

乱流中での音波生成のモデリング

東大生研 吉澤 徹 (Akira Yoshizawa)

NASA/Lewis Meng-Sing Liou

1. はじめに

乱流（高レイノルズ数流れ）における音波生成は、騒音等と関連して興味ある現象である。この問題に関しては、Lighthill^[1]のよく知られた研究があるが、その後大きな進展があったとは言い難い状況にある。その原因の一に、いわゆる Lighthill 方程式があまりに包括的であるため、乱れによる真の「音波生成機構」という視点が雲らされていることことがある。

本研究においては、まず Lighthill 方程式を乱流に対して適用する際、留意すべき点に言及する。次に、乱流場が統計的に記述されているとき、音圧強度を求めるための 2 方程式型音波生成モデルを構成する。

2. 基礎方程式

圧縮性粘性流体の方程式は質量、運動量、エネルギーの保存則によって与えられる。最初の 2 法則は、

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$(\partial / \partial t) \rho u_i + (\partial / \partial x_j) (\rho u_j u_i) = - \partial p / \partial x_i + (\partial / \partial x_j) \mu S_{ij} \quad (2)$$

となる。ここで、 ρ は流体密度、 $\mathbf{u}$ は速度、 p は内部エネルギー、 μ は粘性率

であり、また

$$S_{ij} = \partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j - (2/3) \nabla \cdot u \delta_{ij} \quad (3)$$

(繰り返し添字については和をとる)。

音波が主要研究対象となる低マッハ数の乱流では、熱生成に関連したエネルギー保存則は必要とせず、音圧部分に対して断熱近似がしばしば採用される：

$$p = p(\rho). \quad (4)$$

3. Lighthill 方程式

(1)、(2)、(4)を用いると、

$$\partial^2 \rho / \partial t^2 - a_0^2 \Delta \rho = (\partial^2 / \partial x_i \partial x_j) \rho u_i u_j \quad (5)$$

を得る。ここで、 $a_0^2 = (\partial p / \partial \rho) [\rho = \rho_0 \text{ (一定)}]$ であり、議論を簡単にするために粘性項は省略した。 ρ 、 u を

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad u = U + u', \quad U = \langle u \rangle \quad (6)$$

と書く ($\langle \cdot \rangle$ はアンサンブル平均とする)。(5)と(6)より、

$$\begin{aligned} \partial^2 \rho' / \partial t^2 - a_0^2 \Delta \rho' &= 2\rho_0 (\partial^2 / \partial x_i \partial x_j) U_i u_j' \\ &+ \rho_0 (\partial^2 / \partial x_i \partial x_j) (u_i' u_j' - \langle u_i' u_j' \rangle) \end{aligned} \quad (7)$$

となる。ただし、右辺で ρ' の効果は無視した。

(8) の右辺で平均流 U を無視すると、いわゆる Lighthill 方程式を得る。(1)、(2) と (7) は本質的に同値であり、(7) のみを見るかぎり右辺の u' として非圧縮場、圧縮場を問わず何を採用してもよさそうに思われる。この点が1節で述べた Lighthill 方程式の見掛け上の一般性である。

この点を明確に見るために、 u' として非圧縮場を採用してみよう。低マッハ数乱流では平均流 U もも非圧縮であるため、本来の質量保存則 (1) は音波近似の枠内で、

$$D\rho'/Dt \equiv (\partial/\partial t + U \cdot \nabla)\rho' = 0 \quad (8)$$

となる。すなわち、 u' として非圧縮場を採用すると、本来なら (8) に入り、 $\partial\rho'/\partial t$ と共に ρ' が音波として伝播する機構を与える項 $\nabla \cdot (\rho_0 u')$ が消えてしまうのである。その結果、(8) は単に上流で何らかの原因で生じた密度変動が平均流に乗って下流に流されることを表現するに過ぎない（例えば、密度成層中の密度変動の伝播）。

Lighthill による音圧の議論においては、平均流 $U = 0$ の下で適当な u' の存在が仮定されている。しかし、非圧縮性乱流においては平均速度勾配無しでは乱れを定常的に維持できないことはよく知られている。それ故に、(7) の右辺を音源と見なすときは、乱れの維持機構も同時に説明する必要がある。

3. 音波の抽出

前節の議論より、乱流中の音波を考察するときは少なくとも「音源となる乱れがいかにか維持されているか」を同時に考えなければならない。このことは音源として採用できる u' にかかなりの制限を課することになる。また、われわれが

