

Brauer 群 A_{II}

—— Witt 群と Brauer Wall 群

阪大 理

渡辺 豊

体の上の多元環の理論を可換環上のそれに移し、その中で独自の新しい理論を展開させようという気運のさ中で当然のことであろうが、体係数の二次型式の理論を可換環上の projective modules の上で定義された二次型式とそれに附随した(環上の) Clifford algebra の理論に拡張しようという動きが, Flamant ([3], [4]), Micali, Villamayor ([5]), Bass ([2]) 等によって各々異った角度から独立に起りつつある。またそれらは満足すべき所に到達しているとは云い難いが、整係数の二次型式が今までのところそれ自身の Clifford algebra を持たず、従って直接には代数的(狭い意味での)に処理されていなかったことを思えば、最近の多元環論にうまく乗ったこれらの方法が整係数——もと一般に可換環係数——の二次型式について一つの新しい見方を提起していることは確かである。可換環係数の二次型式

について、しかし乍ら、こういった方法がどれだけの効果を挙げ得るのかは、これからの発展に待たねばならない。そういうわけで、ここに紹介するのはこの問題提起者達の、そのつかみ手、を紹介するにとどまることをあらかじめしておかなければならない。中び、H. Bass のは代数的 K -理論と二次形式の理論の中に持ち込んで彼らしくスケールを大きくしているが、それが(それだけで充分興味あることであろうが)唯それだけにとどまるものなのか、何らかの具体的な問題を定式化する等の準備なのか、筆者のよく分るところではない、がともかく彼の方法の示唆するところは魅力に富み、こゝでもそれを中心として紹介することにしよう。

R を可換環、 P を *limitely generated* (以下 *f.g.* と略記) *projective R -module* とする。map $q: P \rightarrow R$ が *quadratic form defined on P* とは

$$1) \quad q(ax) = a^2 q(x) \text{ for } \forall a \in R, \forall x \in P,$$

2) $Q(x, y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$ が *bilinear form* である,

こととする。pair (P, q) を *quadratic module over R* と呼ぶ。2) の Q が引き起す自然な R -準同型 $P \rightarrow P^* = \text{Hom}_R(P, R)$ が同型なるとき (P, q)

が non-singular であること。また、

R 上の non-singular な quadratic module (P, q) の作る category を $\underline{Q} = \underline{Q}(R)$ とかくことにし、 $\underline{Q}$ での morphism は quadratic form を保つもの、即ち $f: (P, q) \rightarrow (P', q')$ は $q(x) = q'(f(x))$ を満たす R -homo $f: P \rightarrow P'$ のこととする。特に $f: P \rightarrow P'$ が R -iso かつ isometry である。

P は f.g. projective R -module とする。この時、 $\mathcal{H}(P) = (P \oplus P^*, h) : h(x, f) = f(x)$ は non-singular な quadratic module である。また $\mathcal{H}(P)$ は isometric な quadratic module である。また hyperbolic である。

二つの quadratic modules $(P, q), (P', q')$ について $(P, q) \perp (P', q') = (P \oplus P', q \perp q') : q \perp q'(x, x') = q(x) + q'(x')$ として orthogonal sum $\perp$ を定義する。

PROPOSITION 1 $\mathcal{H}(P \oplus P') \cong \mathcal{H}(P) \perp \mathcal{H}(P')$

PROPOSITION 2 $(P, q) \in \underline{Q}$ に対して $(P, q) \perp (P, -q) \cong \mathcal{H}(P)$

今 $\underline{Q}$ の objects 全体に同値関係 “ $(P, q) \sim (P', q') \iff$ f.g. projective R -module P'' が存在して $(P, q) \perp (P', -q') \cong \mathcal{H}(P'')$ ” を入れる。この同値

類全体は $\perp$ から $\perp$ に induce された演算で A は $\mathbb{Z}/2$ 階層構造を持つ。この演算を $W(R)$ と呼んで可換環 R の Witt 群と呼ぶ。

