

Fuchs 双曲型方程式

東大 理 田原 秀 敏

19 世紀後半に証明された Cauchy-Kowalevsky の定理は、その後
の偏微分方程式論の中で一つの出発点としての意義をもっ
ている。特に初期値問題という側面に着目すれば、それは双曲
型方程式の理論として膨大な体系に発展してきた。従って、
この定理を拡張する事は新しい数学の局面の可能性を示唆す
る。特に双曲型の理論の拡張を可能にするであろう。最近 Ba
-ouendi-Goulaouic [1] は characteristic initial hypersurface をもつ作用
素に迄 Cauchy-Kowalevsky の定理を一般化した。彼等はそれを「
Fuchs 型」と呼んだが、それは non-characteristic の場合のかなり
自然な拡張を与えている。(Hasegawa [2][3] も参照)。そこで、
もし Fuchs 型作用素について C^∞ の、又は D 等の函数の中で議論
を展開しようとするれば、当然「双曲型」の条件が必要になってくる
だろう。かくして、我々はここに「Fuchs 双曲型」なる概念に到
達する。それは当然、双曲型のかなり自然な拡張を与えるはず

である。我々は本稿で、まず Fuchs 双曲型なるものを定義し、それについて *hyperfunction solution* の構造をしらべてゆくことにしたい。その結果、従来双曲型方程式に関して得られた結果の多くが、我々の Fuchs 双曲型方程式の場合に這一般化される事になるだろう。

(はあ、この仕事をするに当たり、小松、佐藤、大島、三輪の各先生方から多くの *suggestion* を受けてました。ここに感謝の意を込めて表記しておきます。)

目次： §1 Fuchs 系

§2 Fuchs 双曲系

§3 巾零 Fuchs 系

§1 : Fuchs 系

最初に Baouendi-Goulaouic [1] の結果を思い出しておこう。 m 階の微分作用素 $P(t \times D_t D_x)$ が次の (i) (ii) を満たす時、彼等は P を t に関し *weight* $(m-k)$ の Fuchs 型と呼んだ。(ここで $(tx) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$)

$$(i) \quad 0 \leq k \leq m \text{ で } P = t^k D_t^m + P_1(t \times D_t) t^{k-1} D_t^{m-1} + \dots + P_{m-k}(t \times D_t) D_t^{m-k} + \dots + P_m(t \times D_t)$$

なる形に書ける。

$$(ii) \quad 1 \leq j \leq k \text{ に対し } \text{ord } P_j(0 \times D_x) \leq 0 \quad (P_j(0 \times D_x) = Q_j(x) \text{ とおく。})$$

え

この時 $C(\lambda, x) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1) + a_1(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+2) + \cdots + a_k(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1)$
 とおく時次の結果が成り立つ.

定理 (Baouendi-Goulaouic [1], Hasegawa [2] [3]).

P を weight $(m-k)$ の Fuchs 型とする. 任意の正則函数 $f(t, x)$, $u_0(x), \dots, u_{m-k+1}^{(x)}$
 に対し, $Pu = f$, $(\frac{\partial}{\partial t})^p u|_{t=0} = u_p$, $0 \leq p \leq m-k-1$ なる Cauchy 問題は正則解
 が唯一存在する. ($C(\lambda, 0) \neq 0$ for $\lambda \geq m-k, \lambda \in \mathbb{Z}$ の時)

上の場合 $\tilde{P} = t^{m-k}P$ を考える事により, weight 0 に reduction できる.
 $t^l D_t^l = t D_t (t D_t - 1) \cdots (t D_t - l + 1)$ に注目すると, 上の Fuchs 型は, Volenik タイ
 プの matrix 表示できる. そこで一般に次の様に定義しよう.

