

Banach 空間における最良近似度について

琉球大理 西白保敏彦 (Toshihiko Nishishiraho)

[1] X を Banach 空間とし, $B[X]$ は X からそれ自身への
 有界線形作用素全体の成す Banach 代数を表す. N
 を自然数全体の集合とし, $N_0 = N \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$ は整数全
 体の集合を表す. $\{P_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ は $B[X]$ に属する射影作用素の
 列で, 次の 3 条件を満たすとする:

(P-1) (Orthogonal) $P_j P_m = \delta_{jm} P_m$, $\forall j, m \in \mathbb{Z}$, δ_{jm} は
 Kronecker のデルタ関数を表す.

(P-2) (Total) $f \in X$, $P_j(f) = 0$, $\forall j \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = 0$.

(P-3) (fundamental) $\text{span} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} P_j(X)$ は X で稠密である.

各 $n \in N_0$ に対して, M_n は $\{P_j(X) : |j| \leq n\}$ で生成され
 る X の線形部分空間を表す. 与えられた $f \in X$ に対して,

$$E_n(f) = E_n(X; f) = \inf \{ \|f - g\| : g \in M_n \}$$

を M_n に関する f の n 次最良近似度という. 明らかに, $\{E_n(f)\}$
 は単調減少し, 条件 (P-3) によって, すべての $f \in X$ に対

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0$ である. この目的は, この収束する速さの度合の評価を与えることである (cf. [19]). 得られる結果は有次 Banach 空間 (cf. [10], [15], [20]) の場合へ適用される. 従って, 特に, $C_{2\pi} \times L_{2\pi}^p$ ($1 \leq p < \infty$) において三角多項式による最良近似度に関する Jackson 型の古典的な結果 (e.g., [1], [4], [9], [22] を参照) を拡張する.

[2] $\{T_t : t \in \mathbb{R}\}$ は $B[X]$ に属する作用素の一致有界な強連続群, すなわち, 次の 4 条件を満たす作用素の族とする:

$$(T-1) \quad A = \sup \{ \|T_t\| : t \in \mathbb{R} \} < \infty.$$

$$(T-2) \quad T_0 = I \text{ (恒等作用素)}.$$

$$(T-3) \quad T_{s+t} = T_s T_t, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

$$(T-4) \quad \forall f \in X, \forall u \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow u} \|T_t(f) - T_u(f)\| = 0.$$

$\{T_t\}$ の生成作用素 G は

$$G(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T_t(f) - f)$$

によって, 定義される. $D(G)$ はその定義域を表す. $r \in \mathbb{N}$ に対して, $D(G^r)$ は X の稠密な線形部分空間で, G^r は閉線形作用素である (cf. [3, Propositions 1.1.4 and 1.1.6]). 作用素の半群についての基本的な事項については, [3], [6], [7], [8] を参照.

各 $r \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\Delta_t^0 = I, \quad \Delta_t^r = (T_t - I)^r = \sum_{m=0}^r (-1)^{r-m} \binom{r}{m} T_{mt} \quad (r \geq 1)$$

と定義する. 明か. に, 各 Δ_t^r は $B[X]$ に属し,

$$\|\Delta_t^r\| \leq A_r, \quad A_r = \min \{ (A+1)^r, 2^r A \}$$

が成り立つ. $r \in \mathbb{N}_0$, $f \in X$, $\delta \geq 0$ のとき,

$$\omega_r(f, \delta) = \omega_r(X; f, \delta) = \sup \{ \|\Delta_t^r(f)\| : |t| \leq \delta \}$$

と定義し, これを $\{T_t\}$ に関する f の r 次連続率と呼ぶ. このほかの基本的性質をもつ.

