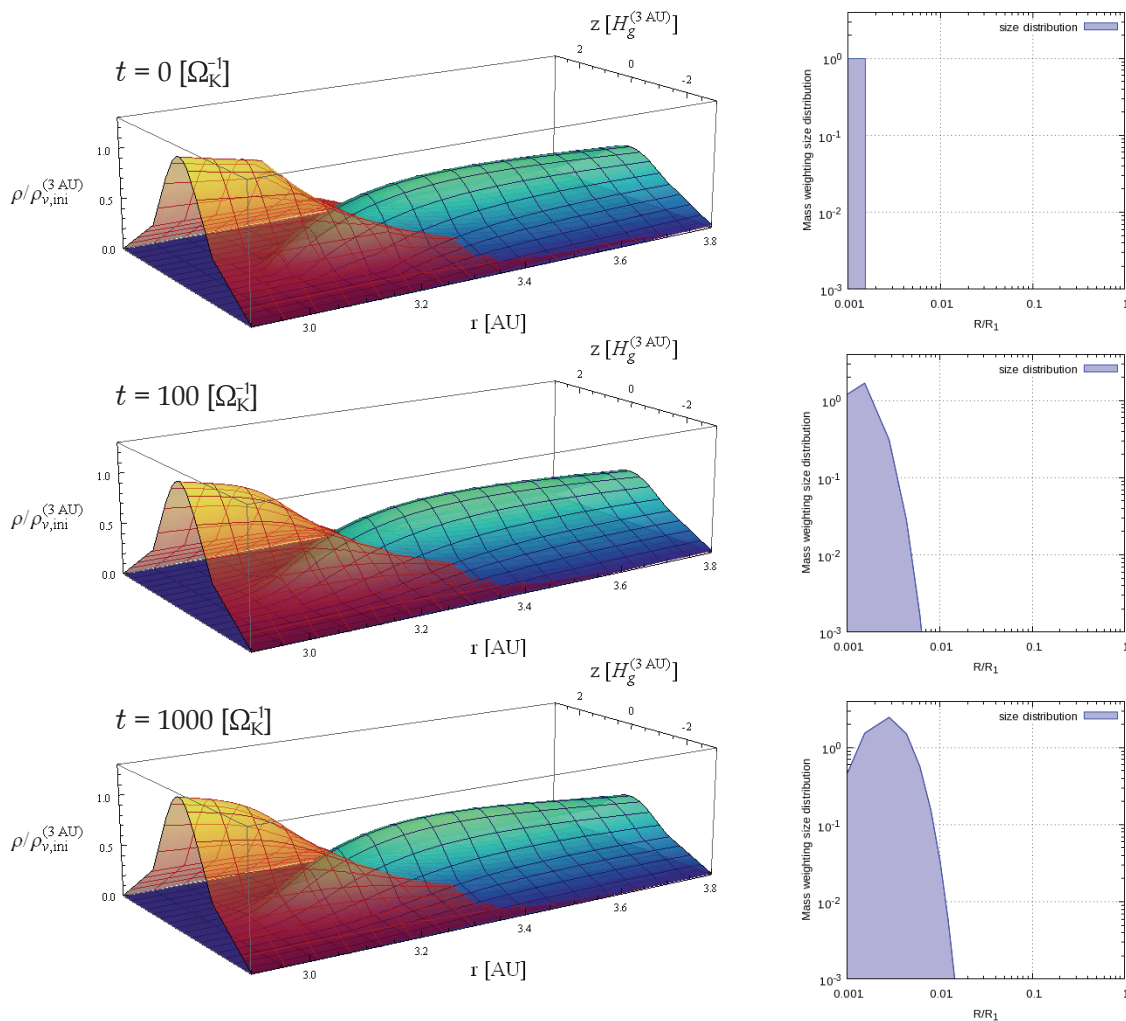


図 7.8: 2D Advanced model (初期条件：凝縮-昇華定常分布； $r_{\min} = 2.9\text{AU}$, $r_{\max} = 3.8\text{AU}$)

蒸気となる。そして昇華領域で増えた分の水蒸気密度に関しては、その大半が再び水蒸気拡散で凝縮領域へと引き戻されて、落ち切れずに残っているダストに質量が供給される。すると質量の供給を受けたダストは成長しその分ドリフトが速くなって昇華領域へと落ちていく。こうして、次から次へと動径方向への移流は促進されて、最終的にはすべてのダストが radial ice line をまたいで昇華し水蒸気になってしまうというわけである。

図 7.10 は図 7.9 の $t = 2000, 5000, 10000 \Omega_K^{-1}$ における赤道面 $z = 0$ での氷ダストと水蒸気の密度を描いている。氷ダストが動径内側方向へと落ちていく様子、および、それによって昇華領域の水蒸気密度が大きくなっている様子が、この図からも良くわかる。時間とともに ice line がどのように動いているかについては図 7.11 に示してある。この図より radial ice line は時間とともに中心星方向へと動いていることが読み取れるが、 $10000 \Omega_K^{-1}$ ほどの時間を掛けてもただか 0.1AU 程度しか移動していないことから、思いのほか ice line の動きは小さく、結局この影響は小さいものと考えられる。

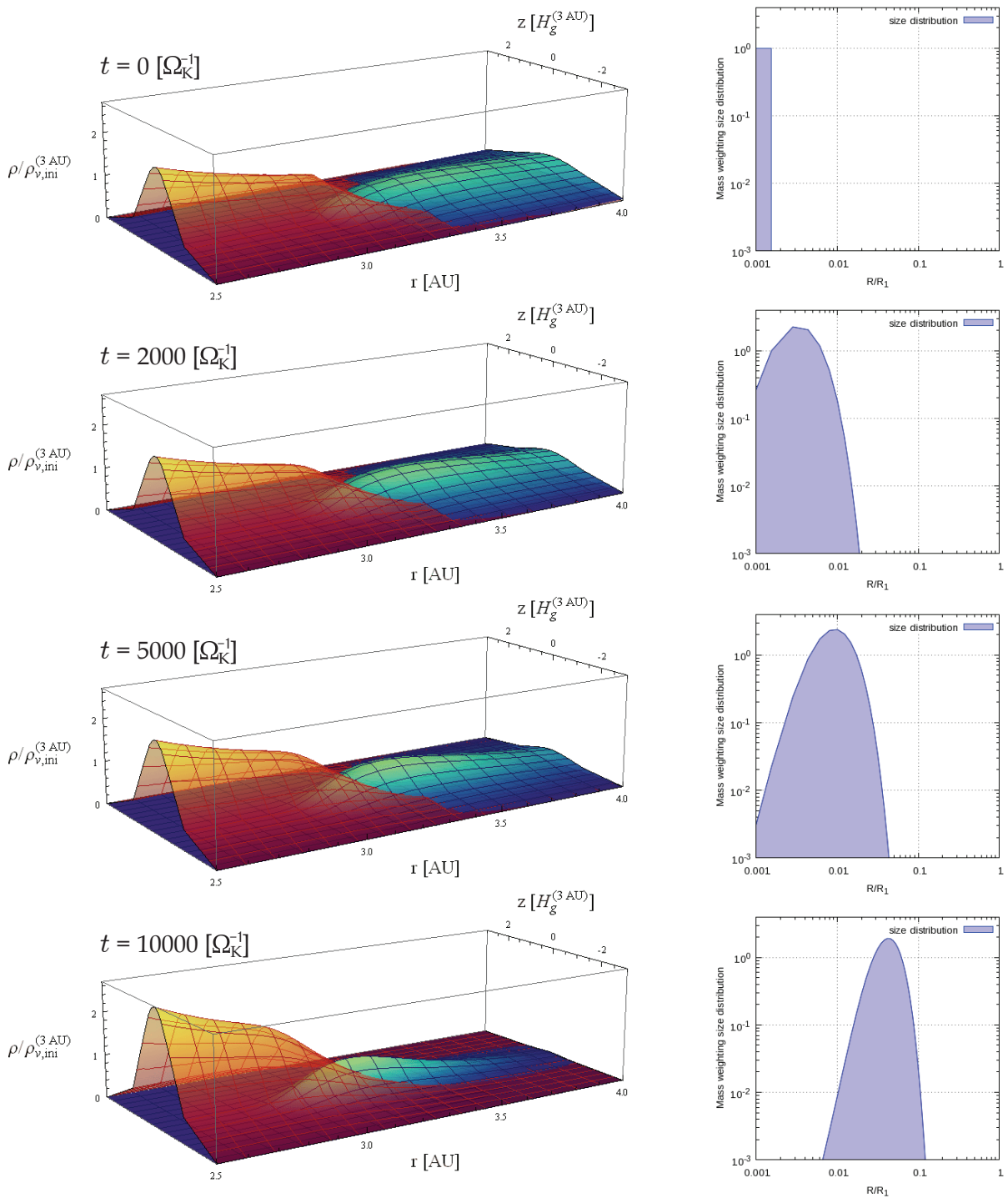
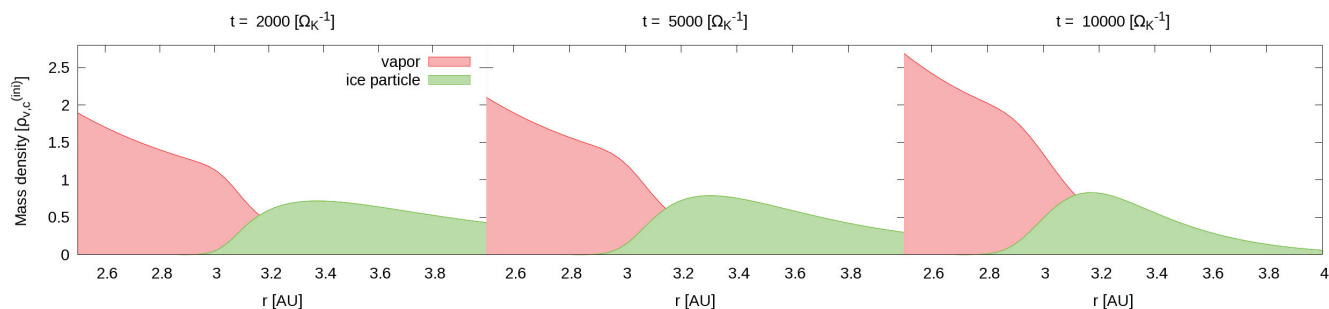