$(P, q) \in \underline{Q}(A)$ とする。 P の tensor algebra を $T(P) = \sum_{i \geq 0} T^i(P)$ とする。 $T_0(P) = \sum_{i \text{ even}} T^i(P)$, $T_1(P) = \sum_{i \text{ odd}} T^i(P)$ とおけば $T(P) = T_0(P) \oplus T_1(P)$ は $\mathbb{Z}/2$ 階層構造の λ -graded algebra と考えられる。このとき $\{x \otimes x - q(x)\}_{x \in P}$ で生成された $T(P)$ の両側 ideal は homogeneous ideal $I(P, q)$ を成し, $Cl(P, q) = T(P)/I(P, q)$ はやはり $\mathbb{Z}/2$ 階層構造の λ -graded algebra である; $Cl(P, q) = Cl_0(P, q) \oplus Cl_1(P, q)$. $Cl(P, q)$ を (P, q) の Clifford algebra と呼ぶ。 $q = 0$ のとき (このときは $\in \underline{Q}$ ではないが, 同様に construct したとき) $Cl(P, q)$ は P の exterior algebra $\wedge P$ と同型である。

PROPOSITION 3 $(P, q) \in \underline{Q}$ に対し $Cl(P, q)$ は R -separable algebra である。

PROPOSITION 4 更に $\text{rank } P = \text{even}$ ならば $Cl(P, q)$ は Azumaya R -algebra であり, $\text{rank } P = \text{odd}$ ならば $Cl_0(P, q)$ は Azumaya R -algebra である。 ([2], [4], [5], [6])

従って, 例えば R は normal Noetherian domain, K はその商体とし, (V, q) は K 上の non-singular quadratic

space とした時, $(P, q|P) \in \underline{Q}$ であるような f.g. proj. R -lattice P について $cl(P, q|P)$ は $cl(V, q)$ の中の哪一种不分岐な maximal order である.

$cl(P, q)$ その自体は必ずしも Azumaya algebra にはならないので取り極いに多少不便である. そこで Wall [6] Bass [2] による "graded Azumaya algebra" なる概念を持ち込む.

R を可換環, A を R -algebra とし, A には $\mathbb{Z}/2$ の grading が入っているとする^(*) (即ち $A = A_0 \oplus A_1$ (as additive groups), $A_i A_j \subset A_{i+j}$ ($i, j \in \mathbb{Z}/2$)). $M = M_0 \oplus M_1$ を R -module とすれば $\text{Hom}_R(M, M)$ の元 f は $f = f_0 + f_1$, $f_i(M_j) \subset M_{i+j}$ と分解出来るから, この見做し方で graded algebra の構造が入る.

A に新しい乗法; a, b を homogeneous elements of degree $2a, 2b$ とする時 $a \cdot b = (-1)^{2a2b} ab$: ± 1 だけ graded algebra を A' で表し, A' の opposite algebra を A^* で表す.

A, B を graded R -algebra とする. R -module $A \otimes_R B$

(*) 以下 grading は必ず $\mathbb{Z}/2$ によるものとする.

に乘法 $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{\deg a \deg b'} (aa' \otimes bb')$: 且し a, a', b, b' は A, B の homogeneous element τ には τ の degree : $\tau \lambda$ となる。 $A \otimes_R B$ は R graded R -algebra となるが、これは $A \hat{\otimes}_R B$ で表わすことにする。 A, B の ordinal なる R -algebras $\mathbb{P}$ の degree 0 なる graded algebras τ には $A \hat{\otimes} B = A \otimes B$ である。

$A^e = A \hat{\otimes} A^*$ は A の enveloping algebra と呼ぶ。

として例を挙げてみる。 $R = k$ は $ch \neq 2$ なる体、 $a \in k$ は non-zero element とする時 $x^2 = a$ なる x は k 上に存在しない。 k -algebra (k は $k\langle a \rangle$ とおく) は graded k -algebra である; $k\langle a \rangle_0 = k$, $k\langle a \rangle_1 = kx$. $(a, b)_k$ は generalized quaternion algebra, $k \oplus ki \oplus kj \oplus kij$, $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = -ji$ と表せば $k\langle a \rangle \hat{\otimes} k\langle b \rangle \cong (a, b)_k$ である。 $k\langle a \rangle^* \cong k\langle -a \rangle$ であり、従って $k\langle a \rangle$ の enveloping algebra は $k\langle a \rangle \hat{\otimes} k\langle -a \rangle \cong (a, -a)_k \cong M_2(k) \cong \text{End}_k(k\langle a \rangle)$ である。この isomorphism の $\cong$ は canonical な homothety で得られる。