補題 1. $r \in \mathbb{N}$, $f \in X$ とする.

$$(a) \quad \omega_r(f, \delta) \leq A_r \|f\| \quad (\forall \delta \geq 0).$$

$$(b) \quad \omega_r(f, \cdot) \text{ は } [0, \infty) \text{ で単調増加連続で, } \omega_r(f, 0) = 0.$$

$$(c) \quad \omega_{r+s}(f, \delta) \leq A_r \omega_s(f, \delta) \quad (\forall s \in \mathbb{N}_0, \delta \geq 0).$$

$$\text{特に, } \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_r(f, \delta) = 0.$$

$$(d) \quad \omega_r(f, \xi \delta) \leq A(1+\xi)^r \omega_r(f, \delta) \quad (\forall \xi, \delta \geq 0).$$

$$(e) \quad 0 < \delta \leq \xi \Rightarrow \omega_r(f, \xi) / \xi^r \leq 2^r A \omega_r(f, \delta) / \delta^r.$$

$$(f) \quad f \in D(G^r) \Rightarrow \omega_{r+s}(f, \delta) \leq A \delta^r \omega_s(G^r(f), \delta) \quad (\forall s \in \mathbb{N}_0, \delta \geq 0).$$

$r \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ に対して, X の要素 f は, すべて $\delta \geq 0$ に対して, $\omega_r(f, \delta) \leq H \delta^\alpha$ であるとき, r と α によって $\text{Lip}_r(\alpha, H)$ に属すると呼ぶ. かく, $\text{Lip}_r \alpha = \bigcup \{ \text{Lip}_r(\alpha, H) : H > 0 \}$ とおく. 各 $r \in \mathbb{N}$ に対して, $D(G^r) \subset \text{Lip}_r r$ であり, $\alpha > r$ ならば, $f \in \text{Lip}_r \alpha$ と $\omega_r(f, \delta) = o(\delta^r)$ ($\delta \rightarrow +0$) とは同値である.

[3] 各 $f \in X$ に対して, $\sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j(f) \in \{P_j\}$ に関する f の Fourier 級数といひ,

$$f \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j(f)$$

と書く. $T \in B(X)$ が マルチプロリヤ-作用素であるとは, あるスカラー-列 $\{\tau_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ が存在して, すべての $f \in X$ に対して, $T(f) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j P_j(f)$ と表せることである. したがって, 必要とき,

$$(1) \quad T \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j P_j$$

と書く (cf. [5], [15], [16], [23], [2], [13], [20]).

X 上のマルチプロリヤ-作用素の全体の集合を $M(X)$ で表す. $M(X)$ は $B(X)$ の可換な閉部分代数で, $I \in M(X)$ である.

$\{T_t : t \in \mathbb{R}\}$ は条件 (T-1) を満たす $M(X)$ に属する作用素の族で,

$$(2) \quad T_t \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_j t) P_j \quad (t \in \mathbb{R})$$

とある. ここで, $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ はスカラー-列である. 必要とき,

$\{T_t : t \in \mathbb{R}\}$ は強連続な群になり, 各 $r \in \mathbb{N}$ に対して,

$$G^r(f) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j^r P_j(f) \quad (f \in D(G^r))$$

が成立する (cf. [15, Proposition 2]). $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続な関数とある. $k \in L^1_{\mathbb{R}}$, $T \in B(X)$ に対して, 合成積作用素 $(k * T)(\varphi; \cdot) \in$

$$(k * T)(\varphi; f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(u) T_{\varphi(u)}(T(f)) du \quad (f \in X)$$

で定義する (cf. [15]). 右辺の積分は Bochner 積分として
常に存在している. 明らかに, $(k * T)(\varphi; \cdot)$ は $B[X]$ に属し,

$$\|(k * T)(\varphi; \cdot)\| \leq B \|k\|_1 \|T\|$$

が成り立つ. 尤も, $\|B\| = \sup \{ \|T_{\varphi(u)}\| : |u| \leq \pi \}$.