「音波」を研究対象とするとき、音波がその中を伝播して行く媒質（流体）の運動速度は静止していると見なせるか、あるいは音速よりもずっと遅いことを前提としている。実際、流速が音速に近かったり、これを越えるときは音波より衝撃波の概念が適切となる。

以上のことから、われわれは次の2項を考察の出発点とする：

- (前提 A) 平均（特に、アンサンブル平均）流速 U のマッハ数は1よりずっと小さい。
- (前提 B) 流速の変動部分 u' の圧縮部分は非圧縮部分よりずっと小さい。

上述の前提を数学的に表現するために、

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad u = U + u', \quad u' = u_s' + u_c', \quad U = \langle u \rangle \quad (9)$$

と書く（ S 、 C は非圧縮、圧縮成分を意味する）。前提Aより ρ_0 は一定であり、前提Bより $|u_s'| \gg |u_c'|$ を得る。これらのことから、 (U, u_s') は通常为非圧縮性流体の方程式によって記述される：

$$DU_i/Dt = - (1/\rho_0) \partial P / \partial x_i + (\partial / \partial x_j)(R_{ij} + \nu \partial U_j / \partial x_i), \quad (10a)$$

$$\nabla \cdot U = 0, \quad (10b)$$

$$\begin{aligned} Du_i'/Dt + (u_s' \cdot \nabla) U_i + (\partial/\partial x_j)(u_{sj}' u_{sj}' + R_{ij}) \\ = - (1/\rho_0) \partial p'/\partial x_i + \nu \Delta u_{si}', \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\nabla \cdot u' = 0. \quad (11b)$$

ここで、 $p (= P + p')$ は圧力、 $\nu (= \mu/\rho_0)$ は動粘性率、 $R_{ij} (= - \langle u_{si}' u_{sj}' \rangle)$ はレイノルズ応力である。 u_s' が平均速度勾配によつていかに維持されているかを示すために、乱流エネルギー $K (= \langle u_s'^2 \rangle/2)$ に対する方程式を与えておく：

$$DK/Dt = P_K - \varepsilon + \nabla \cdot T_K, \quad (12a)$$

$$P_K = R_{ij} \partial U_j / \partial x_i, \quad \varepsilon = \nu \langle (\partial u_{sj}' / \partial x_i)^2 \rangle \quad (12b)$$

(T_K の詳細は省略した)。ここで、 P_K 中の平均速度勾配の役割に注意されたい。

揺らぎの圧縮成分は、 $j' = \rho_0 u_c'$ とおくと、

$$D\rho'/Dt + \nabla \cdot j' = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} Dj_i'/Dt + (j' \cdot \nabla) U_i + (u_s' \cdot \nabla) j_i' + (j' \cdot \nabla) u_{si}' - \langle (u_s' \cdot \nabla) j_i' \\ + (j' \cdot \nabla) u_{si}' \rangle = - a_0^2 \partial \rho' / \partial x_i + \mu (\partial / \partial x_j) S_{cij}', \end{aligned} \quad (14)$$

を得る [S_c は (3) の u を u_c' で置き換えたものである]。

4. 音波生成モデル

本研究においては、(13)、(14)より乱流中の音波生成モデルを構成する。 U 、 u' で記述される乱流場は統計的に与えられるものとするが、それらの情報をどの程度詳細に与えるかが問題となる。現在、理工学上重要な現象においては実験的方法を除くと、乱流場のスペクトル分布まで正確に予測することはできない。その結果、そのような乱流中で生成され、伝播する音波に関してもスペクトル分布まで理論的に求めることはできないことになる。

上述の事情を踏まえて、本研究においては乱流場を $K-\epsilon$ 型の2方程式モデルで記述するものとし（応力モデル等への拡張も可能）、その中で生成・伝播する音波の強度（振幅）の統計的性質を追跡するものとする。乱流場の統計的諸量との整合性を考えて、音波あるいは圧縮成分に対して

$$\phi = \langle \rho'^2 \rangle, K_j = \langle j'^2 \rangle = 2\rho_0^2 K_c^2 \quad (15)$$

