

Norm of alias matrices for $(\ell+1)$ -factor interactions in balanced fractional 2^m factorial designs of resolution $2\ell+1$

神戸大 教育 白倉 暉弘

§ 1. 序

m 個の因子で各々 2 レベルで施される実験を考える。要因効果として、 θ_0 を一般平均、 θ_i を i 番目の因子の主効果、一般に $\theta_1, \dots, \theta_\ell$ を相当する因子間の ℓ 因子交互作用とする。 $1 \leq \ell < m/2$ を満たす整数 ℓ に対して、 $\underline{\theta}$ を ℓ 因子交互作用からなる $\nu \times 1$, $(\nu = \sum_{\beta=0}^{\ell} \binom{m}{\beta})$, $\underline{\theta}^*$ を $(\ell+1)$ 因子交互作用だけからなる $\binom{m}{\ell+1} \times 1$ ベクトルとする。 N 個の処理組合せからなる計画を T とし、それに関する観測値ベクトル $\underline{y}_T$ に対して次のモデルを考える。

$$E(\underline{y}_T) = E\underline{\theta} + E^*\underline{\theta}^* \quad (1)$$

ただし E, E^* はそれぞれ $\underline{\theta}, \underline{\theta}^*$ に対する $N \times \nu, N \times \binom{m}{\ell+1}$ 計画行列、 $\underline{y}_T$ の共分散行列は $\sigma^2 I$ である。 $\underline{\theta}^* = 0$ の下で $\underline{\theta}$ が推定可能となるとき、 T を分解能 $2\ell+1$ の 2^m -部実施要因計画 (2^m -FFD) と云う。 その時、 $\underline{\theta}$ の BLUE は $\hat{\underline{\theta}} = M^{-1}E'\underline{y}_T$ で与えられる ($M = E'E$)。 しかしモデル (1) の下では

$$E(\hat{\underline{\theta}}) = \underline{\theta} + A\underline{\theta}^* \quad (2)$$

ただし $A = M^{-1}E'E^*$ で別名行列と云われる。 (2) 式は $\underline{\theta}^*$ が

それ自身 θ に比べて無視出来るとしても, $A\theta^*$ は必ずしも無視出来ない可能性があることを意味する. ここで $A\theta^*$ の影響を出来るだけ小さくするために, ノルム $\|A\| = \{ \lambda(A'A) \}^{1/2}$ を考える ([1] 参照). 又, θ^* の中に真に無視出来ない要因効果が存在し (その数は小さくする), レカなどの効果がそれであるか未知である場合でも, $\|A\|$ を小さくする T を選ぶことは有効であろう. ここでは山本, 白倉, 桑田 [6, 7] によって与えられた *triangular type multidimensional partially balanced* (TM DPB) アソシエーションスキーム及びその代数に関する性質を用いて強さ $2t+1$ の均衡配列 T に対する $\|A\|$ の明確な表現を与える. さらに $(m=5, 16 \leq N \leq 32)$, $(m=6, 22 \leq N \leq 32)$, $(m=7, 29 \leq N \leq 50)$ を満たす各 N に対して $\|A\|$ を最小にする分解能 V ($q=2$) の 2^m -FFD を与える.

§2. TMDPB アソシエーションスキームと代数

$S_0 = \{\theta_p\}$, $S_1 = \{\theta_{t_1}\}$, 一般に $S_p = \{\theta_{t_1 \dots t_p}\}$ をそれぞれ一般平均, 主効果効, p 因子交互作用からなる集合とする. 各集合の元の数は $|S_0| = 1$, $|S_1| = m$, $|S_p| = \binom{m}{p}$ である. これらの集合の間で, TMDPB アソシエーションスキームにおけるアソシエーションの関係はつぎのように定義される:

$\theta_{t_1 \dots t_u} \in S_u$ と $\theta_{t_1 \dots t_v} \in S_v$ は α 種アソシエートである

$$\Leftrightarrow |\{t_1, \dots, t_u\} \cap \{t_1, \dots, t_v\}| = \min(u, v) - \alpha, \quad (3)$$