定義 $P(t \times D_t D_x) = t D_t - A(t \times D_x)$; $A(t \times D_x) = (A_{ij}(t \times D_x))_{1 \leq i, j \leq m}$ の matrix
 が次の (i) (ii) を満す時, Volenik の意味で, t に関し Fuchs 系という.

$$(i) \exists (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m \text{ s.t. } \text{ord } A_{ij}(t \times D_x) \leq n_i - n_j + 1.$$

$$(ii) t=0 \text{ とおいた時 } \text{ord } A_{ij}(0 \times D_x) \leq 0.$$

本節では, この Fuchs 系について複素解析的な議論を行なう.
 後の応用の為, $A_{ij}(t \times D_x)$ は必ずしも微分作用素とせず, 一般に,
 $(t, x_0, \langle \xi, dx \rangle) = (0, 0; dx_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n$ の近傍で定義された $\Psi.D.O_p$ と理解
 する. $A(t \times \xi) = \sum_j A^{(j)}(t \times \xi)$ と斉次部分に分ける. この時 $A^{(0)}(0, 0; \xi_0)$ の
 固有値を特性固有値, $(\lambda - A(0 \times D_x))^{-1} = (S_{ij}(\lambda \times D_x))$ ($\lambda \gg 1$ は存在) と書
 く時 $\lambda = \max_{S_{ij} \neq 0} |n_i - n_j| + 1$ を P の F-order と呼ぶことにする. §1.1 では,

Fuchs系に対する Cauchy問題の形式的な基本解を構成し、応用として Fuchs系の Cauchy-Kowalewsky の定理を導く。§1.2 は §1.1 の少々面倒な評価の部分の証明につきやす。

§1.1. Fuchs系の形式的な基本解.

定義 (1.1.1) 正整数 m に対し形式和 $R(t \times D_k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} R_j(t \times D_k)$ で次の (i) (ii) (iii) を満たすものを $\frac{1}{m}$ 次の形式的 $\Psi D \mathcal{O}_p$ と呼ぶ。

(i) $\exists \varepsilon > 0$ が存在して、 $R_j(t \times \xi)$ は $\{(t, \xi); |t| < \varepsilon, |\xi| < \varepsilon, |t - \xi| < \varepsilon\}$ で定義された正則関数で ξ に関し j 次斉次式である。

(ii) $\exists M > 0$ が存在して、 $0 < \delta < \varepsilon$ なる $\forall \delta$ に対して、

$$\sup_{|t| < \delta, |\xi| < \varepsilon, |t - \xi| < \varepsilon, |\xi| = 1} |R_j(t \times \xi)| \leq C_\delta (M \delta^{\frac{1}{m}})^j / j! \quad \text{for } j \geq 0.$$

(iii) $\exists A > 0$ at. $\sup_{|t| < \varepsilon, |\xi| < \varepsilon, |t - \xi| < \varepsilon, |\xi| = 1} |R_j(t \times \xi)| \leq (j!) A^{(-j)}$ for $j < 0$,

特に R_j が ξ の j 次斉次多項式で、(ii) (iii) の評価を $|\xi| = 1$ 全体で満たす時形式的 diff op と呼ぶ。各々の全体を $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$, $\hat{\mathcal{Q}}(\frac{1}{m})$ と書く。

注意 (1.1.2) 1) $m=1$ の時は柏原河合 [4] で finite velocity をもつ $\Psi D \mathcal{O}_p$

として導入されている。 $m > 1$ ではいわば infinite velocity となる。

2) $P(t \times D_k)$ をもつ正則な無限階の $\Psi D \mathcal{O}_p$ とする時 $P \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ である。

命題 (1.1.3) $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$, $\hat{\mathcal{Q}}(\frac{1}{m})$ は次の性質をもつ。

1) $P = \sum P_j$, $Q = \sum Q_j \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ に対し $S_\ell = \sum_{k=j+\ell-1, \ell} \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha P_j(t \times \xi) D_k^\alpha Q_k(t \times \xi)$ と

おく. この時 $S = \sum_l S_l(t \times D_k) \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$. 従って $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ は環構造をもつ.

2) $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ は t に正則な無限階 $\mathbb{A} D \cdot \mathbb{O}_p$ の t はす環の拡大環である.

3) $\hat{\mathcal{O}}(\frac{1}{m})$ は. 部分環として $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ の中で閉じている

4) $P = \sum P_j \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ の時 $D_t P = \sum \frac{\partial}{\partial t} P_j$ とおくと $D_t P \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$.