図 7.9: 2D Advanced model (初期条件：凝縮-昇華定常分布； $r_{\min} = 2.5\text{AU}$, $r_{\max} = 4.0\text{AU}$)
 $t = 10000 \Omega_K^{-1}$ までの密度分布およびサイズ分布の時間発展の様子を表している。境界条件は、 r, z 方向ともに境界でフラックスをゼロとしている (シミュレーションボックス内で水蒸気と氷ダストの質量の総和は保存する)。成長が進み氷ダストの粒径が大きくなるにつれて r 方向のドリフト速度が大きくなって、昇華領域に落下している。落下した氷ダストの分だけ昇華領域で水蒸気密度が高くなるが、その一部は再び凝縮領域側へと拡散する。ただし、 $\tau_s \gtrsim 0.1$ となるとその拡散速度よりも氷ダストの落下速度のほうが大きくなって氷ダストは昇華する一方になる。

図 7.10: 赤道面での質量密度 (初期条件: 凝縮 - 昇華定常分布; $\alpha = 10^{-2}$)

最後に, α パラメータを変えたときの粒径平均 $\langle R \rangle$ の時間発展の様子を図 7.12 に描いておく. ただし, それぞれの場合についてダストの総量が 0 になったところ, つまりすべてのダストが水蒸気になってしまった時刻で計算を終了している. 加えて, この図 7.12 にはシミュレーションボックスの動径外側の境界 $r_{\max}$ に関して, α パラメータの各値で $r_{\max} = 3.5, 4.0, 4.5 \text{ AU}$ として計算を行っている. α の値を小さくすると氷ダストがすべて昇華してしまうまでの寿命は延びるがダストは結果的にあまり成長できないことが, また, 外側の境界 $r_{\max}$ を大きくすると, これも寿命は延ばせるがダストは同程度の成長しかできないことがわかる. 結局のところ, 今回の計算では境界条件はあまり重要ではなく, 氷ダストの成長上限を支配しているのはあくまでも式 (7.14) のように $\tau_{s,\text{crit}} \sim \alpha / \sqrt{\eta} \sim 0.1$ であることがわかる. このように乱流拡散は氷ダストの成長を速めるだけでなく, 氷ダストの中心星落下を押しとどめて その成長上限を決定するという役割をも担っている.

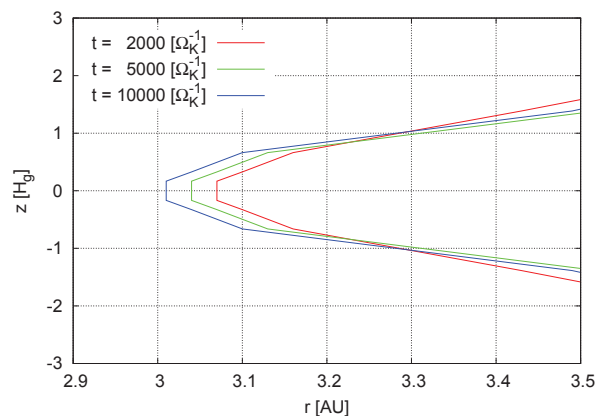
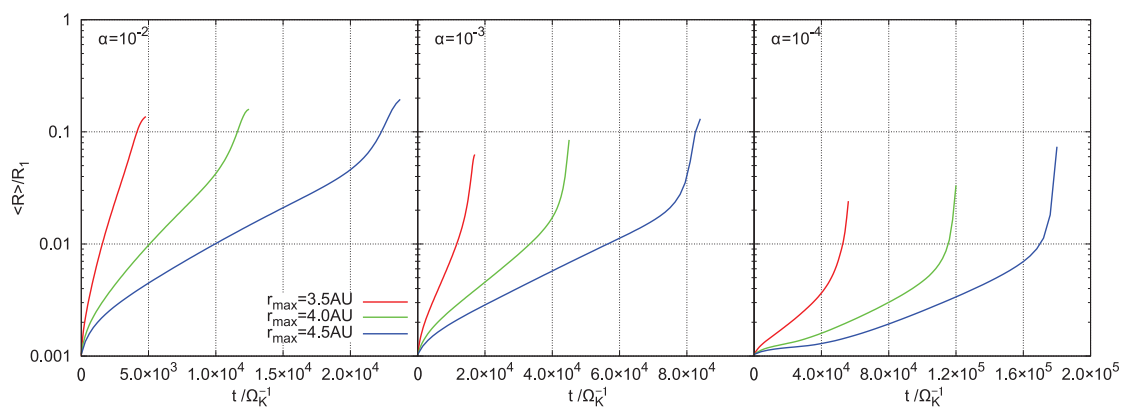


図 7.11: Ice line の時間発展

図 7.12: 粒径平均 $\langle R \rangle$ の時間発展 (空間 2D: r, z 方向; 初期条件: 凝縮 - 昇華定常分布)

8 結論

惑星系形成理論においてダストの成長を考えることは重要である。特に 1mm サイズから 10cm サイズへの成長に関しては、跳ね返り等の問題により単純な合体成長は難しいため、他のメカニズムで成長させる必要がある。本稿では、ice line 近傍における氷ダストの凝縮・昇華に着目し、移流拡散方程式を数値的に解くことでこのサイズ範囲での成長を議論した。計算結果より鉛直 z 方向の空間 1 次元計算ではおよそ 1000 年で 1mm から 10cm に成長することがわかった。一方で動径 r 方向の次元も含めた空間 2 次元計算では 10000 年程の時間を掛けてもせいぜい 10cm に満たないサイズまでしか成長させられないという結果になった。これは r 方向のドリフトによって動径内側へと向かう氷ダストのフラックスが $\sim 10\text{cm}$ で拡散フラックスを上回ってしまうためである。すなわち 2 次元計算では、氷ダストは成長しすぎると移流優勢で ice line をまたいで一方的に昇華して消滅してしまう。同じ移流優勢の状況でも z 方向のみの空間 1 次元計算の場合においてダストが比較的成長し続けられるのは、 z 方向の沈降運動が ice line から遠ざかる向き (赤道面へと向かう方向) の運動だからである。これに対して、 r 方向を含めるとダストが成長するにつれてドリフトは速くなって ice line がそれよりも速い速度で動径内側へと移動しない限りダストは成長できないどころか昇華してしまうことになる。計算結果からは ice line の移動速度はドリフト速度に対して十分遅いため、氷ダストが大きく成長した場合、ほとんど一方的に昇華してしまうことになるというわけである。

本研究の成果

本稿のモデルによる計算は結果的には Ros & Johansen 2013 [9] とおおよそで一致した。しかし、氷ダストならびに水蒸気を流体と見なして移流拡散方程式を解いた点で進展があったと言っていいたいだろう。流体的に解くことで計算の効率は大きく上がり、それによって空間 2 次元計算も余裕を持って行うことが出来た。それに加え、本稿では水蒸気量の変化に伴う ice line の移動を含めて計算を行った。このように惑星系形成理論で大きな役割を果たす一方で謎に包まれた存在でもあった ice line について定量的に考察が行えたことも 1 つの成果と言える。観測の分野においても、つい最近になってやっと初めて ice line(CO 分子) の直接撮像が成功した [31]。今後は観測と理論の両面から ice line の理解を試みるのが可能になってくるはずである。