([6] 参照). この関係を行列表現すると

$$A^{(u,v)} = (a_{t_1 \dots t_u; \alpha}^{t_1' \dots t_v'}),$$

ただし

$$a_{t_1 \dots t_u; \alpha}^{t_1' \dots t_v'} = \begin{cases} 1, & t_1' \dots t_u' \text{ と } t_1 \dots t_v \text{ は } \alpha\text{-th ass.} \\ 0, & \text{その他,} \end{cases}$$

となる $\binom{m}{u} \times \binom{m}{v}$ 行列 $A^{(u,v)}$ が得られる. これらの行列から

$$\begin{aligned} A_{\alpha}^{(u,v)} &= \sum_{\beta=0}^u z_{\beta\alpha}^{(u,v)} A_{\beta}^{(u,v)\#}, \quad 0 \leq \alpha \leq u \leq v, \\ A_{\beta}^{(u,v)\#} &= \sum_{\alpha=0}^u z_{\alpha\beta}^{(u,v)} A_{\alpha}^{(u,v)}, \quad 0 \leq \beta \leq u \leq v, \\ A_{\beta}^{(u,v)\#} &= (A_{\beta}^{(v,u)\#})', \quad u > v \end{aligned} \quad (4)$$

によつて得られる $\binom{m}{u} \times \binom{m}{v}$ 行列 $A_{\beta}^{(u,v)\#}$, ($\beta = 0, 1, \dots, \min(u, v)$; $1 \leq u+v \leq m$), を考える. したがって

$$\begin{aligned} z_{\beta\alpha}^{(u,v)} &= \sum_{b=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha-b} \frac{\binom{u-\beta}{b} \binom{u-b}{u-\alpha} \binom{m-u-\beta+b}{b} \{ \binom{m-u-\beta}{v-u} \binom{v-\beta}{v-u} \}^{\frac{1}{2}}}{(v-u+b)}, \\ z_{\alpha\beta}^{(u,v)} &= \frac{\phi_{\beta} z_{\beta\alpha}^{(u,v)}}{\binom{m}{u} \binom{u}{\alpha} (v-u+\alpha)}, \\ \phi_{\beta} &= \binom{m}{\beta} - \binom{m}{\beta-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

さらに $u, v \leq l$ に対して, $A_{\beta}^{(u,v)\#}$ から以下によつて得られる $v \times v$ 行列 $D_{\beta}^{(u,v)\#}$ を考える: $D_{\beta}^{(u,v)\#}$ は $(l+1)^2$ 個の部分行列 $M^{(w,s)}$ をもつ, i.e., v 番目の行ブロックかつ s 番

目の列ブロックに $(\binom{m}{u}) \times (\binom{m}{v})$ 行列をもつ, として $M^{(u,v)} = A_\beta^{(u,v)\#}$,
 $M^{(s,r)} = 0, (s \neq u, r \neq v)$. 行列 $A_\beta^{(u,v)\#}, D_\beta^{(u,v)\#}$ は次の性質をもつ.

$$\begin{aligned} A_\alpha^{(u,w)\#} A_\beta^{(w,v)\#} &= \delta_{\alpha\beta} A_\beta^{(u,v)\#}, \quad 0 \leq u+w, w+v \leq m, \\ D_\alpha^{(u,w)\#} D_\beta^{(w,v)\#} &= \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma} D_\beta^{(u,v)\#}, \quad 0 \leq u, w, v \leq l, \\ \text{rank}(A_\beta^{(u,v)\#}) &= \text{rank}(D_\beta^{(u,v)\#}) = \phi_\beta, \end{aligned} \quad (6)$$

([7] 参照), ただし $\delta_{\alpha\beta} = 1 (\alpha = \beta), \delta_{\alpha\beta} = 0 (\alpha \neq \beta)$.