$P = P_0 \oplus P_1$ は可換環 R 上の f.g. faithful projective module とすると $\text{End}_R(P)$ は前述の如く、graded R -algebra であるが、かかる algebra は同型な algebra を split type の R -algebra と云う。こゝでは、あくまでも

この grading をも含めての $\overline{A}$ であって, 例えは $A = M_2(R)$, $A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right\}$, $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} \right\}$ とするとき $A = A_0 \oplus A_1$ は graded algebra であり. A の $\overline{A}$ は split type であるが graded algebra $\overline{A}$ は split type とは云わない.

上に挙げた例の如く $\overline{A}$ の envelope A^e の homothety により, canonical に $\text{End}_R(A)$ に graded algebra として同型である $\downarrow$ な fig. faithful projective ∇ graded R -algebra ∇ graded Azumaya algebra とおき.

PROPOSITION 5 A が graded Azumaya R -algebra である等の必要十分条件はある graded R -algebra B が存在して $A \hat{\otimes} B$ が split type なることである. ([2])

$A, B \nabla$ graded Azumaya R -algebra とする. $A \hat{\otimes} B^*$ が split type の時, $A \nabla B$ は BW-同値であると言う.

graded Azumaya R -algebras の BW-同値類全体は $\hat{\otimes}$ より自然に induce された演算で Abel 群 ∇ なる. これを $BW(R)$ とおいて R の Brauer-Wall 群 と稱する.

この群を $R = k$ が $ch \neq 2$ なる体の時に少し調べてみよう (精しいことは [6] 参照).

k 上の graded Azumaya algebra については それ自身が (not graded) Azumaya k -alg になるが, 0-term A_0 が

そうであるか、あるいはないかで、両方の case は同時に起こり得ない。前者、即ち A 自身が Azumaya algebra の時 case (+) といい、後者を case (-) と稱する。各 case について graded Azumaya k -algebra の構造は —

Case (+) $0 \neq \mu^2 = a \in k$ なる $\mu \in A$ が存在して $A_0 = \{x \in A \mid x\mu = \mu x\}$, $A_1 = \{y \in A \mid y\mu = -\mu y\}$ である。逆に k -Azumaya algebra A と $\mu^2 = a \neq 0 \in k$ なる μ に對して上の方法で A_0, A_1 を定めれば $A = A_0 \oplus A_1$ は graded Azumaya algebra である。別の ν ($0 \neq \nu^2 = b \in k$) で同様に construct された graded Azumaya algebra B に対して $B \cong A$ as graded k -algebras なることは $B \cong a((k^*)^2)$ とは同値である。従って A の graded structure は $(+, a, D, n)$ によって定まる。こゝで、 a は modulo square での類であり、 D, n は $A = (D)_n$ なる central division algebra である。 $(+, a, D, n)$ は A の invariant と呼ぶ。

Case (-) degree 1 なる central homogeneous element μ で $0 \neq \mu^2 = a \in k$ なるものが存在して $A_1 = A_0 \mu$ である。上と同様の意味で A の graded structure は $(-, a, D, n)$ 値し、 $A_0 = (D)_n$ で定まり、 a は modulo square で unique である。 $(-, a, D, n)$

をやはり A の invariant と呼ぶ。

この graded k -Azumaya algebra の BW-同値である爲には この 各 k -invariants の 乗法-factor を 除き等しい ことが 必要十分である。従つて BW-classes の invariants は (ε, a, D) $\varepsilon = \pm 1$ $a \in k^\times$ 。各 invariants 間の 積は

$$(+, a, D) \cdot (+, a', D') = (+, aa', D \otimes D' \otimes (a, a')_k)$$

$$(+, a, D) \cdot (-, a', D') = (-, aa', D \otimes D' \otimes (a, -a')_k)$$

$$(-, a, D) \cdot (-, a', D') = (+, -aa', D \otimes D' \otimes (a, a')_k)$$

である。右辺の division algebra を表す部分は この 層する division algebra といふ 意味である。

容易に分る如くに $BW(k)$ の 単位元は $(+, 1, k)$ であり、 $(+, a, D)$ の 逆元は $(+, a, D^\circ \otimes (a, a)_k)$ 、 $(-, a, D)$ の 逆元は $(-, -a, D^\circ)$ である。