サイズ 10cm からのダスト成長プロセス

今回の計算の結末としては、10cm 程度まで成長したのち 氷ダストは全滅してしまうという結果になった。すなわち氷ダストの成長は、凝縮・昇華により「跳ね返りの壁」はぎりぎり越えられるものの「中心星落下の壁」に阻まれるということになった。しかし、これは見方を変えれば「中心星落下と Streaming instability[29] の効果との競争」という興味深い問題へと繋がる。10cm サイズのダストでも微惑星系形成まで可能性があるとする報告 [30] もあるため、将来的には、本稿で行った氷ダスト成長の計算にこの Streaming instability の効果も加えた数値計算・研究がなされることを期待する。

他のダスト成長理論との関係

本稿では氷ダストの成長を凝縮・昇華によるメカニズムに注目し議論したが、この成長プロセスは ice line 近傍で有効に働くものであり、原始惑星系円盤のどこでも通用するダスト成長シナリオではないことに注意すべきである。もちろん、この凝縮・昇華成長プロセス以外にもダストの成長理論はいくつか提唱されている。特に最近明らかになった理論としてはダストアグリゲイトの空隙率を考慮した研究がある [24][25][26]。この研究では、本稿で密度一様・球対称として扱った氷ダストを、より現実的に、空隙があるようなダスト (porous aggregates) として扱い、惑星形成の古典的な標準理論では考慮されていなかったダストの内部構造進化を理論的に追っている。結果からは、「惑星の種」は一旦すき間だらけになった後、円盤ガスの向かい風や自身の重力によって圧縮され、10km サイズの微惑星が形成されることが示されている。このような空隙率を考慮したダスト成長理論の強みは、アグリゲイトが氷粒子で構成されている場合、「中心星落下」「衝突破壊」「跳ね返り」という惑星形成初期の3つの問題を全て克服している点にある。すなわち、低密度化に伴う高速成長によって中心星落下が回避され、また、氷から成るアグリゲイトの強い付着力により衝突破壊問題を克服。さらに、跳ね返りの問題についてもアグリゲイトの空隙が衝突の衝撃を吸収する「クッション」となることで解決されるというわけである。反して、この理論の弱点としては、氷ダストが高空隙率のアグリゲイトになることを大前提としている点である。これは水蒸気の凝縮を無視していることに他ならない。なぜなら凝縮が起こるとアグリゲイトがコンパクト球になってしまい空隙率が低くなるからである。つまり、高空隙ダストの成長理論は ice line 近傍には適用できないということになって、本稿の題目とした ice line 近傍における凝縮・昇華による氷ダストの成長理論とはまさに相補的な関係になっていることがわかる。このように、補完的な役割を担うダスト成長理論としても本稿の研究は意義深いものであったと言えよう。

強乱流下における微惑星形成シナリオとしての有望性

図 7.12 の様子からわかるように、本稿の凝縮・昇華による氷ダスト成長プロセスは乱流が強い (乱流粘性のパラメータ α が大きい) ほど成長が速く進むことが特徴である。これは拡散が効くことで ice line をまたぐ気相-固相間の質量交換が促進されるためである。加えて、乱流の強さは成長を加速させるだけにとどまらず、式 (7.14) のように このプロセスにおいて氷ダストが成長できるサイズの上限 $R_{\text{crit}} \sim \alpha R_1 / \sqrt{\eta}$ をも与える (図 7.12 参照)。拡散によって中心星落下を抑制していた状態がサイズ R_{crit} を越えると破綻し、氷ダストは移流優勢で一方的に昇華領域へと落下し消滅してしまうわけである。このことから本稿の氷ダスト成長理論は強乱流下における微惑星形成プロセスとして重要であると言える。凝縮・昇華による成長で「跳ね返り」の問題を解決できたとするならば、前述のように、本稿の理論は Streaming instability の効果を含めた重力不安定シナリオ [32] に対して初期条件を提供していると考えられる。特に、円盤形成初期はガス円盤は重力的に不安定で、これによって強い乱流が駆動されている可能性があり (円盤が不安定でかつ円盤の冷却時間が長い場合、重力分裂が起ききらずに乱流状態となる [33])、このような状況下での微惑星形成シナリオとして本稿の氷ダスト成長理論は有望であろう。このシナリオはこれから具体的に検討する価値がありそうである。

付録 A エプスタイン則 (Epstein law)

ガス分子の平均自由行程 l_g に対して十分に小さい粒径 R のダスト球が受けるガス抵抗について考える [45]. 静止系でガス分子はマクスウェル・ボルツマン分布しているものとする, 位相空間中の $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ から $(\mathbf{r} + d^3\mathbf{r}, \mathbf{v} + d^3\mathbf{v})$ の範囲内にある分子数は

$$f_0(\mathbf{v})d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v} = n_g \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_g}{2k_B T} \mathbf{v}^2} d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v} \quad (\text{A.1})$$

と書ける. 静止系で速度 $\mathbf{v}$ のガス分子は, 速度 $\mathbf{V}$ で運動するダストから見ると速度 $\mathbf{v} - \mathbf{V}$ で運動しているように見える. このことからダストとともに動く慣性系において, 位相空間中の $(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \mathbf{V})$ から $(\mathbf{r} + d^3\mathbf{r}, \mathbf{v} - \mathbf{V} + d^3\mathbf{v})$ の範囲内にある分子数は

$$f_V(\mathbf{v} - \mathbf{V})d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v} = n_g \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_g}{2k_B T} \mathbf{v}^2} d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v} \quad (\text{A.2})$$

と表すことが出来る. $\mathbf{V} = \alpha V \mathbf{e}_x + \beta V \mathbf{e}_y + \gamma V \mathbf{e}_z$ (α, β, γ はそれぞれ $\mathbf{V}$ の x, y, z 座標に関する方向余弦) とし, また, ダストは音速に比べて十分ゆっくりと動いているものとすれば, ガス分子の速度分布関数

$$f_V(\mathbf{v}) = n_g \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_g}{2k_B T} (\mathbf{v} + \mathbf{V})^2} \quad (\text{A.3})$$

は V の 1 次までの近似で

$$f_V(\mathbf{v}) = n_g \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \left\{ 1 - \frac{m_g}{k_B T} V(\alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z) \right\} e^{-\frac{m_g}{2k_B T} \mathbf{v}^2} \quad (\text{A.4})$$

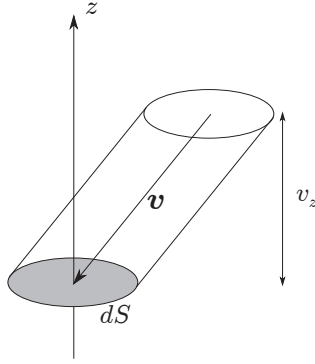
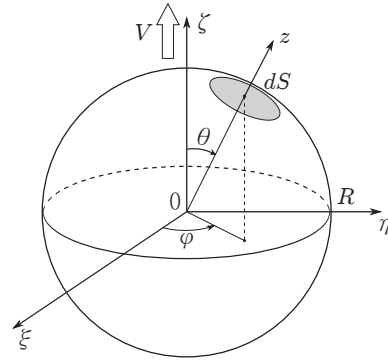
と展開できる. ここで, z 軸に垂直な微小面積 dS に対して $v_z < 0$ で衝突する分子について考える. 図 A.1 のように dS を底とし $\mathbf{v}$ の方向に伸びた円柱を想定したとき, この円柱内にある分子は単位時間中に必ず dS に衝突する. この円柱内にあって, $\mathbf{v}$ から $\mathbf{v} + d^3\mathbf{v}$ の範囲内にある分子数 (単位時間あたりに微小面 dS に衝突する分子数) は

$$N(\mathbf{v})dSd^3\mathbf{v} = -v_z f_V(\mathbf{v})dSd^3\mathbf{v} \quad (\text{A.5})$$

と書けることから, この微小面 dS が単位時間あたりにガス分子から受け取る運動量 (z 座標 負の向き) は, 弾性衝突を仮定して

$$\begin{aligned} MdS &= dS \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^0 dv_z 2m_g v_z N(\mathbf{v}) \\ &= -2\rho_g \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} dS \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^0 dv_z \left(v_z^2 - \frac{m_g V}{k_B T} \gamma v_z^3 \right) e^{-\frac{m_g}{2k_B T} \mathbf{v}^2} \\ &= -2\rho_g \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} dS \int_{-\infty}^0 dv_z \left(v_z^2 - \frac{m_g V}{k_B T} \gamma v_z^3 \right) e^{-\frac{m_g}{2k_B T} v_z^2} \\ &= -\rho_g \left(\frac{k_B T}{m_g} + \gamma \sqrt{\frac{8}{\pi}} c_{s,g} V \right) dS \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

とわかる. ただし, $\rho_g \equiv m_g n_g$ はガスの空間密度, $c_{s,g} \equiv \sqrt{k_B T / m_g}$ はガスの音速である.