$(l+1)(l+2)(2l+3)/6$ 個の行列 $D_\beta^{(u,v)\#}$ で生成される多元環
 $\mathcal{A}$ は TMDPB アソシエーション代数と云われる. $\mathcal{A}$ に属
 する任意の行列 $B (= \sum_{\beta=0}^l \sum_{i=0}^{l-\beta} \sum_{j=0}^{l-\beta} \lambda_\beta^{(i,j)} D_\beta^{(\beta+i, \beta+j)\#})$ に対し
 て,

$$\alpha B \alpha = \text{diag}[A_0; \underbrace{A_1, \dots, A_1}_{\phi_1}; \dots; \underbrace{A_l, \dots, A_l}_{\phi_l}] \quad (7)$$

となる直交行列 α が存在することが知られている ([2, 7]).
 ただし A_β は (i,j) 要素に $\lambda_\beta^{(i,j)}$ を持つ $(l-\beta+1) \times (l-\beta+1)$ 行
 列である.

§3. $\|A\|$ の表現

$E(t_1 \dots t_u; t_1 \dots t_v), (0 \leq u \leq l, 0 \leq v \leq l+1)$, をモデル (1)
 において u 因子交互作用 $\theta_{t_1 \dots t_u}$ と v 因子交互作用 $\theta_{t_1 \dots t_v}$
 に相当する行列 $E = [E'E : E'E^*]$ の要素とする. ここで,
 T は強さ $2l+1$, 制約数 m , 指標 $\mu_i (i=0, \dots, 2l+1)$ の均斉配

列であるとする.

定理 1 ([6]). 行列 E は以下で与えられる高々 $2(\ell+1)$ 位の異なる要素 γ_i ($i=0, \dots, 2\ell+1$) をもつ:

$$\gamma_i = \varepsilon(t_1, \dots, t_u; t'_1, \dots, t'_v), \quad (8)$$

ただし $i = |\{t_1, \dots, t_u\} \ominus \{t'_1, \dots, t'_v\}|$. さらに γ_i は具体的に

$$\gamma_i = \sum_{j=0}^{2\ell+1} \sum_{g=0}^i (-1)^g \binom{i}{g} \binom{2\ell+1-i}{j-i+g} \mu_j \quad (9)$$

で与えられる.

(3), (8) より, $M = E'E$ の $\binom{m}{u} \times \binom{m}{v}$ 部分行列 $M^{(u,v)}$ は $\sum_{\alpha=0}^{\min(u,v)} \gamma_{\omega} A_{\alpha}^{(u,v)}$ (ただし $\omega = |v-u| + 2\alpha$) で与えられる.

(4), (5) から M はつぎのように与えられる

$$M = \sum_{\beta=0}^{\ell} \sum_{i=0}^{\ell-\beta} \sum_{j=0}^{\ell-\beta} x_{\beta}^{i,j} D_{\beta}^{(\beta+i, \beta+j)} \#, \quad (10)$$

ただし

$$x_{\beta}^{i,j} = x_{\beta}^{j,i} = \sum_{\alpha=0}^{\beta+i} \gamma_{j-i+2\alpha} z_{\beta\alpha}^{(\beta+i, \beta+j)}, \quad 0 \leq i \leq j \leq \ell-\beta. \quad (11)$$

$D_{\beta}^{*(u, \ell+1)} \#$ を $\nu \times \binom{m}{\ell+1}$ 行列で, その s 番目の行ブロックに $\binom{m}{s} \times \binom{m}{\ell+1}$ 部分行列 $M^{(s, \ell+1)}$, ($s=0, \dots, \ell$), に対して, $M^{(u, \ell+1)} = A_{\beta}^{(u, \ell+1)} \#, M^{(r, \ell+1)} = 0$, ($r \neq u$), とする. その時, 同様に

$$M^* = E'E^* = \sum_{\beta=0}^l \sum_{i=0}^{l-\beta} \eta_{\beta}^i D_{\beta}^{*(\beta+i, l+1)\#} \quad (12)$$