補題 2. $k \in L^1_{2\pi}$, $T \in M[X]$ は (1) の通りである.
このとき, $(k * T)(\varphi; \cdot)$ は $M[X]$ に属し,

$$(3) \quad (k * T)(\varphi; \cdot) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(\varphi; k) \tau_j P_j(\cdot)$$

である. ここで,

$$c_j(\varphi; k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(t) \exp(\lambda_j \varphi(t)) dt \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

各 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して,

$$\pi_n(\varphi) = \{ k \in L^1_{2\pi} : c_j(\varphi; k) = 0, |j| > n \}$$

と置く. また, $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\varphi_a(t) = at$, $t \in \mathbb{R}$, と定義し,

$$(k * T)_a(\cdot) = (k * T)(\varphi_a; \cdot), \quad \pi_{n,a} = \pi_n(\varphi_a)$$

と置く. $r \in \mathbb{N}$, $k \in L^1_{2\pi}$ とし,

$$L_{k,r} = \sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \binom{r}{j} (k * I)_j$$

と定義する.

補題 3. $r \in \mathbb{N}$, $k \in L^1_{2\pi}$, $\hat{k}(0) = 1$, $f \in X$ とする. このとき,
任意の $\delta > 0$ に対して,

$$\|L_{n,r}(f) - f\| \leq A \omega_r(f, \delta) \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \delta^{-j} \mu(k; j)$$

が成り立つ. ここで, $\mu(k; j)$ は k の j 次総変換 $\tau - \times \perp \vdash \varepsilon$

表す, あるいは,

$$\mu(k; j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t|^j |k(t)| dt.$$

[4] n 次以下の三角多項式全体の集合を $\mathcal{T}_n$ と書く. 本節では,

$$(4) \quad \mathcal{T}_n \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{T}_{n,m} \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0)$$

を仮定する.

注意. $\{ \lambda_j \}_{j \in \mathbb{Z}} = \{ -i j \}_{j \in \mathbb{Z}}$ とする.

$$(a) \quad \mathcal{T}_n \subset \bigcap_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \mathcal{T}_{n,m} \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0).$$

従って, (4) は常に満たされる.

(b) $\varphi = \varphi_m$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ とする. このとき, (3) は

$$(k * T)_m \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{k}(jm) \tau_j P_j$$

となる. したがって, $k \in \mathcal{T}_n$ ならば,

$$(k * T)_m = \sum_{|j| \leq [n/|m|]} \hat{k}(jm) \tau_j P_j.$$

である. ここで $[n]$ は Gauss 記号を表す.

さて, 次の一般的有界性式を得る:

定理 1. $r \in \mathbb{N}$ とする. このとき, 任意の $f \in X$, $n \in \mathbb{N}_0$ に対して,

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leq \inf \{ \|L_{k,r}(f) - f\| : k \in \mathcal{T}_n' \} \\ &\leq A \inf \{ \omega_r(f, \delta) \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \delta^j \mu(k; j) : \delta > 0, k \in \mathcal{T}_n' \}, \end{aligned}$$

ここで, $\mathcal{J}_n' = \{k \in \mathcal{J}_n : \hat{k}(0) = 1\}$.

証明. $k \in \mathcal{J}_n$, $f \in X$ とする. このとき, 条件 (4) 及び補題 2 より, およびの $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(k \circ I)_m(f) = \sum_{j=-n}^n c_j(\varphi_m; k) P_j(f)$$

が成り立つ. 従って, $L_k(f)$ は H_n に属する. 従って,

補題 3 により, 求める等価式を得る. Q.E.D.

この定理で下限をとる k として, 一般 Jackson 核 $J_{n,m}$ を考えよう. この核は次で与えられる:

$$J_{n,m}(t) = C_{n,m} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2m} \quad (n, m \in \mathbb{N}),$$

ここで定数 $C_{n,m} > 0$ は

$$\hat{J}_{n,m}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_{n,m}(t) dt = 1$$

と取らるるに違いない (cf. [12]). 特に,

$$J_{n,1}(t) = F_n(t) = \sum_{j=1-n}^{n-1} \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) \exp(ijt)$$

は Fejér 核であり, 従って, $J_{n,m}(t) = C_{n,m} \mathcal{H}^m F_n^m(t)$ は非負の $m(n-1)$ 次の偶三角多項式である. また,

$$J_{n,2}(t) = \frac{3}{n(2n^2+1)} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4$$

は Jackson 核である (cf. [9], [14]).