図 A.1: 微小面 dS に衝突するガス分子図 A.2: ダスト球表面上の微小面 dS

さらにここで, 図 A.2 のように $\mathbf{V}/V = \mathbf{e}_\zeta$ となるような直交座標 (ξ, η, ζ) を張る ($\mathbf{e}_\zeta$ は ζ 座標の単位ベクトル). この (ξ, η, ζ) 座標系の中で微小面 dS はダスト球表面上にあるものとし, その位置を角度 θ, φ で記述する. このとき, $\mathbf{V}$ の z 座標に関する方向余弦は $\gamma = \cos \theta$ であることから, 式 (A.6) より角度 θ に位置する微小面 dS が単位時間あたりに受け取る運動量は

$$MdS = -\rho_g \left(\frac{k_B T}{m_g} + \sqrt{\frac{8}{\pi}} c_{s,g} V \cos \theta \right) \quad (\text{A.7})$$

となる. この MdS の $\mathbf{V}$ 方向の成分 $M \cos \theta dS$ をダスト球面上で積分することで, 単位時間あたりのダストの運動量変化が計算でき, これはダストがガスから受ける抵抗力に他ならないので, 以上よりエプスタイン則

$$\begin{aligned} F_D^{(\text{Ep})} &= R^2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi M \cos \theta \sin \theta \\ &= -\frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \rho_g R^2 c_{s,g} V \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

が求められる.

付録B ストークス則 (Stokes law)

ストークス則は、非圧縮²⁴・低レイノルズ数²⁵の流れに成り立つ抵抗則である [46].

以下、 z 軸に対して軸対称で一様な流れの中に粒径 R のダスト球が置かれてある状況を考える (図 B.1). このとき非圧縮性 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ は 3 次元極座標 (r, θ, φ) を用いて

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \underbrace{\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}}_0 = 0 \quad (\text{B.3})$$

と書くことが出来る. この式 (B.3) は任意のスカラー関数 $\Psi(r, \theta)$ を用いて

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

と置くと自動的に満たされることがわかる. この関数 Ψ を「ストークスの流れの関数」あるいは単に「流れの関数」と言う.

ナビエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_g} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{B.5})$$

に非圧縮性および低レイノルズ数の流れであることを用いると

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_g} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (\text{B.6})$$

とできる. このように、低レイノルズ数の流れに対して非線形項 (移流項) を落としナビエ・ストークス方程式を線形近似することを「ストークス近似」と言う. ここで、渦度を $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ と定義し、式 (B.6) の両辺の rot をとると

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (\text{B.7})$$

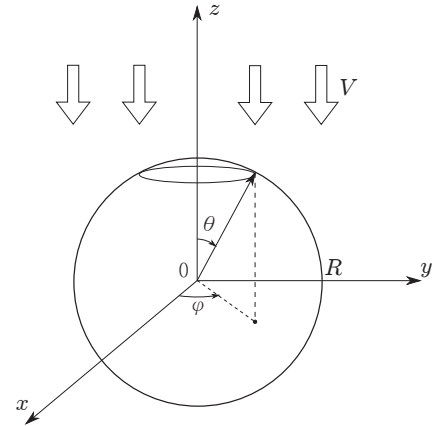


図 B.1: ストークス流

²⁴流れに沿って密度 ρ_g が変化しないことを言う. すなわち $\frac{D\rho_g}{Dt} = 0$ であり、連続の式 $\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{v}) = 0$ に代入すれば

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{B.1})$$

と表される. なお, $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ は流れに沿った時間微分 (ラグランジュ微分) である.

²⁵レイノルズ数 Re は

$$Re = \frac{(\text{慣性項})}{(\text{粘性項})} = \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu} \quad (\text{B.2})$$

で定義される (L は系の特徴的な長さ, U は系の特徴的な速さ). 低レイノルズ数の流れとは、つまり、粘性項に比べて慣性項が無視できるような流れのことである.

が得られる²⁶. これより定常流の場合

$$\Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad (\text{B.8})$$

となって, すなわち定常なストークス流の渦度は調和関数でなければならないことがわかる.

図 B.1 のような定常ストークス流について 3 次元極座標 (r, θ, φ) を用いて渦度 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ を表すと, $\partial/\partial\varphi = 0$, $v_\varphi = 0$ に注意して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[\underbrace{\frac{\partial(v_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta}}_0 - \underbrace{\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi}}_0 \right] + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \left[\underbrace{\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}}_0 - \underbrace{\frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial r}}_0 \right] + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\ &= -\mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

となる. $X = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \Psi$ と置けば

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_\varphi \frac{-X}{r \sin \theta} \quad (\text{B.10})$$

とでき, また $\boldsymbol{\omega}$ の r, θ 成分 ω_r, ω_θ が 0 であることから $\Delta \boldsymbol{\omega}$ は

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{e}_r \left[\underbrace{\Delta \omega_r}_0 - \underbrace{\frac{2\omega_r}{r^2}}_0 - \underbrace{\frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(\omega_\theta \sin \theta)}{\partial \theta}}_0 - \underbrace{\frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \varphi}}_0 \right] \\ &\quad + \mathbf{e}_\theta \left[\underbrace{\Delta \omega_\theta}_0 + \underbrace{\frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta}}_0 - \underbrace{\frac{\omega_\theta}{r^2 \sin^2 \theta}}_0 - \underbrace{\frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \varphi}}_0 \right] \\ &\quad + \mathbf{e}_\varphi \left[\Delta \omega_\varphi + \underbrace{\frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi}}_0 + \underbrace{\frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \varphi}}_0 - \frac{\omega_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \\ &= \mathbf{e}_\varphi \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \theta} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \omega_\varphi}{\partial \varphi^2}}_0 - \frac{\omega_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \\ &= -\mathbf{e}_\varphi \left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{X}{r} \right) \right\} + \frac{1}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{X}{\sin \theta} \right) \right\} - \frac{X}{r^3 \sin^3 \theta} \right] \\ &= -\mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] X \\ &= -\mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \Psi \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

²⁶ベクトル解析の恒等式 $\text{rot grad} = 0$, $\text{div rot} = 0$, $\text{rot rot} = \text{grad div} - \text{div grad}$ および

$$\begin{aligned} \text{rot } \Delta \mathbf{v} &= \text{rot div grad } \mathbf{v} = \text{rot} (\text{grad div} - \text{rot rot}) \mathbf{v} \\ &= -(\text{grad div} - \text{div grad}) \text{rot } \mathbf{v} = \text{div grad rot } \mathbf{v} \\ &= \Delta \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

を用いた.

と表されることになる. 定常ストークス流に対しては式 (B.8) が成り立つはずなので結局,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \Psi = 0 \quad (\text{B.12})$$

を解けば流れの関数 Ψ が求められることになる.

「ダスト球表面において流速が0」「無限遠方において流れが一様」という境界条件

$$\begin{cases} r \rightarrow R \text{ (ダスト球表面)} \\ v_r = 0, v_\theta = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0 \\ r \rightarrow \infty \text{ (無限遠方)} \\ v_r = -V \cos \theta, v_\theta = V \sin \theta, \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -V r \sin^2 \theta, \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -V r^2 \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

で式 (B.12) を解くことを考える. 流れの関数 Ψ に関する境界条件を積分すると

$$\Psi = -\frac{1}{2} V r^2 \sin^2 \theta \quad (\text{B.14})$$

となる. この θ 依存性を用いて解を変数分離形で $\Psi = f(r) \sin^2 \theta$ と仮定し, 式 (B.12) に代入することにより $f(r)$ についての方程式

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right]^2 f(r) = 0 \quad (\text{B.15})$$

が得られる. $\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right] f(r) = F(r)$ と置くと, 式 (B.15) は

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right] F(r) = 0 \quad (\text{B.16})$$

となって, この微分方程式に関しては容易に解くことができて²⁷

$$F(r) = \frac{A}{r} + Cr^2 \quad (\text{B.18})$$

を得る (ただし A, C は積分定数). これより $f(r)$ に関して非斉次微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right] f(r) = A \frac{1}{r} + Cr^2 \quad (\text{B.19})$$

が成り立つことになるが, 形からこの方程式の解の一つとして

$$f_0(r) = Br + Dr^4 \quad (\text{B.20})$$

²⁷ $r \frac{d}{dr} r \frac{dF}{dr} = r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr}$ より式 (B.16) は, $\xi \equiv \ln r$ を用いて $\frac{d^2 F}{d\xi^2} - \frac{dF}{d\xi} - 2F = 0$ と表すことができる. これを解くことにより

$$F = A e^{-\xi} + C e^{2\xi} \quad \therefore F = \frac{A}{r} + Cr^2 \quad (\text{B.17})$$

が得られる.