が得られる。ただし

$$\eta_{\beta}^i = \sum_{\alpha=0}^{\beta+i} \gamma_{\beta+1-\beta-i+2\alpha} z_{\beta\alpha}^{(\beta+i, l+1)}, \quad 0 \leq i \leq l-\beta. \quad (13)$$

(6) から次の補題が示される。

補題 2. $0 \leq \alpha \leq u, 0 \leq \beta \leq v, 0 \leq u, v \leq l$ に対して,

$$D_{\alpha}^{*(u, l+1)\#} (D_{\beta}^{*(v, l+1)\#})' = \delta_{\alpha\beta} D_{\beta}^{(u, v)\#}.$$

つぎに

$$K_{\beta} = \begin{bmatrix} \kappa_{\beta}^{0,0} & \kappa_{\beta}^{0,1} & \dots & \kappa_{\beta}^{0,l-\beta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \kappa_{\beta}^{l-\beta,0} & \kappa_{\beta}^{l-\beta,1} & \dots & \kappa_{\beta}^{l-\beta,l-\beta} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$K_{\beta}^* = \begin{bmatrix} \kappa_{\beta}^{*0,0} & \kappa_{\beta}^{*0,1} & \dots & \kappa_{\beta}^{*0,l-\beta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \kappa_{\beta}^{*l-\beta,0} & \kappa_{\beta}^{*l-\beta,1} & \dots & \kappa_{\beta}^{*l-\beta,l-\beta} \end{bmatrix},$$

とすると $(l-\beta+1) \times (l-\beta+1)$ 対称行列を考える。ただし $\kappa_{\beta}^{*i,j} = \eta_{\beta}^i \cdot \eta_{\beta}^j$ 。

定理 3. 強さ $2l+1$, 制約数 m , 指標 μ_i ($i=0, \dots, 2l+1$) の
均斉配列 T に対し,

$$\|A\|^2 = \sum_{\beta=0}^l \phi_{\beta} \operatorname{tr}(K_{\beta}^* K_{\beta}^{-2}). \quad (15)$$

証明. (10) より $M \in \mathcal{O}$. よって (7) より

$$M^{-1} = \sum_{\beta=0}^l \sum_{i=0}^{l-\beta} \sum_{j=0}^{l-\beta} \kappa_{i,j}^{\beta} D_{\beta}^{(\beta+i, \beta+j) \#}.$$

ただし $\kappa_{i,j}^{\beta}$ は K_{β}^{-1} の (i, j) 要素. 補題 2, (12) より

$$\begin{aligned} M^* M^{*'} &= \left(\sum_{\beta=0}^l \sum_{i=0}^{l-\beta} \gamma_{\beta}^i D_{\beta}^{*(\beta+i, l+1) \#} \right) \left(\sum_{\alpha=0}^l \sum_{j=0}^{l-\alpha} \gamma_{\alpha}^j D_{\alpha}^{*(\alpha+j, l+1) \#} \right)' \\ &= \sum_{\beta=0}^l \sum_{i=0}^{l-\beta} \sum_{j=0}^{l-\beta} \gamma_{\beta}^i \cdot \gamma_{\beta}^j D_{\beta}^{(\beta+i, \beta+j) \#} \\ &= \sum_{\beta=0}^l \sum_{i=0}^{l-\beta} \sum_{j=0}^{l-\beta} \kappa_{i,j}^{* \beta} D_{\beta}^{(\beta+i, \beta+j) \#}. \end{aligned}$$

よって $M^* M^{*'} \in \mathcal{O}$. $M^{-1} \in \mathcal{O}$ より $M^{-1} M^* M^{*'} M^{-1} \in \mathcal{O}$ を
得る. (7) より

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \operatorname{tr}(AA') = \operatorname{tr}(M^{-1} M^* M^{*'} M^{-1}) \\ &= \sum_{\beta=0}^l \phi_{\beta} \operatorname{tr}(K_{\beta}^{-1} K_{\beta}^* K_{\beta}^{-1}). \end{aligned}$$

よって (15) を得る.