補題 4.

$$J_{n,m}(t) \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{4m} n \quad (|t| \leq \pi)$$

及び

$$J_{n,m}(t) \leq \left(\frac{\pi^2}{2nt}\right)^{2m} n \quad (0 < |t| \leq \pi)$$

が成り立つ。

補題 5.

$$\mu(J_{n,m}; j) \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{4m} \frac{2^{j+1}}{\pi} \left(\frac{1}{j+1} + \frac{1}{2m-j-1}\right) n^{-j}.$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots, 2m-2)$$

こゝの評価を用いて、次の Jackson 型の順定理を示すことができる。

定理 2. $r \in \mathbb{N}$ とする。任意の $f \in X$, $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$(5) \quad E_n(f) \leq A C_r \omega_r(f, \frac{1}{n}),$$

$$\text{ここで, } C_r = 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r+5} (r+4)^r.$$

証明. $m = [(r+3)/2]$, $\delta = [n/m] + 1$ とおく。任意の $J_{\delta,m}$ は J_n^I に属するから、定理 1 より、

$$E_n(f) \leq A \omega_r(f, \frac{1}{n}) \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} n^j \mu(J_{\delta,m}; j).$$

従って、補題 5 を用いれば、求める不等式 (5) が得られる。

Q.E.D.

系 1. (a) ある $r \in \mathbb{N}$ に対して、 $f \in \text{Lip}_r(\Omega, M)$ ならば、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$E_n(f) \leq A M C_r n^{-\alpha}.$$

(b) ある $r \in \mathbb{N}$ に対して, $f \in D(G^r)$ ならば, 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(6) \quad E_n(f) \leq A^2 C_r \|G^r(f)\| n^{-r}.$$

(c) $f \in \bigcap_{r=1}^{\infty} D(G^r)$ ならば, 全ての $\lambda > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\lambda E_n(f) = 0.$$

次の定理は, 高次の連続性による (6) の改良を与える.

定理 3. $r \in \mathbb{N}$, $f \in D(G^r)$ とする. このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$ に対して,

$$E_n(f) \leq A^2 C_{r+s} n^{-r} \omega_s(G^r(f), \frac{1}{n}).$$

証明. 定理 2 の補題 1 (f) によって,

$$E_n(f) \leq A C_{r+s} \omega_{r+s}(f, \frac{1}{n}) \leq A^2 C_{r+s} n^{-r} \omega_s(G^r(f), \frac{1}{n}).$$

Q.E.D.

定理 3 の直接の結果として, 次を得る.

系 2. $r \in \mathbb{N}$, $f \in D(G^r)$ とする. もし, $f \in \text{Lip}_s(\mathcal{A}, M)$ ならば, 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$E_n(f) \leq A^2 M C_{r+s} n^{-(d+r)}.$$

[17], [18] においては, $r=1$, $s=1, 2$ に対して, 上記類似の表現式が Fejér-Korovkin 核 K_n を用いて得られている. この核は次の式で定義されるものである (cf. [11]):

$$K_n(t) = \Lambda_n \left| \sum_{j=0}^n \lambda_n(j) e^{ijt} \right|^2 \quad (n \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}),$$

ここで,

$$\lambda_n(j) = \sin\left(\frac{j+1}{n+2}\pi\right) \quad (j=0, 1, 2, \dots, n),$$

$$\Lambda_n = \left(\lambda_n^2(0) + \lambda_n^2(1) + \dots + \lambda_n^2(n) \right)^{-1}.$$

$K_n \in \mathcal{F}_n^1$ で,

$$K_n(t) = 1 + 2 \sum_{m=1}^n \theta_n(m) \cos mt,$$

$$\theta_n(m) = \Lambda_n \sum_{j=0}^{n-m} \lambda_n(j) \lambda_n(m+j) \quad (m=1, 2, \dots, n)$$

と表される。特に, $\theta_n(1) = \cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right)$ である。

定理4. $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ は, $B[X]$ に属する作用素の列で,
すべての $g \in M_n$ に対して $U_n(g) = g$ を満たすとする。この
とき, すべての $f \in X$, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\|U_n(f) - f\| \leq (\|U_n\| + 1) E_n(f) \leq AC_r(\|U_n\| + 1) \omega_r(f, \frac{1}{n}).$$