(証明). Cauchy の不等式を使えばよい. (柏原・河合 [4] Lemma 2.1 参照).

命題より, $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ の中で $(tD_t - A(t \times D_k)) \cdot E(t \times D_k) = F(t \times D_k)$ なる微分方程式を考える事が出来る. 今 $P = tD_t - A(t \times D_k)$ を $(0, dx_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{P}^n$ の近傍で定義された $\mathbb{A} D \cdot \mathbb{O}_p$ の Fuchs 系, $F(t \times D_k)$ を無限階 $\mathbb{A} D \cdot \mathbb{O}_p$ とした時, $P(t \times D_k) \cdot E(t \times D_k) = F(t \times D_k)$ の解 $E(t \times D_k)$ を $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ の中で考える事にしよう. (但し行列の size を $\tilde{m} \times \tilde{m}$ とする.). 両辺を t の中に展開すると次の漸化式を得る.

$$(l - A_0) E_l = \sum_{i=1}^l A_i E_{l-i} + F_l \quad (\text{但し, } A = \sum t^i A_i, F = \sum t^i F_i, E = \sum t^i E_i)$$

もし P の特性固有値 $\{n \in \mathbb{Z} : n > n_0 \geq 0\}$ ならば, Fuchs 系の定義より $l > n_0$, $(l - A_0)$ は可逆. 従って順次 $(l - A_0)^{-1}$ を掛けてゆくと, E_l は $\{E_0, \dots, E_{n_0}\}$ と $\{F_l\}$ の一次結合で書けてしまう. 故に

$$\sum_{l=n_0+1}^{\infty} t^l E_l(x D_k) = W_0(t \times D_k) E_0(x D_k) + \dots + W_{n_0}(t \times D_k) E_{n_0}(x D_k) + R_F(t \times D_k)$$

なる形に一意的に書ける. この時次の定理が成り立つ.

定理 (1.1.4) P を Fuchs 系, $A = P$ の F-order, $F(t \times D_k)$ を無限階 $\mathbb{A} D \cdot \mathbb{O}_p$

この時, $W_0(t \times D_k), \dots, W_{n_0}(t \times D_k), R_F(t \times D_k) \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{\sigma})$ となる.

(証明は §1.2 に於て行なう.)

α_i は 特性固有値

系 (1.1.5) P : Fuchs 系, $\{\alpha_i \in \mathbb{Z}; n > n_0 \geq 0\}$ とする. 無限階数 $D, \mathcal{O}_p$

$U_0(xD), \dots, U_{n_0}(xD), F(txD)$ に対し, 次の Cauchy 問題 (e) を考える.

$$(e) \quad t \frac{\partial}{\partial t} E - A(txD) E = F, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^v E|_{t=0} = U_v(xD), \quad 0 \leq v \leq n_0.$$

(e) が $\hat{\mathcal{P}}$ の中に解をもつ必要十分条件は, 次をみたす事である.

$$(*) \quad 0 \leq l \leq n_0 \text{ に対し, } (l - A_0) U_l / l! = \sum_{i=1}^l A_i U_{l-i} / (l-i)! + F_l \text{ を満たす.}$$

この時解 $E(txD) \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{\sigma})$ ($\sigma = F\text{-order}$) で, 一意的であり, 定理の基本解 $W_v(txD)$ を使って, $E = R_F + \sum_{j=0}^{n_0} (t^{n_0+1} W_j(txD) + t^j) U_j(xD) / j!$ と書ける.

系より, わかる様に, $W_v(txD)$ が Fuchs 系の形式的な基本解を与えている. P の各成分が微分 $\mathcal{O}_p$ から成る時は, $|S|=1$ の各点で $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{\sigma})$ の評価をもつ事と, $|S|=1$ が Compact なる事より, ただちに基本解 $W_v(txD) \in \hat{\mathcal{O}}(\frac{1}{\sigma})$ が理解される. $\hat{\mathcal{O}}(\frac{1}{\sigma})$ の定義より, $\mathcal{O}_s$ (正則関数の芽のはす環) の作用素環 $\text{ie. } \hat{\mathcal{O}}(\frac{1}{\sigma}) \times \mathcal{O}_s \rightarrow \mathcal{O}_s$ である. 従って, 次の Fuchs 系の Cauchy-Kowalevsky の定理を得る.