定理3の均斉配列 Γ に対して, $\mu_0 = \mu_1 = \cdots = \mu_{2\ell+1} = \lambda$ ならば Γ を強さ $2\ell+1$, 制約数 m , 指標 λ の直交配列と云う.

系 4. 上記の直交配列に対して, $\|A\| = 0$.

証明. (9) より $\gamma_i = 0$ ($i=1, 2, \dots, 2\ell+1$). よ, 又 (12), (13) より $M^* = 0$, よ, 又 $\|A\| = 0$ が成り立つ.

$\|A\|$ の値を最小にする計画 Γ を最良別名計画と呼ぶ. 次節で強さ 5 ($\ell=2$) の均斉配列から得られる分解能 V の 2^m -FFD (特に 2^m -BFFD と云う) の中から最良別名計画を具体的に与える.

§ 4. 分解能 V の最良別名 2^m -BFFD

$\ell=2$ に対する $\|A\|$ をより具体的に与える. 強さ 5, 制約数 m , 指標 $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ の均斉配列に対して

$$\gamma_0 = N = \mu_0 + \mu_5 + 5(\mu_1 + \mu_4) + 10(\mu_2 + \mu_3),$$

$$\gamma_1 = -(\mu_0 - \mu_5) - 3(\mu_1 - \mu_4) - 2(\mu_2 - \mu_3),$$

$$\gamma_2 = \mu_0 + \mu_5 + \mu_1 + \mu_4 - 2(\mu_2 + \mu_3),$$

$$\gamma_3 = -(\mu_0 - \mu_5) + \mu_1 - \mu_4 + 2(\mu_2 - \mu_3),$$

$$\gamma_4 = \mu_0 + \mu_5 - 3(\mu_1 + \mu_4) + 2(\mu_2 + \mu_3),$$

$$\gamma_5 = -(\mu_0 - \mu_5) + 5(\mu_1 - \mu_4) - 10(\mu_2 - \mu_3).$$

(11), (13), (14), (15) より次の定理を得る.

定理 5. 上記均斉配列から得られる分解能 V の 2^m -BFFD に対して,

$$\|A\|^2 = t(k_0^* k_0^{-2}) + (m-1)t(k_1^* k_1^{-2}) + \frac{m(m-3)}{2} t(k_2^* k_2^{-2}).$$

ただし

$$\begin{aligned} k_0^{0,0} &= \gamma_0, & k_0^{0,1} &= k_0^{1,0} = \sqrt{m} \gamma_1, & k_0^{0,2} &= k_0^{2,0} = \sqrt{\binom{m}{2}} \gamma_2, \\ k_0^{1,1} &= \gamma_0 + (m-1)\gamma_2, & k_0^{1,2} &= k_0^{2,1} = \sqrt{\frac{m-1}{2}} \{2\gamma_1 + (m-2)\gamma_3\}, \\ k_0^{2,2} &= \gamma_0 + 2(m-1)\gamma_2 + \binom{m-2}{2} \gamma_4; \\ k_1^{0,0} &= \gamma_0 - \gamma_2, & k_1^{0,1} &= k_1^{1,0} = \sqrt{m-2} (\gamma_1 - \gamma_3), \\ k_1^{1,1} &= \gamma_0 + (m-4)\gamma_2 - (m-3)\gamma_4; \\ k_2^{0,0} &= \gamma_0 - 2\gamma_1 + \gamma_4 = 2^4(\mu_1 + \mu_3); \\ \gamma_0^0 &= \sqrt{\binom{m}{3}} \gamma_3, & \gamma_0^1 &= \sqrt{\binom{m-1}{2}/3} \{3\gamma_2 + (m-3)\gamma_4\}, \\ \gamma_0^2 &= \sqrt{\frac{m-2}{2}} \{3\gamma_1 + 3(m-3)\gamma_3 + \binom{m-3}{2} \gamma_5\}; \\ \gamma_1^0 &= \sqrt{\binom{m-2}{2}} (\gamma_2 - \gamma_4), & \gamma_1^1 &= \sqrt{\frac{m-2}{2}} \{2\gamma_1 + (m-6)\gamma_3 - (m-4)\gamma_5\}; \\ \gamma_2^0 &= \sqrt{m-4} (\gamma_1 - 2\gamma_3 + \gamma_5) = 2^4 \sqrt{m-4} (\mu_3 - \mu_2). \end{aligned}$$