証明. 任意の $g \in M_n$ に対して,

$$\begin{aligned} \|U_n(f) - f\| &\leq \|U_n(f-g)\| + \|g-f\| \\ &\leq (\|U_n\| + 1) \|f-g\| \end{aligned}$$

であるから, (5) より

$$\|U_n(f) - f\| \leq (\|U_n\| + 1) E_n(f) \leq AC_r(\|U_n\| + 1) \omega_r(f, \frac{1}{n})$$

となる。

Q. E. D.

示す. $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ は定理 4 の通りとし, $f \in X$ とする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\| E_n(f) = 0$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n(f) - f\| = 0$. 特にある $r \in \mathbb{N}$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\| \omega_r(f, \frac{1}{n}) = 0$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n(f) - f\| = 0$.

$\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ と $\{P_j\}$ に関する Fourier 級数の部分和作用素列とする. すなわち, $S_n = \sum_{j=-n}^n P_j$, $n \in \mathbb{N}_0$. となる. 定理 4 によって, 次の Lebesgue 型の等価式を得る:

定理 5. $r \in \mathbb{N}$ とする. このとき, すべての $f \in X$, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\|S_n(f) - f\| \leq (\|S_n\| + 1) E_n(f) \leq A_r (\|S_n\| + 1) \omega_r(f, \frac{1}{n}).$$

系 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\| E_n(f) = 0$ ならば, f の Fourier 級数は f に収束する, すなわち,

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=-n}^n P_j(f) - f \right\| = 0.$$

特に, ある $r \in \mathbb{N}$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\| \omega_r(f, \frac{1}{n}) = 0$ ならば,

(6) が成り立つ.

各 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して, σ_n は n 次 Cesàro 平均作用素とする:

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1} = \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) P_j.$$

また, V_n は n 次 de la Vallée-Poussin 作用素を表す:

$$V_n = \frac{S_n + S_{n-1} + \cdots + S_{2n-1}}{n} = 2\sigma_{2n-1} - \sigma_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$\{\sigma_n\}$ が一様有界, すなわち,

$$C = \sup \{ \|\sigma_n\| : n \in \mathbb{N}_0 \} < \infty$$

とする。このとき、定理4を $U_n = V_n$ の場合へ適用すれば、次の de la Vallée-Poussin 型の評価式を得る。

定理6. $r \in \mathbb{N}$ とする。このとき、すべての $f \in X$, $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$E_{2n-1}(f) \leq \|V_n(f) - f\| \leq (3C+1)E_n(f) \leq A(3C+1)C_r \omega_r(f, \frac{1}{n}).$$

[5] 本節では、 X が有限 Banach 空間の場合を考える。すなわち、 X は次の4条件を満たす $L_{2\pi}$ の線形部分空間とする。

(H-1) X は $\|\cdot\|$ をもつ Banach 空間である。

(H-2) $\exists M > 0; \|f\|_1 \leq M\|f\|, \forall f \in X$ 。

(H-3) 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して、移動作用素

$$T_t(f)(\cdot) = f(\cdot - t) \quad (\forall f \in X)$$

は X 上で等距離的である。

(H-4) 各 $f \in X$ に対して、写像 $t \mapsto T_t(f)$ は $\mathbb{R}$ 上で強連続である。

このような関数空間の典型的なものとして、 $C_{2\pi}$, $L_{2\pi}^p$ ($1 \leq p < \infty$) である。他の例については、[15] を見よ (Cf. [10], [20])。

さて、 $B[X]$ に属する射影作用素の列 $\{P_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$ を、

$$P_j(f)(\cdot) = \hat{f}(j) \exp(ij\cdot) \quad (f \in X)$$

によって定義する。このとき、 $\{P_j\}$ は条件 (P-1), (P-2), (P-3) を満たす (Cf. [10], [15])。また、展開式 (2) が $\lambda_j = -ij$ と