があることがわかる (B, D は任意定数). 一方, 式 (B.19) に対応する斉次微分方程式の解は $F(r)$ そのものであり, 非斉次微分方程式の一般解は特殊解と斉次解の和で書けることから, 一般解

$$f(r) = f_0(r) + F(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4 \quad (\text{B.21})$$

が得られる. これより求められる流れの関数

$$\Psi = \left(\frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4 \right) \sin^2 \theta \quad (\text{B.22})$$

を式 (B.4) に代入し, 境界条件 (B.13) より係数 A, B, C, D を決定すると, 流速 $\mathbf{v}$ は

$$\begin{cases} v_r = 2 \cos \theta \left(\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2 \right) = -V \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \\ v_\theta = \sin \theta \left(\frac{A}{r^3} - \frac{B}{r} - 2C - 4Dr^2 \right) = -V \sin \theta \left(-1 + \frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3} \right) \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

となる. この式 (B.23) で表される速度場の中で, ダスト球表面に働く力について計算を行う. 定常流を考えていたので, 式 (B.6) より圧力勾配は

$$\nabla P = \rho_g \nu \Delta \mathbf{v} \quad (\text{B.24})$$

であり, ダスト球表面に対して垂直に働く成分すなわち r 成分を考えると, $\Delta \mathbf{v}$ の r 成分が

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{v})_r &= \Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \underbrace{\frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2}}_0 \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2}}_0 - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} \\ &= -3V \cos \theta \frac{R}{r^3} \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

であることから

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -3\rho_g \nu V \cos \theta \frac{R}{r^3} \quad (\text{B.26})$$

となる. この両辺を無限遠からダスト球表面 $r = R$ まで積分することで

$$P_R(\theta) = P_\infty + \frac{3\rho_g \nu V}{2R} \cos \theta \quad (\text{B.27})$$

が得られる. 一方, 接線応力 $\sigma_{r\theta}$ に関しても式 (B.23) を用いて

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}(\theta) &= \rho_g \nu \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} \right)_r + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} \right)_\theta \right] \Big|_{r=R} = \rho_g \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right] \Big|_{r=R} \\ &= \frac{3\rho_g \nu V}{2R} \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

となる. 以上の圧力と接線応力の z 成分をダスト球表面上で積分することでストークス則

$$\begin{aligned} F_D^{(\text{St})} &= - \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (P_R(\theta) \cos \theta - \sigma_{r\theta}(\theta) \sin \theta) \\ &= -6\pi \rho_g \nu R V \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

が導かれる. エプスタイン則 (A.8) の場合, ダスト球に働く抵抗力が粒径 R の 2 乗に比例していたのに対して, ストークス則 (B.29) では抵抗力は R に比例していることがわかる.

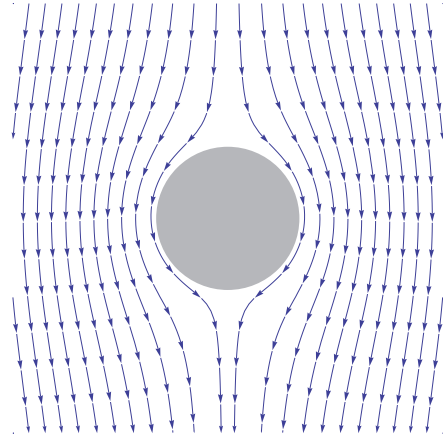
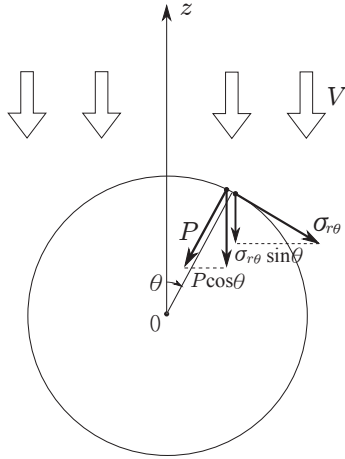


図 B.2: ダスト球表面に作用する圧力と接線応力 図 B.3: ダスト球のまわりのストークス流

付録 C ガスの動粘性係数

平均自由行程の概念を用いて気体の分子粘性を考察する。いま, 図 C.1 のように, 流体が x 軸方向に流れておりその流速 $v_x(z)$ は z だけに依存しているとする. $z = 0$ を z 正方向へと通過する分子数と z 負方向へと通過する分子数のそれぞれフラックス F_+ , F_- は

$$\begin{cases} F_+ = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_0^{\infty} dv_z v_z f_g(\mathbf{v}, z=0) & (C.1) \\ F_- = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^0 dv_z v_z f_g(\mathbf{v}, z=0) & (C.2) \end{cases}$$

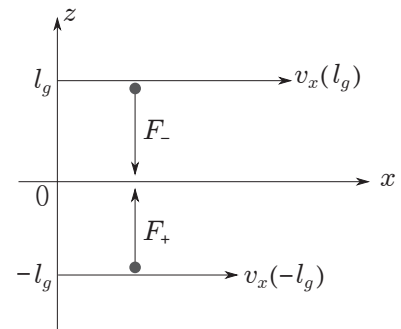


図 C.1: 分子粘性による輸送現象

であり, ガス分子の速度がマクスウェル・ボルツマン分布に従うものとするば

$$\begin{cases} F_+ = n_g \left(\frac{m_g}{k_B T} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_0^{\infty} dv_z v_z e^{-\frac{m_g}{2k_B T} \mathbf{v}^2} & (C.3) \\ F_- = n_g \left(\frac{m_g}{k_B T} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^0 dv_z v_z e^{-\frac{m_g}{2k_B T} \mathbf{v}^2} & (C.4) \end{cases}$$

より

$$F_+ = F_- = \frac{1}{4} n_g v_m \quad (C.5)$$

と表すことが出来る. ただし, ここで速度の絶対値 $|\mathbf{v}|$ の平均

$$v_m \equiv \left(\frac{m_g}{k_B T} \right)^{3/2} \int d^3 \mathbf{v} |\mathbf{v}| e^{-\frac{m_g}{2k_B T} \mathbf{v}^2} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_g}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} c_{s,g} \quad (C.6)$$

を用いた. $z = 0$ の面を通過して z 正方向あるいは負方向に運ばれる x 方向の運動量は, $z = 0$ の位置から平均自由行程 l_g 程度離れたところから運ばれてくると考えて良い. このことから, $z = 0$

における z 正の向きおよび負の向きの運動量フラックス M_+, M_- は

$$\left\{ \begin{array}{l} M_+ = \frac{1}{4} m_g n_g v_m v_x(-l_g) = \frac{1}{4} \rho_g v_m \left(v_x(z=0) - l_g \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=0} \right) \end{array} \right. \quad (C.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_- = \frac{1}{4} m_g n_g v_m v_x(l_g) = \frac{1}{4} \rho_g v_m \left(v_x(z=0) + l_g \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=0} \right) \end{array} \right. \quad (C.8)$$

と評価される. 従って, $z=0$ における正味の運動量フラックス M は

$$M = M_+ - M_- = -\frac{1}{2} \rho_g v_m l_g \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (C.9)$$

となって, これが粘性応力 $-\mu(\partial v_x/\partial z)$ と等しくあるべきなので, 結局, 動粘性係数 $\nu = \mu/\rho_g$ を

$$\nu = \frac{1}{2} v_m l_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8}{\pi}} c_{s,g} l_g \quad (C.10)$$

と得る. 平均自由行程 l_g は, 一般に, そのガス分子の衝突断面積 (cross section) σ を用いて

$$l_g = \frac{1}{n_g \sigma} = \frac{\mu_g m_H}{\rho_g \sigma} \quad (C.11)$$

と書けることから, 動粘性係数 ν は式 (C.10) よりガスの質量密度 ρ_g に反比例することになる. これは驚くべきことにストークス則 (B.29) におけるガスから受ける抵抗力 $F_{\text{drag}}^{(\text{St})}$ がガス密度 ρ_g に依らないことを示している [16].

付録 D Hill 方程式

軌道半径 a_0 , 角速度 $\Omega_0 \equiv \Omega_K(a_0)$ でケプラー円運動する点を座標原点とする回転座標系を考える. このような座標系は, 太陽を中心に回転する惑星の周囲の粒子の運動等を記述するためによく用いられ「Hill 座標系」と呼ばれている. この Hill 座標系を用い, 局所近似 (Hill 近似)

$$\begin{cases} \text{軌道長半径} & a_p \sim a_0 \\ \text{離心率} & e_p \ll 1 \\ \text{軌道傾斜角} & i_p \ll 1 \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

および粒子質量が $m_p \ll M_*$ という条件のもとで近似的に成り立つ運動方程式のことを「Hill 方程式」と言う (図 D.2).