表 I - III において, $(m=5, 16 \leq N \leq 32)$, $(m=6, 22 \leq N \leq 32)$, $(m=7, 29 \leq N \leq 50)$ を満たす各 N に対して最良別名 2^m -BFFD に相当する均斉配列の指標 $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$

の値が $\|A\|$, E_1 , E_2 , E_3 の値と共に与えられている。 E_1 , E_2 , E_3 は計画の効率で Srivastava & Ghosh [5] にて、下記のようになされている:

$$E_1 = 100 \times \frac{t_N(\text{opt})}{t_N(T)}, \quad E_2 = 100 \times \frac{D/N}{t_N(\text{opt})}, \quad E_3 = 100 \times \frac{D/N}{t_N(T)}.$$

ただし $t_N(\text{opt})$ はトレース基準に関して最適な 2^m -BFFD に対する tM^{-1} , $t_N(T)$ は最良別名計画 2^m -BFFD に対する tM^{-1} である。 E_1 はトレース基準に関して最適な計画に対する最良別名計画の効率, E_2 , E_3 はそれぞれ直交型計画 (2^m -OFFD) に対する最適な 2^m -BFFD, 最良別名 2^m -BFFD の効率である。

表 I

最良別名 2^5 -BFFD

N	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	$\ A\ $	E_1	E_2	E_3
16	1	0	1	0	1	0	3.1623	100.0	100.0	100.0
17	1	0	1	0	1	1	3.0619	100.0	97.2	97.2
18	1	0	1	0	1	2	3.0732	98.1	94.6	92.8
19	1	0	1	0	1	3	3.0873	97.5	90.6	88.4
20	0	1	1	0	1	0	2.5254	99.1	87.0	86.2
21	0	1	1	0	1	1	2.5337	97.3	90.3	87.9
22	1	0	1	1	0	1	1.3041	82.8	89.5	74.1
23	2	0	1	1	0	1	1.3915	83.6	87.2	72.9
24	3	0	1	1	0	1	1.4307	83.4	84.6	70.6
25	4	0	1	1	0	1	1.4524	83.2	81.9	68.1
26	5	0	1	1	0	1	1.4661	73.4	89.5	65.7
27	6	0	1	1	0	1	1.4755	70.3	90.3	63.4
28	7	0	1	1	0	1	1.4824	67.6	90.7	61.3
29	8	0	1	1	0	1	1.4877	66.6	89.0	59.2
30	0	1	1	1	1	0	0.6428	100.0	91.5	91.5
31	1	1	1	1	1	0	0.7906	100.0	97.2	97.2
32	1	1	1	1	1	1	0.0000	100.0	100.0	100.0

表 II

最良別名 2^6 -BFFD

N	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	$\ A\ $	E_1	E_2	E_3
22	1	1	1	0	1	1	5.1897	100.0	86.8	86.8
23	1	1	1	0	1	2	5.1211	98.7	85.1	84.0
24	1	1	1	0	1	3	5.1146	98.3	82.2	80.8
25	1	1	1	0	1	4	5.1171	97.8	79.6	77.8
26	1	1	1	0	1	5	5.1210	97.5	76.8	75.0
27	1	1	1	1	0	1	4.2111	100.0	83.5	83.5
28	1	1	1	1	0	2	4.2111	100.0	82.8	82.8
29	1	1	1	1	0	3	4.2111	99.7	81.0	80.7
30	1	1	1	1	0	4	4.2111	99.2	79.0	78.4
31	1	1	1	1	1	0	2.0976	100.0	93.8	93.8
32	1	1	1	1	1	1	0.0000	100.0	100.0	100.0