$k = \mathbb{R}$ (実数体) では $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^{*2} = \{1, -1\}$ であり、 $\mathbb{R}$ 上の central division algebra は $\mathbb{R}$ と $\mathbb{Q} = (-1, -1)_{\mathbb{R}}$ だけだから $BW(\mathbb{R})$ は order 8 の group である。実際 $BW(\mathbb{R})$ は $(-, 1, \mathbb{R})$ を 生成元とする cyclic group (of order 8) である。 k が separably closed のときは $BW(k) = \mathbb{Z}/2$ である。

話を一般の R に戻して、—— not graded な

Azumaya algebra は degree 0 と 3 graded Azumaya algebra と見做せるが,

PROPOSITION 6 その見做し方を引き起す homomorphism $B(R) \longrightarrow BW(R)$ は monomorphism である.

この cokernel は R の graded quadratic extensions の iso-types がある種の演算によつて作る group と同型である. ([2] 参照)

さて, Clifford algebra に関することは、まず

PROPOSITION 7 $Cl((P, q) \perp (P', q')) \cong Cl(P, q) \otimes Cl(P', q')$.

$P \in f.g. \text{ proj. } R\text{-module}$ とすれば ΛP は $f.g. \text{ proj.}$ 且、faithful な graded R -module ($\Lambda P = \text{even term} \oplus \text{odd term}$) であるが

PROPOSITION 8 $Cl(\mathcal{H}(P)) \cong \text{End}_R(\Lambda P)$

よつて PROP. 2, 5 より

PROPOSITION 9 $(P, q) \in \underline{Q}$ に対して $Cl(P, q)$ は graded Azumaya R -algebra である.

従つて non-singular quadratic module over R は $BW(R)$ の元と定めて、PROP. 7, 8 より 実は Witt 群, $W(R)$ からの homomorphism を定めることが出来る. これは Idasse invariant と呼ぶ.

又はこの *ldasse invariant* を Bass - 流の大小で、
ある種の *sequence* 間の写像に拡張することを試みよう。

$\mathcal{C}$ を category とする。二変数の covariant functor
 $\perp: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ が commutative 且、associative の時
 $\perp$ を category $\mathcal{C}$ の product と呼び、 $\perp$ による像 $\perp(A, B)$
を $A \perp B$ とかく。product $\perp$ を持つ category $\mathcal{C}$ の Grothendieck 群 $K^0(\mathcal{C})$ は写像 $(\cdot): \text{obj } \mathcal{C} \longrightarrow K^0(\mathcal{C})$ で

$$(A \perp B) = (A) + (B)$$

を満たすものの中で universal なものとして定義される。

注 1 $\mathcal{C}$ の morphism を isomorphism に限っても
 $K^0(\mathcal{C})$ や すぐあとで定義される $K^1(\mathcal{C})$ 等には何ら影響を及ぼさない、むしろ重要な functor を考えるに当り、そうではなればならぬ場合が起り得るので、以後 morphism は全て isomorphism であるとする。

注 2 exact sequence で定義された K^0 とは一致する時もある (例えば f.g. proj. modules の category で $\perp = \oplus$) が、むしろ exact sequence で処理出来ない場合をここでは包含したいので、整数表現等に使われる, Swan etc, etc. によるものとは多少違ったものかと思つて置かれない。

ΩC を C の automorphism 全体の作る category とする.

ΩC には canonical に product $\alpha \perp \beta$ を与えるが, $\alpha \rightarrow \beta$ domain $\in$ 其有してゐる時に限つて composition $\alpha \circ \beta$ が定義されてゐる. C の Whitehead group $K^1(C)$ とは map ()

$$\text{oly} \Omega C \longrightarrow K^1(C) \text{ である}$$

$$(\alpha \perp \beta) = (\alpha) + (\beta)$$

$$\alpha \circ \beta \text{ が定義されれば } (\alpha \circ \beta) = (\alpha) + (\beta)$$

に於いての universal problem の solution として定義される.