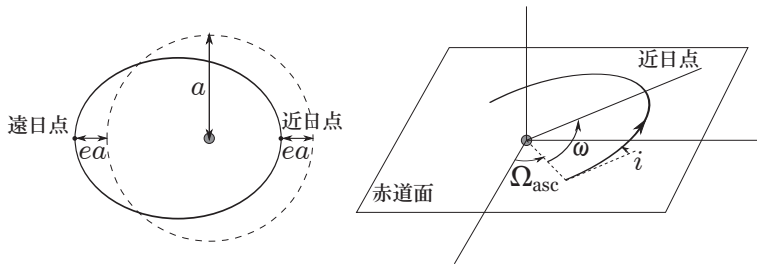


図 D.1: ケプラー軌道要素

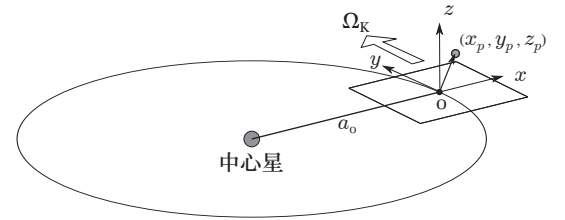


図 D.2: Hill 座標系

ここでは中心星のまわりをケプラー回転している2つの粒子 ($p = 1, 2$) の相互作用を考える. $m_1, m_2 \ll M_*$ であるため, 重力場は圧倒的に中心星重力によって占められているものの, 2つの粒子がきわめて近づいたときに限って粒子間重力は効果的になる. 粒子間の相対距離を r_{12} とすると Hill 近似のもとで, 運動方程式は Hill 方程式

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = 2\Omega_0 \dot{y}_p + 3\Omega_0^2 x_p - \frac{GM_{p'}}{r_{12}^3} (x_p - x_{p'}) \\ \ddot{y}_p = -2\Omega_0 \dot{x}_p - \frac{GM_{p'}}{r_{12}^3} (y_p - y_{p'}) \\ \ddot{z}_p = -\Omega_0^2 z_p - \frac{GM_{p'}}{r_{12}^3} (z_p - z_{p'}) \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

として表すことが出来る ($p \neq p'$). $2\Omega_0 \dot{y}_p, -2\Omega_0 \dot{x}_p$ はコリオリ力, $-\Omega_0^2 z_p$ は中心星重力の z 成分, $3\Omega_0^2 x_p$ は中心星重力の x 成分と遠心力の合力 (潮汐力)²⁸ である.

式 (D.2) で粒子間相互作用を無視した場合, すなわち2つの粒子が独立に中心星のまわりをケプラー回転する場合について考えることにする. このとき粒子 p の x, y 方向の運動 (面内運動) は

$$\ddot{x}_p = 2\Omega_0 \dot{y}_p + 3\Omega_0^2 x_p \quad (\text{D.3})$$

$$\ddot{y}_p = -2\Omega_0 \dot{x}_p \quad (\text{D.4})$$

のように z 方向の運動 (面外運動) とは分離された形で表すことが出来る. 式 (D.4) の両辺を積分すると, 積分定数 B を用いて

$$\dot{y}_p = -2\Omega_0 x_p + \frac{B\Omega_0}{2} \quad (\text{D.5})$$

と書ける. これを式 (D.3) に代入すると

$$\ddot{x}_p = -\Omega_0^2 x_p + B\Omega_0^2 \quad (\text{D.6})$$

となるが, この微分方程式は容易に解くことが出来て

$$x_p = A \cos[\Omega_0(t - \tau_p)] + B \quad (\text{D.7})$$

を得る (A, τ_p は積分定数). $t = \tau_p$ において $x_p = (1 - e_p)a_p - a_0$ および $t = \tau_p + (\pi/\Omega_0)$ において $x_p = (1 + e_p)a_p - a_0$ という条件を課すことで積分定数は $A = -e_p a_p$, $B = a_p - a_0$ と決定できて, 結局, 面内運動の粒子の軌跡は

$$\begin{cases} x_p = (a_p - a_0) - e_p a_p \cos[\Omega_0(t - \tau_p)] \\ y_p = \varpi_p - \frac{3}{2}\Omega_0(a_p - a_0)t + 2e_p a_p \sin[\Omega_0(t - \tau_p)] \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

$$(\text{D.9})$$

と求められる (φ_p は積分定数). これより粒子の面内運動は, x, y 方向の振動数 Ω_0 の「エピサイクリック振動 (Epicyclic oscillation)」と, ケプラー角速度 Ω_K が a に依存していること (差動回転) に起因して y 方向に $-3(a_p - a_0)\Omega_0/2$ の速度で少しずつずれていく「シア運動 (Shear motion)」の重ね合わせになっていることがわかる. 一方で, z 方向に関しては

$$\ddot{z}_p = -\Omega_0^2 z_p \quad (\text{D.10})$$

を解くことで

$$z_p = i_p a_p \Omega_0 \cos[\Omega_0(t - \tau_p) + \omega_p] \quad (\text{D.11})$$

を得られ (i_p, ω_p は積分定数), 円盤鉛直方向にも振動数 Ω_0 で振動していることがわかる. この振動のことを面内の振動運動と区別して「垂直振動 (vertical oscillation)」と言う. 式 (D.8), (D.9), (D.11) の振動運動部分に関しては, 一つの粒子を見れば規則的な振動であることは確かだが, たくさんの粒子を考えるとまるで無秩序にいろいろな方向に飛び回っているようにも見えるので, この部分をここでは「ランダム運動」と呼ぶことにする. 各場所での局所的なケプラー円運動から見ると, 粒子の速度 $(u_p, v_p, w_p) = (\dot{x}_p, \dot{y}_p + (3/2)x_p\Omega_0, \dot{z}_p)$ は

$$\begin{cases} u_p = e_p a_p \Omega_0 \sin[\Omega_0(t - \tau_p)] \\ v_p = \frac{1}{2}e_p a_p \Omega_0 \cos[\Omega_0(t - \tau_p)] \\ w_p = i_p a_p \Omega_0 \cos[\Omega_0(t - \tau_p)] \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

のようにランダム成分のみが残る形となって, それぞれ 2 乗の長時間平均²⁹ を取ると

$$\begin{cases} \overline{u_p^2} = \frac{1}{2}e_p^2 a_p^2 \Omega_0^2 \\ \overline{v_p^2} = \frac{1}{8}e_p^2 a_p^2 \Omega_0^2 \\ \overline{w_p^2} = \frac{1}{2}i_p^2 a_p^2 \Omega_0^2 \end{cases} \quad \therefore \sqrt{\overline{u_p^2}} = 2\sqrt{\overline{v_p^2}} \quad (\text{D.13})$$

が得られる. これに対して, 原点 O (fixed guiding center) から見た速度 $(\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p)$ のランダム成分についても 2 乗平均を求めると

$$\begin{cases} \overline{\dot{x}_p^2} = \frac{1}{2} e_p^2 a_p^2 \Omega_0^2 \\ \overline{\dot{y}_p^2} = 2 e_p^2 a_p^2 \Omega_0^2 \\ \overline{\dot{z}_p^2} = \frac{1}{2} i_p^2 a_p^2 \Omega_0^2 \end{cases} \quad \therefore \sqrt{\overline{\dot{x}_p^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\overline{\dot{y}_p^2}} \quad (\text{D.14})$$

となる [47].

²⁸ 中心星が質点であると考えれば, $\xi_p \equiv \sqrt{(a_0 + x_p)^2 + y_p^2}$ と置いて, 中心星の重力ポテンシャルは

$$\phi_*(\xi_p, z_p) = -\frac{GM_*}{\sqrt{\xi_p^2 + z_p^2}} \quad (\text{D.15})$$

と書ける. 円盤が赤道面に関して対称であることに注意して, この ϕ_* を $\xi_p = a_0, z_p = 0$ のまわりでテーラー展開すると

$$\begin{aligned} \phi_*(\xi_p, z_p) &\simeq \phi_*(a_0, 0) + (\xi_p - a_0) \left. \frac{\partial \phi_*}{\partial \xi_p} \right|_{\xi_p=a_0, z_p=0} + z_p \left. \frac{\partial \phi_*}{\partial z_p} \right|_{\xi_p=a_0, z_p=0} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\xi_p - a_0)^2 \left. \frac{\partial^2 \phi_*}{\partial \xi_p^2} \right|_{\xi_p=a_0, z_p=0} + (\xi_p - a_0) z_p \left. \frac{\partial^2 \phi_*}{\partial \xi_p \partial z_p} \right|_{\xi_p=a_0, z_p=0} + \frac{1}{2} z_p^2 \left. \frac{\partial^2 \phi_*}{\partial z_p^2} \right|_{\xi_p=a_0, z_p=0} \\ &\simeq -\frac{GM_*}{a_0} + \left(x_p + \frac{y_p^2}{2a_0} \right) \frac{GM_*}{a_0^2} - \frac{GM_*}{a_0^3} x_p^2 + \frac{GM_*}{2a_0^3} z_p^2 \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