を導入する。音圧強度は ϕ の空間分布から、

$$\langle p'^2 \rangle = a_0^4 \phi \quad (16)$$

と求められる。(13)、(14)より

$$D\phi/Dt = -2\langle (j' \cdot \nabla) \rho' \rangle - 2\nabla \cdot \langle \rho' j' \rangle, \quad (17)$$

$$(D/Dt)(K_j + a_0^2 \phi) = P_j - \epsilon_j + \nabla \cdot T_j. \quad (18)$$

ここで、 K_j の生成率 P_j 、散逸率 ϵ_j 、輸送率 T_j は

$$P_j = -2 \langle j'_i j'_j \rangle \partial U_j / \partial x_i - 2 \langle j'_i j'_j \partial u_{sj}' / \partial x_i \rangle, \quad (19)$$

$$\epsilon_j = 2\mu \langle (\partial j'_j / \partial x_i)^2 + (2/3)(\nabla \cdot j')^2 \rangle, \quad (20)$$

$$T_j = -2a_0^2 \langle \rho' j' \rangle - \langle u_{sj}' j'^2 \rangle + \mu [\nabla K_j + 2 \langle (j' \cdot \nabla) j' \rangle - (4/3) \langle (j' \cdot \nabla) \cdot j' \rangle] \quad (21)$$

で定義される。

乱流中の音波生成モデルでは、(17)、(18)中の $\langle (j' \cdot \nabla) \rho' \rangle$ 等を ϕ 、 K_j および乱流場の統計量で表現する必要がある。これらを通常の乱流モデリングの様に次元解析、テンソル解析のみで行うことには限界があり、ここでは2スケール DIA^[2,3] に基づき解析を行う(詳細は省略する)。

(15)において、 K_c は K に対応する単位質量当たりの圧縮性成分のエネルギーであるため、 ϕ と共にこれを採用する。最終的結果であるモデル方程式系は、

$$D\phi/Dt = C_1 \rho_0^2 (\epsilon/K^2) K_c - C_2 a_0^2 (\epsilon/K^2) \phi + \nabla \cdot T\rho, \quad (22)$$

$$(D/Dt)[\phi + (a_0^2/\rho_0^2)\phi] = C_{c1}(KK_c/\epsilon)(\partial U_j/\partial x_i + \partial U_i/\partial x_j)$$

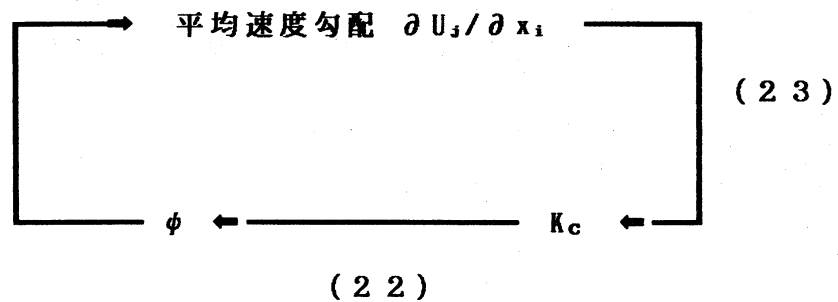
$$\times \partial U_j/\partial x_i - C_{c2}(\epsilon/K)K_c + \nabla \cdot [(1/2)(a_0^2/\rho_0^2)T\rho$$

$$+ C_{c3}(K^2/\epsilon)\nabla K_c]. \quad (23)$$

ここで、 $T\rho = C_{c3}(\rho_0^2 K/\varepsilon)\nabla K_c + C_{c4}(a_0^2 K/\varepsilon)\nabla\phi$ (C_1 等は正のモデル定数である)。

5. 議論

本モデルは (22)、(23) に見るように、次のような構造を持っている：



この構造は、ジェット騒音において音がジェットの平均速度勾配零の中心領域からではなく、平均速度勾配を持つ外縁部から出てくるという経験則と一致している。また、乱れの一般的傾向として生成、散逸が近似的に釣り合いにあるとすると、(16)、(22) より

$$\langle p_c'^2 \rangle = (C_1/C_2) a_0^2 \rho_0^2 K_c \quad (24)$$

となる。(24) 音圧強度が K_c に比例していることを示しているが、 K_c も K と同様に平均速度勾配によって生成されることから、非圧縮場の乱れの強い場所では音も強いと言える。

最後に、本モデルは通常の乱流モデルの高レイノルズ数版であるので、固体壁近くでは粘性効果の補正が必要となることを注意しておく。

謝 辞

本研究を行うに際し、1990年6月10日カルガリー市（カナダ）において輪禍に遭われ、夫人さゆりさんと共に逝去されました竹光信正博士（当時富山県立大学助教授）から多大の示唆を受けましたことを記すと共に、長年の友情に心から感謝し、ご冥福をお祈りします（吉澤徹記）。

参考文献

- [1] M.J. Lighthill, Proc. Roy. Soc. London A211, 564-587 (1952).
- [2] A. Yoshizawa, J. Fluid Mech. 195, 541-555 (1988).
- [3] A. Yoshizawa, Phys. Fluids A2, 838-850 (1990).