C, D を products を持つ categories とする. $F: C \rightarrow D$

$\in$ products を保つ functor とする. F は K -群の間の

homomorphism $K^i F: K^i(C) \rightarrow K^i(D) \quad i=0, 1$ を与える.

趣にす. functor F について $FA \xrightarrow{\alpha} FB$ なる関係にある

triple (A, α, B) 全体の作る category を ΦF とかく.

objects $(A, \alpha, B), (A', \alpha', B')$ 間の morphism は

$f: A \rightarrow A', g: B \rightarrow B'$ なる morphisms の pair (f, g)

である diagram

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{Ff} & FA' \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha' \\ FB & \xrightarrow{Fg} & FB' \end{array}$$

が可換になるものとする. ΦF には自然に product $\perp$

が定義され同時に $(B, \alpha, C) \circ (A, \beta, B) = (A, \alpha\beta, C)$ なる

composition を定義される. category ΦF から K^1 の場合と同様に construct された group $\in K^0 \Phi F$ とかく.

functor F が cofinal といふ任意の $D \in \text{obj } \mathcal{D}$ に対し $D' \in \text{obj } \mathcal{D}$, $C \in \text{obj } \mathcal{C}$ が存在して $D \perp D' \cong FC$ なることである. 又, subcategory が cofinal といふ inclusion functor が cofinal ことである.

PROPOSITION 10 $\mathcal{C}_0$ が $\mathcal{C}$ の cofinal subcategory ならば $K^1(\mathcal{C}_0) \in K^1(\mathcal{C})$ は inclusion functor によって起される homo に $\cong$ 同型である.

以下, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が cofinal とする.

$C \in \text{obj } \mathcal{C}$ として $\alpha \in FC$ の automorphism とする. $(\alpha) \mapsto (A, \alpha, A)$ は $K^1(F\mathcal{C}) \rightarrow K^0 \Phi F$ なる map を定めるが, Prop. 10 の同型を通して homo $K: K^1(\mathcal{D}) \rightarrow K^0 \Phi F$ を得る. 又, $(A, \alpha, B) \mapsto (A) - (B)$ は $\lambda: K^0 \Phi F \rightarrow K^0(\mathcal{C})$ なる homo を定める. 次の定理は基本的である.

PROPOSITION 11 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が cofinal ならば $K^1(\mathcal{C}) \rightarrow K^1(\mathcal{D}) \xrightarrow{\kappa} K^0 \Phi F \xrightarrow{\lambda} K^0(\mathcal{C}) \rightarrow K^0(\mathcal{D})$ は exact sequence である.

少し例を挙げておく. f.g. projective R -modules の category $\mathcal{P}$ ($\perp = \oplus$) の K -群については Bass [1] に

精しい. ここでは後に使う部分だけを述べておこう.

特に $K^i(\underline{P})$ のこと $K^i(R)$ とかく. $K^0(R)$ には $\otimes_R$ による
multiplicative structure を入りこれによって $K^0(R)$ は associative ring の構造をもつ. $\text{Spec}(R)$ から $\mathbb{Z}$ (discrete topology) への連続関数全体の作る ring を C とする.
 $\underline{P}$ a object P は $\text{Spec}(R) \ni \mathcal{P} \mapsto \text{rank}_{R_{\mathcal{P}}} P_{\mathcal{P}}$ によって
 C の元を定める. $\mathcal{P} \mapsto \text{rk } P$ は $K^0(R)$ から C への
ring homomorphism を induce する. 実はこれは
splitting $K^0(R) = \tilde{K}^0(R) \oplus C$ ($\tilde{K}^0(R) = \text{Ker}(\text{rk})$) を
与える. $\tilde{K}^0(R)$ は ring $K^0(R)$ の nil and Jacobson radical
である. R -free modules 全体は $\underline{P}$ の cofinal sub-
category をなすから free module の automorphism 即ち
 R 上の matrix 1: $\det$ の determinant を対応させることによ
って $K^1(R) \xrightarrow{\det} \mathcal{U}(R)$ (R -可逆元全体の作る乗法群)
なる map を得る. $SK^1(R) = \text{Ker}(\det)$ である. $\det$ は
splitting $K^1(R) = \mathcal{U}(R) \oplus SK^1(R)$ を与える.