となる. ただし, ここで $\xi_p(x_p, y_p) = \sqrt{(a_0 + x_p)^2 + y_p^2}$ の $x_p = 0, y_p = 0$ のまわりでのテーラー展開

$$\begin{aligned} \xi_p(x_p, y_p) &\simeq a_0 + x_p \left. \frac{\partial \xi_p}{\partial x_p} \right|_{x_p=0, y_p=0} + y_p \left. \frac{\partial \xi_p}{\partial y_p} \right|_{x_p=0, y_p=0} + \frac{1}{2} x_p^2 \left. \frac{\partial^2 \xi_p}{\partial x_p^2} \right|_{x_p=0, y_p=0} + x_p y_p \left. \frac{\partial^2 \xi_p}{\partial x_p \partial y_p} \right|_{x_p=0, y_p=0} + \frac{1}{2} y_p^2 \left. \frac{\partial^2 \xi_p}{\partial y_p^2} \right|_{x_p=0, y_p=0} \\ &\simeq a_0 + x_p + \frac{y_p^2}{2a_0} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

を用いた. 一方, 遠心力ポテンシャル U は

$$U = -\frac{1}{2} \Omega_0^2 [(a_0 + x_p)^2 + y_p^2] = -\frac{GM_*}{2a_0^3} (a_0^2 + 2a_0 x_p + x_p^2 + y_p^2) \quad (\text{D.18})$$

であるから, 中心星重力と遠心力の和を計算すると, x, z 方向それぞれに関して

$$F_x = -\frac{\partial \phi_*}{\partial x_p} - \frac{\partial U}{\partial x_p} = 3 \frac{GM_*}{a_0^3} x_p = 3 \Omega_0^2 x_p \quad (\text{D.19})$$

$$F_z = -\frac{\partial \phi_*}{\partial z_p} - \frac{\partial U}{\partial z_p} = -\frac{GM_*}{a_0^3} z_p = -\Omega_0^2 z_p \quad (\text{D.20})$$

と求められる.

²⁹ 本稿では, $X(t)$ の長時間平均を

$$\overline{X(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) dt \quad (\text{D.21})$$

で計算する.

付録 E 濃度拡散

溶媒と溶質の2成分からなる混合物について、その中で起こる拡散を考えることにする [48][49]. 円盤ガス中でのダスト粒子の拡散現象は、ガスを溶媒にダスト粒子が溶質として存在しているものとして取り扱えば良い. 溶媒に対して溶質が希薄である場合、溶質の拡散フラックスは濃度勾配に比例する形で表すことが出来る. これを「Fick の法則」と言う. 以下ではこのことを、単純化したモデルを用いて現象論的に導くことにする.

図 E.1 のように 1 次元格子を考えて溶媒粒子 (質量密度 ρ_g , 粒子質量 m_g) と溶質粒子 (質量密度 ρ_p , 粒子質量 m_p) を配置する. ただし、1 つのセルに対して溶媒粒子あるいは溶質粒子 1 つしか入れないものとする.

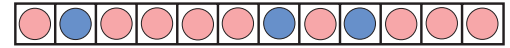


図 E.1: 格子ガスモデル

今、セル個数 N 個の格子に、溶媒粒子および溶質粒子

がそれぞれ N_g, N_p 個ずつあるものとすれば、溶媒粒子と溶質粒子を配置する場合の数 (状態数) W は

$$W = \frac{N!}{N_g!N_p!} \quad (\text{E.1})$$

と書くことが出来る. これはスターリングの公式を用いると (セル数が多い状況で)

$$\ln W \simeq N(\ln N - 1) - N_p(\ln N_p - 1) - N_g(\ln N_g - 1) \quad (\text{E.2})$$

と近似できるので、このとき、ボルツマンの原理よりエントロピー S は

$$S = k_B \ln W \simeq k_B(N \ln N - N_p \ln N_p - N_g \ln N_g) \quad (\text{E.3})$$

となる. ただしここで、空のセルは無いものとして $N = N_g + N_p$ を用いた. この S を用いれば、溶媒粒子と溶質粒子の化学ポテンシャルの差は、温度 T を用いて

$$\begin{aligned} \mu_p - \mu_g &= -T \left(\frac{\partial S}{\partial N_p} \right)_{U, V, N} \\ &= k_B T \ln \left(\frac{N_p}{N_g} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

と計算することができる³⁰. 一定体積 V 内にある溶媒と溶質の粒子数比は

$$\frac{N_p}{N_g} = \frac{\rho_p/m_p}{\rho_g/m_g} \quad (\text{E.7})$$

³⁰格子全体として体積 V が一定の場合 $N = N_g + N_p = \text{const}$ であることに注意すると、内部エネルギー U の微小変化は

$$\begin{aligned} dU &= TdS - PdV + \mu_g dN_g + \mu_p dN_p \\ &= TdS + (\mu_p - \mu_g) dN_p \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

と書けることから、化学ポテンシャルの差は

$$\mu_p - \mu_g = -T \left(\frac{\partial S}{\partial N_p} \right)_{U, V, N} \quad (\text{E.6})$$

と表せる.

であるから, 結局

$$\mu_p - \mu_g = k_B T \left[\ln \left(\frac{\rho_p}{\rho_g} \right) - \ln \left(\frac{m_p}{m_g} \right) \right] \quad (\text{E.8})$$

となる. これが局所的な溶質の化学ポテンシャルである.

一方で, 拡散フラックスは化学ポテンシャルの勾配 (の負) に比例すると考えられ

$$\mathbf{F}_{diff} \propto -\rho_p \nabla \left[\frac{\mu_p - \mu_g}{m_p} \right] \quad (\text{E.9})$$

とできる. 式 (E.9) において抵抗係数を γ_p と置き, 式 (E.8) を代入することで

$$\begin{aligned} \gamma_p \mathbf{F}_{diff} &= -\rho_p \nabla \left[\frac{\mu_p - \mu_g}{m_p} \right] \\ &= -\rho_g \frac{k_B T}{m_p} \nabla \left(\frac{\rho_p}{\rho_g} \right) \\ \therefore \mathbf{F}_{diff} &= -\rho_g D_p \nabla \left(\frac{\rho_p}{\rho_g} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

が得られる. ただし温度勾配の項は $\rho_p/\rho_g \ll 1$ のとき十分小さいものとしてここでは無視した. また拡散係数 D_p に関しては, アインシュタイン関係式に対応する形として

$$D_p \equiv \frac{k_B T}{m_p \gamma_p} \quad (\text{E.11})$$

と定義した.

付録 F 3 重対角行列の反転

本研究の数値計算手法としては、式 (5.36) および式 (5.37) の拡散項にクランク・ニコルソン法を用いた。このクランク・ニコルソン法にはその途中で「3 重対角行列の反転」という作業が必要となるので、ここではその計算方法について記述する。「3 重対角行列 (triagonal matrix)」とは、以下の行列 P のように対角成分とその上下の成分を除いてすべて 0 である行列のことである [27].

$$P = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & & & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} \\ 0 & & & & a_M & b_M \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{M-1} \\ q_M \end{bmatrix} \quad (\text{F.1})$$

今考えるべき 3 重対角行列の反転とは、このような行列 P とベクトル $\mathbf{q}$ に対して成り立つ線形の方程式

$$P \mathbf{x} = \mathbf{q} \quad (\text{F.2})$$

から未知のベクトル $\mathbf{x}$ を求めることに等しい。

・ LU 分解

通常、LU 分解とは、ある行列を下三角行列 (対角成分とその下側だけ 0 でない) と上三角行列 (対角成分とその上側だけ 0 でない) の積に分解することを意味するが、今回考えるような 3 重対角行列の場合は以下のように非常に簡潔に計算することが出来る。

行列 P が次のような 2 個の行列の積の形で $P = LU$ のように書けるものとする。

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & & \\ & \alpha_2 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \alpha_{M-1} & 1 & 0 \\ 0 & & & & \alpha_M & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} \beta_0 & \gamma_0 & & & 0 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 & & \\ & 0 & \beta_2 & \gamma_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & \beta_{M-1} & \gamma_{M-1} \\ 0 & & & & 0 & \beta_M \end{bmatrix} \quad (\text{F.3})$$

するとこのとき

$$LU = \begin{bmatrix} \beta_0 & \gamma_0 & & & 0 \\ \alpha_1 \beta_0 & \alpha_1 \gamma_0 + \beta_1 & \gamma_1 & & \\ & \alpha_2 \beta_1 & \alpha_2 \gamma_1 + \beta_2 & \gamma_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \alpha_{M-1} \beta_{M-2} & \alpha_{M-1} \gamma_{M-2} + \beta_{M-1} & \gamma_{M-1} \\ 0 & & & \alpha_M \beta_{M-1} & \alpha_M \gamma_{M-1} + \beta_M \end{bmatrix} \quad (\text{F.4})$$

より

$$\left\{ \begin{array}{lll} \alpha_0 = 0 & \beta_0 = b_0 & \gamma_0 = c_0 \\ \alpha_m = \frac{a_m}{\beta_{m-1}} & \beta_m = b_m - \alpha_m \gamma_{m-1} & \gamma_m = c_m \\ \alpha_M = \frac{a_M}{\beta_{M-1}} & \beta_M = b_M - \alpha_M \gamma_{M-1} & \gamma_M = 0 \end{array} \right. \quad (m = 1, 2, \dots, M-1) \quad (\text{F.5})$$

と出来る. $m = 0$ から $m = M$ へと順繰りに $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ を計算していけば結局, 行列 P の LU 分解がなされたことになる. ここで求められた行列 L および U は新たな $\mathbf{q}$ について式 (F.2) を解くときにも同じものを用いることが出来る. つまり, ひとたび LU 分解してしまえば $\mathbf{q}$ が変わっても次に述べる代入操作しかなくて済むのである.