して成立する。従って、 $\varphi = \varphi_m$, $m \in \mathbb{Z}$, k に対して、(3) は

$$(R+T)_m \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{k}(jm) \tau_j P_j$$

となり, 3k

$$M_n = \mathcal{G}_n \subset \bigcap_{\delta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \pi_{n,\delta} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

である (Cf. ④の注意). さらに, 各 $f \in X$ に対して,

$$\Delta_t^0(f) = f, \quad \Delta_t^r(f)(\cdot) = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(\cdot - jt) \quad (r \geq 1).$$

結局, これまでに行うべき諸結果が上の立場で有次 Banach 空間において適用される. 特に, $r = 1$ のとき, 定理 2, 定理 5, 系 4 はそれぞれ, [20] における定理 9.3.3.1, 定理 9.3.4.2, 系 9.3.4.3 を含む. さらに, 系 1 (b) は, [20] における定理 9.3.3.2 を含む.

参考文献

- [1] N. I. Achieser, Theory of Approximation, Frederick Ungar, New York, 1956.
- [2] H. Buchwalter, Saturation dans un espace norme, C. R. Acad. Sci. Paris 250(1960), 651-653.
- [3] P. L. Butzer and H. Berens, Semi-Groups of Operators and Approximation, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.
- [4] P. L. Butzer and R. J. Nessel, Fourier Analysis and Approximation, Vol. I, Academic Press, New York, 1971.
- [5] P. L. Butzer, R. J. Nessel and W. Trebels, On summation processes of Fourier expansions in Banach spaces. I. Comparison theorems, Tohoku Math. J., 24(1972), 127-140; II. Saturation theorems, ibid., 551-569; III. Jackson-and Zamansky-type inequalities for Abel-bounded expansions, ibid., 27(1975), 213-223.

- [6] E. B. Davies, One-Parameter Semigroups, Academic Press, New York, 1980.
- [7] J. A. Goldstein, Semigroups of Linear Operators and Applications, Oxford Univ. Press, New York, 1985.
- [8] E. Hille and R. S. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1957.
- [9] D. Jackson, The Theory of Approximation, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 11, Amer. Math. Soc., New York, 1930.
- [10] Y. Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis, John Wiley, New York, 1968.
- [11] P. P. Korovkin, Linear Operators and Approximation Theory, Hindustan Publ. Corp., Delhi, 1960.
- [12] G. G. Lorentz, Approximation of Functions, 2ed. ed., Chelsea, New York, 1986.
- [13] V. D. Milman, Geometric theory of Banach spaces I; The theory of bases and minimal systems, Russian Math. Surveys 25(1970), 111-170.
- [14] I. P. Natanson, Constructive Function Theory, Vol. I; Uniform Approximation, Frederick Ungar, New York, 1964.
- [15] T. Nishishiraho, Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces, Tohoku Math. J., 33(1981), 109-126.
- [16] T. Nishishiraho, Saturation of multiplier operators in Banach spaces, Tohoku Math. J., 34(1982), 23-42.
- [17] T. Nishishiraho, Direct theorems for best approximation in Banach spaces, Approximation, Optimization and Computing (IMACS, 1990; A. G. Law and C. L. Wang, eds.), pp. 155-158, North-Holland, Amsterdam, 1990.

- [18] T. Nishishiraho, The order of best approximation in Banach spaces, Proc. 13-th Symp. Appl. Funct. Analysis (H. Umegaki and W. Takahashi, eds.), pp. 90-104, Tokyo Inst. Technology, Tokyo, 1991.
- [19] T. Nishishiraho, The degree of the best approximation in Banach spaces, Tohoku Math. J., 46(1994), 13-26.
- [20] H. S. Shapiro, Topics in Approximation Theory, Lecture Notes in Math. 187, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.
- [21] I. Singer, Bases in Banach Spaces I. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1970.
- [22] A. F. Timan, Theory of Approximation of Functions of a Real Variable, Macmillan, New York, 1963.
- [23] W. Trebels, Multiplier for (C, α) -Bounded Fourier Expansions in Banach Spaces and Approximation Theory, Lecture Notes in Math. 329, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg/New York, 1973.