次に $\underline{P}$ に対して重要な例を挙げる.

1) f.g. projective 且つ faithful な R -modules の
category $\underline{FP}(R)$ ($\perp = \otimes$) と K -群 $K(\underline{P})$ と $\underline{P}$ の K -群の間
には, $K^0 \underline{FP} \cong \mathcal{U}^+(\mathbb{Q} \otimes K^0 \underline{P}) = \mathcal{U}^+(\mathbb{Q} \otimes C) \oplus (\mathbb{Q} \otimes \tilde{K}^0 \underline{P})$
—— かつ $\mathbb{Q} \otimes \tilde{K}^0 \underline{P}$ (additive) $\cong 1 + \mathbb{Q} \otimes \tilde{K}_0 \underline{P}$ (multiplicative)

1) $\underline{A}_Z \hookrightarrow \underline{A}_Z$ — $\underline{A}_Z$ $K^1 \underline{FP} \cong \mathbb{Q} \otimes K^1 \underline{P} \cong (\mathbb{Q} \otimes U(R)) \oplus (\mathbb{Q} \otimes SK^1(R))$ への同型がある。ここで U^+ は ring $\mathbb{Q} \otimes K^1 \underline{P}$ の rank positive なる units の意味である。

2) $\underline{FP} = \underline{FP}(R)$ の R -Azumaya algebras の category $\underline{A}_Z$ ($\perp = \otimes$) への functor "End" (morphism は $\underline{A}_Z$ 上 iso !!) は cofinal functor である。このとき、 $K^0 \underline{FP} \rightarrow K^0 \underline{A}_Z$ の cokernel は R の Brauer 群 $B(R)$ である。

$\underline{Pic} = \underline{Pic}(R)$ は R 上の f.g. rank one projective modules の category ($\perp = \otimes_R$) を表す。 $K^0(\underline{Pic}) = \underline{Pic}(R)$ である。
 $X, \{R\}$ の $\underline{Pic}$ の cofinal subcategory であるから $K^1(\underline{Pic}) = U(R)$ である。今、Azumaya R -algebra A と ξ の automorphism α に対して、 $A_\alpha^A = \{x \in A \mid yx = x\alpha(y) \text{ for } \forall y \in A\}$ とおくと、これは $J: \Omega \underline{A}_Z \rightarrow \underline{Pic}$ なる functor を与える。
 $\underline{Pic}$ は $\underline{FP}$ の subcategory である。従って categories と functors の列 $\Omega \underline{Pic} \rightarrow \Omega \underline{FP} \rightarrow \Omega \underline{A}_Z \rightarrow \underline{Pic} \rightarrow \underline{FP} \rightarrow \underline{A}_Z$ が得られるが、これは 2 次の可換図形が得られる。

$$\begin{array}{ccccccccc} U(R) = K^1 \underline{Pic} & \rightarrow & K^1 \underline{FP} & \rightarrow & K^1 \underline{A}_Z & \rightarrow & K^0 \underline{Pic} & \rightarrow & K^0 \underline{FP} & \rightarrow & K^0 \underline{A}_Z \\ & & & & & & \parallel & & & & \\ & & & & & & \underline{Pic}(R) & & & & \\ & & & & & & \parallel & & & & \end{array}$$

$$K^1 \underline{FP} \rightarrow K^1 \underline{A}_Z \rightarrow K^0 \Phi \text{End} \rightarrow K^0 \underline{FP} \rightarrow K^0 \underline{A}_Z \rightarrow B(R) \rightarrow 0$$

下の列は Prop 11 に 対する exact sequence である.