・代入操作

式 (F.2) を解くには LU 分解で求められた L と U を用いて, $LU\mathbf{x} = \mathbf{q}$ より

$$\begin{cases} L\xi = \mathbf{q} \\ U\mathbf{x} = \xi \end{cases} \quad (\text{F.6})$$

$$(\text{F.7})$$

として, まず前進代入で ξ を計算したのちに後退代入で $\mathbf{x}$ を求めれば良い.

(前進代入)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & & \\ & \alpha_2 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \alpha_{M-1} & 1 & 0 \\ 0 & & & & \alpha_M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{M-1} \\ \xi_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{M-1} \\ q_M \end{bmatrix} \quad (\text{F.8})$$

よりベクトル ξ の各成分は

$$\begin{cases} \xi_0 = q_0 \end{cases} \quad (\text{F.9})$$

$$\begin{cases} \xi_m = q_m - \alpha_m \xi_{m-1} \\ (m = 1, 2, \dots, M) \end{cases} \quad (\text{F.10})$$

に従い, $m = 0$ から $m = M$ へと前進的に代入を繰り返して求められる.

(後退代入)

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & \gamma_0 & & & 0 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 & & \\ & 0 & \beta_2 & \gamma_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & \beta_{M-1} & \gamma_{M-1} \\ 0 & & & & 0 & \beta_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{M-1} \\ x_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{M-1} \\ y_M \end{bmatrix} \quad (\text{F.11})$$

より, ベクトル x の各成分は

$$\left\{ \begin{array}{l} x_M = \frac{\xi_M}{\beta_M} \end{array} \right. \quad (\text{F.12})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_m = \frac{1}{\beta_m}(\xi_m - \gamma_m x_{m+1}) \\ (m = M-1, M-2, \dots, 0) \end{array} \right. \quad (\text{F.13})$$

のように $m = M$ から $m = 0$ へ向かって, いわば後退的に代入を繰り返すことで求めることが出来る. 以上のような計算行程により, 3重対角行列の反転を行うことができる. 具体的にこの作業が必要となるのは式 (5.60), (5.67), (5.72), (5.75) に関してである.

謝辞

大学院修士課程における研究活動および本論文の執筆にあたり、お世話になった皆様に感謝を申し上げます。特に阪上雅昭 教授には、毎週のゼミから日々の生活に至るまで丁寧かつ熱心なご指導を頂きました。2年間本当にありがとうございました。また、本研究テーマの提案ならびに有意義な助言を賜りました東京工業大学大学院 理工学研究科の奥住聡 助教に深く感謝いたします。数値計算に用いた C++言語に関してはゼミを通して森成隆夫 准教授にご指導頂きました。この場を借りて謝意を申し上げます。

最後になりますが、研究室のメンバーとして一緒に頑張ってきた 佐々木和子さん、炭谷竜大くん、ならびに小西英史さん、田所 大輔さんには大学院生活やゼミを通じてさまざまな場面でお世話になりました。彼らによる多大な協力と精神的な支えがなければ本論文を完成させることはできなかったでしょう。ここに心から感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] V. Safronov, *Evolution of the protoplanetary cloud and formation of the earth and planets*, Nauka Press, 1969.
- [2] C. Hayashi, K. Nakazawa, and Y. Nakagawa, *In Protostars and Planets II*, Univ. of Arizona Press, 1985.
- [3] C. Hayashi, *Progress of Theoretical Physics Supplement* **70**, 35 (1981).
- [4] N. I. Shakura and R. A. Sunyaev, *Apj* **24**, 337 (1973).
- [5] S. A. Balbus and J. F. Hawley, *Apj* **376**, 214 (1991).
- [6] T. Sano, S. M. Miyama, T. Umebayashi, and T. Nakano, *Apj* **543**, 486 (2000).
- [7] F. L. Whipple, page 211 (1972).
- [8] S. J. Weidenschilling, *Icarus* **44**, 172 (1980).
- [9] K. Ros and A. Johansen, *A&A* **552**, A137 (2013).
- [10] A. N. Youdin and Y. Lithwick, *Icarus* **192**, 588 (2007).
- [11] D. Lynden-Bell and J. E. Pringle, *MNRAS* **168**, 603 (1974).
- [12] Y. Lithwick and E. Chiang, *Apj* **656**, 524 (2007).
- [13] S. Fromang and J. Papaloizou, *A&A* **452**, 751 (2006).
- [14] S. Okuzumi and S. Hirose, *Apj* **742**, 65 (2011).

- [15] K. Ros, Ice condensation as a planet formation mechanism, Master's thesis, Lund University, 2012.
- [16] 国立天文台 編, 理科年表, 物理/化学部 気体の粘度, 丸善, 2014.
- [17] D. R. Haynes, N. J. Tro, and S. M. George, *Journal of Physical Chemistry* **96**, 8502 (1992).
- [18] K. D. Supulver and D. Lin, *Icarus* **146**, 525 (2000).
- [19] S. S. Davis, *Apj* **660**, 1580 (2007).
- [20] K. Lodders, *Apj* **591**, 1220 (2003).
- [21] G. E. Morfill, *Birth and infancy of stars, Les Houches Summer School*, course 15. Physics and chemistry in the primitive solar nebula, pages 693–792, Amsterdam, North-Holland, 862 p., 1985.
- [22] 佐藤文隆, 光と風景の物理, 岩波講座物理の世界 / 地球と宇宙の物理, 岩波書店, 2002.
- [23] F. Windmark et al., *A&A* **540**, A73 (2012).
- [24] S. Okuzumi, H. Tanaka, H. Kobayashi, and K. Wada, *Apj* **752**, 106 (2012).
- [25] Kataoka, A., Tanaka, H., Okuzumi, S., and Wada, K., *A&A* **554**, A4 (2013).
- [26] Kataoka, Akimasa, Tanaka, Hidekazu, Okuzumi, Satoshi, and Wada, Koji, *A&A* **557**, L4 (2013).
- [27] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C* [日本語版], 技術評論社, 1993 年.
- [28] 藤井孝蔵, 流体力学の数値計算法, 東京大学出版会, 1994 年.
- [29] A. N. Youdin and J. Goodman, *Apj* **620**, 459 (2005).
- [30] A. Johansen, A. Youdin, and M.-M. Mac Low, *Apj* **704**, L75 (2009).
- [31] C. Qi et al., *Science* **341**, 630 (2013).
- [32] A. Johansen et al., *Nature* **448**, 1022 (2007).
- [33] C. F. Gammie, *Apj* **553**, 174 (2001).
- [34] 井田茂, 系外惑星, 東京大学出版会, 2007 年.
- [35] D. Heggie and H. Piet, *The Gravitational Million-Body Problem*, Cambridge Univ Press, 2003.

- [36] 渡邊誠一郎・井田茂 ほか, 比較惑星学, 第 3 章 比較惑星系形成論, page 131, 岩波書店, 1997 年.
- [37] 藤坂博一, 非平衡系の統計力学, 産業図書, 1998 年.
- [38] 今村勤, 物理とフーリエ変換, 岩波書店, 1976 年.
- [39] 坂下志郎・池内了, 宇宙流体力学, 培風館, 1996 年.
- [40] 今井功, 流体力学, 岩波書店, 1970 年.
- [41] T. Kuroiwa and S. Sirono, *Apj* **739**, 18 (2011).
- [42] 阿部龍蔵, 統計力学, 東京大学出版会, 1966 年.
- [43] E. Chiang and A. N. Youdin, *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* **38**, 493 (2010).
- [44] J. N. Cuzzi, A. R. Dobrovolskis, and J. Champney, *Icarus* **106**, 102 (1993).
- [45] P. S. Epstein, *Phys. Rev.* **23**, 710 (1924).
- [46] 九州大学大学院総合理工学府 大気海洋環境システム学専攻 編, 地球環境を学ぶための流体力学, 成山堂書店, 2001 年.
- [47] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton Univ Press, 1987.
- [48] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics: Course of Theoretical Physics*, Pergamon Press, 1959.
- [49] 北原和夫, 非平衡系の統計力学, 岩波書店, 1997 年.