表 III

最良別名 2^7 -BFFD

N	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	$\ A\ $	E_1	E_2	E_3
29	2	2	1	0	1	2	8.1309	100.0	67.3	67.3
30	2	2	1	0	1	3	8.0143	98.1	66.8	65.5
31	2	2	1	0	1	4	7.9747	97.5	65.2	63.6
32	2	2	1	0	1	5	7.9569	97.3	63.4	61.7
33	2	2	1	0	1	6	7.9475	97.1	61.7	59.9
34	2	2	1	0	1	7	7.9419	97.0	60.0	58.2
35	2	2	1	0	1	8	7.9384	96.9	58.4	56.6
36	3	3	1	0	1	3	7.9037	89.4	61.5	55.0
37	3	3	1	0	1	4	7.8816	87.3	61.6	53.8
38	3	3	1	0	1	5	7.8743	86.6	60.6	52.5
39	2	2	1	0	1	7	7.8523	97.3	59.4	57.8
40	2	2	1	0	1	8	7.8340	97.3	58.1	56.5
41	2	2	1	0	1	9	7.8237	97.3	56.8	55.2
42	2	2	1	0	1	10	7.8175	97.3	55.5	54.0
43	2	2	1	1	2	1	2.5254	95.6	90.5	86.6
44	2	2	1	1	2	2	1.5548	98.0	90.8	89.0
45	3	2	1	1	2	2	1.6157	98.4	89.6	88.2
46	3	2	1	1	2	3	1.5730	98.7	88.2	87.0
47	4	2	1	1	2	3	1.6157	98.7	86.7	85.6
48	4	2	1	1	2	4	1.6470	98.8	85.2	84.2
49	5	2	1	1	2	4	1.6888	89.3	92.6	82.7
50	6	2	1	1	2	4	1.7262	85.3	95.1	81.1

注意. $(\ell+1)$ 因子交互作用以上のすべての要因効果に対する
 の別の別名行列 A のノルムに関して, 同様の議論が白倉
 [3, 4] によってなされている.

References

- [1] Hedayat, A., Raktue, B. L. and Federer, W. T. (1974). On a measure of aliasing due to fitting an incomplete model. *Ann. Statist.* 2, 650-660.
- [2] Shirakura, T. (1976). Balanced fractional 2^m factorial designs of even resolution obtained from balanced arrays of strength 2ℓ with index $\mu_\ell = 0$. *Ann. Statist.* 4, 723-735.
- [3] Shirakura, T. (1976). A note on the norm of alias matrices in fractional replication. *Austral. J. Statist.* 18, 158-160.
- [4] Shirakura, T. (1979). On the norm of alias matrices in balanced fractional 2^m factorial designs of resolution $2\ell+1$. *J. Statist. Planning Inf.* 3, 337-345.
- [5] Srivastava, J. N. and Ghosh, S. (1977). Balanced 2^m factorial designs of resolution V which allow search and estimation of one extra unknown effects, $4 \leq m \leq 8$. *Commun. Statist. (A)* 6, 141-166.
- [6] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1975). Balanced arrays of strength 2ℓ and balanced fractional 2^m factorial designs. *Ann. Inst. Statist. Math.* 27, 143-157.
- [7] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1976). Characteristic polynomials of the information matrices of balanced fractional 2^m factorial designs of higher $(2\ell+1)$ resolution. *Essays in Probability and Statistics. Birthday volume in honor of Prof. J. Ogawa (Ed., S. Ikeda et al.),* 73-94.