$K'_A Z$ の 付近で short exact sequence に 分解 して 与えられ、
 $0 \rightarrow \text{Im}(K'EP \rightarrow K'_A Z) \rightarrow K'_A Z \rightarrow \text{Im}(K'_A Z \rightarrow K'^{\circ}Pic) \rightarrow 0$
 であるが 右項は torsion subgroup of $Pic(R)$ である. 左項
 については $\text{Im}(K'EP \rightarrow K'_A Z) \cong \text{Coker}(K'^{\circ}Pic \rightarrow K'EP)$
 $\cong \text{Coker}(\mathcal{U}(R) \rightarrow (\mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}(R)) \oplus (\mathbb{Q} \otimes SK'(R))) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes$
 $\mathcal{U}(R)) \oplus (\mathbb{Q} \otimes SK'(R))$ であるが これは divisible (従って injective) $(\mathbb{Z})$ -module である. 上の short exact sequence は
 split して $K'_A Z \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathcal{U}(R) \oplus \mathbb{Q} \otimes SK'(R)) \oplus (\text{torsion}$
 subgroup of $Pic(R))$ を得る.

3) graded case について $\mathcal{P} =$ f.g. projective $\mathcal{U}$, faithful
 の graded R -modules の category $\underline{EP}_2$ ($\perp = \otimes$) の
 graded Azumaya algebras の category $\underline{AZ}_2$ ($\perp =$
 $\hat{\otimes}$) への functor End は cofinal である. $K'^{\circ}\underline{EP}_2 \rightarrow K'^{\circ}\underline{AZ}_2$
 の cokernel は $BW(R)$ である.

4) $\underline{P} = \underline{P}(R)$ の non-singular quadratic modules
 の category $\underline{Q} = \underline{Q}(R)$ ($\perp = \perp$) への functor $\mathcal{H}$ は
 cofinal (Prop. 2) である. $K'^{\circ}\underline{P} \rightarrow K'^{\circ}\underline{Q}$ の cokernel は
 Witt 群 $W(R)$ である.

$\underline{Q}$ の object (P, q) は $\mathbb{Z}$ の Clifford algebra $Cl(P, q)$

を対応させることにより $\underline{Q}$ から $\underline{Az}_2$ の products を得る
(by PROP. 7) functor "cl" を得る. 又, f.g. proj module
 P に AP を対応させることにより $\underline{P} \rightarrow \underline{FP}_2$ なる product
preserving $\mathcal{F}$ functor λ が得られる.

PROP. 8 より

$$\begin{array}{ccc} \underline{P} & \xrightarrow{\mathcal{H}} & \underline{Q} \\ \downarrow \lambda & & \downarrow \text{cl} \\ \underline{FP}_2 & \xrightarrow{\text{End}} & \underline{Az}_2 \end{array}$$

は可換であるから exact sequence 間の写像

$$\begin{array}{ccccccccc} K^1 \underline{P} & \rightarrow & K^1 \underline{Q} & \rightarrow & K^0 \mathcal{H} & \rightarrow & K^0 \underline{P} & \rightarrow & K^0 \underline{Q} & \rightarrow & W(R) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ K^1 \underline{FP}_2 & \rightarrow & K^1 \underline{Az}_2 & \rightarrow & K^0 \text{End} & \rightarrow & K^0 \underline{FP}_2 & \rightarrow & K^0 \underline{Az}_2 & \rightarrow & BW(R) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

を得る. 最右端の縦の map が Hasse invariant であるから,
この sequence 間の写像を "一般化された
Hasse invariant" と呼んで差しつかえなからう. この
Hasse invariant の kernel をやはりある二つの cate-
gories とその間の cofinal functor で与えられた K -群の
exact sequence で記述出来れば面白い. これは今のと
ころ open だし, のみならず, 単に $W(R) \rightarrow BW(R)$ の
kernel すらも今では面白い. ([5] 参照).

参考文献.

- [1] H. Bass ; *K-theory and stable algebra*, I.H.E.S.,
no. 22 (1964)
- [2] H. Bass ; *Topics in algebraic K-theory*, Tata
(1967)
- [3] M. Flamant ; *Indice d'une forme quadratique
définie sur un module projectif* -----, C.R. 261 p.3515
(1965)
- [4] M. Flamant ; *L'algèbre de Clifford à une form
quadratique* ---- , C.R. 264 p.1037 (1967)
- [5] A. Micali , O.E. Villamayor ; *Sur les algèbres
de Clifford*, Sec. Math., Univ. Mt.pellier (1966-67)
- [6] C.T.C. Wall ; *Graded Brauer groups*, Crelle,
vol. 213 (1964)