定理 (1.1.6) $P = tD - A(txD)$ を微分作用素の Fuchs 系, 特性固有値 $\in \{n \in \mathbb{Z}; n > n_0 \geq 0\}$, $\sigma = P$ の $F\text{-order}$ とする. Cauchy 問題 (e).

$$(e) \quad P(txD) U(t,x) = f(t,x), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^v U|_{t=0} = U_v(x), \quad 0 \leq v \leq n_0, \quad f, U_v \in \mathcal{O}.$$

(e) が $\mathcal{O}$ の中に正則解をもつ必要十分条件は (*) をみたす事である.

$$(*) \quad 0 \leq l \leq n_0, \quad (l - A_0) U_l / l! = \sum_{i=1}^l A_i U_{l-i} / (l-i)! + f_l, \quad f = \sum t^l f_l(x);$$

更にもし data が $\{x \in \mathbb{C}^n \mid |x| \leq r \ll 1\}$ で与えられたならば、解は $\{(tx) \mid |x| \leq (r-|x|/M)^{\alpha}\}$ で存在する。(M は P のみに依存する定数).

(証明). $f(tx)$, $u_j(x)$ を 0 階微分作用素として基本解 $W_\alpha(tx, D_x)$, $R_F(tx, D_x) \in \hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{\alpha})$ 故に解は $u(tx) = R_F(tx, D_x) \cdot 1 + \sum_{j=0}^{\infty} (t^{\alpha+j} E_j(tx, D_x) + t^j) u_j(x) / j!$ と書ける. 定理の後半は次の補題を示せば十分であろう.

(補題). $P(tx, D_x) \in \hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{\alpha})$. $f(tx)$ は $\{(tx) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \mid |x| \leq r, t \text{ は十分広い領域}\}$ で正則とする. この時 $P(tx, D_x) \cdot f(tx)$ は $\{(tx) \mid |x| \leq r, |t| \leq (r-|x|/M)^{\alpha}\}$ なる領域で正則となる.

(証明). $|f(tx)| \leq B$ とする. Cauchy 不等式より $|D_x^\alpha f|_{|x| \leq s} \leq \alpha! \frac{1}{(r-s)^{|\alpha|}} B$ - 方 $P \in \hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{\alpha})$ 故 $|P_j|_{|x| < \delta} \leq C_\delta (M\delta^{\frac{1}{\alpha}})^j / j!$ を得る. $P_j(tx, \xi) = \sum P_{j\alpha} (tx) \xi^\alpha$ とおくと $|P_{j\alpha}(tx)|_{|x| < \delta} \leq C_\delta (M\delta^{\frac{1}{\alpha}})^j / j!$ を得る. 両評価式より,

$$\begin{aligned} |P(tx, D_x) f(tx)|_{|x| < \delta, |t| \leq s} &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} C_\delta (M\delta^{\frac{1}{\alpha}})^j / j! \cdot \alpha! \frac{1}{(r-s)^{|\alpha|}} B \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} C_\delta B \cdot 2^{n-1} \left(\frac{2M\delta^{\frac{1}{\alpha}}}{r-s} \right)^j \end{aligned}$$

故に $2M\delta^{\frac{1}{\alpha}} < r-s$ で収束 i.e. $\delta < (r-s/M)^{\alpha}$ で収束する. $|x| \leq s$ で考えたが、この s を動かすと補題の領域を得る. g.e.d.

この Cauchy-Kowalensky の定理は Volenik の意味の Kowalensky 系や Baouendi-Goulaouic [1] の結果を含んでしまう. 実際 $P = D_t - A(tx, D_x)$ を Kowalensky 系とする時 $\tilde{P} = tD_t - tA(tx, D_x)$ は Fuchs 系 $\tilde{P}$ の F-order = 1. 故に Cauchy 解の存在及びその領域についての結果はただちに得る. P.3 で説明した様に matrix 表示すれば Fuchs 型に対する

結果を含む事は明らか. 領域についての陳述を合わせると

定理 (1.1.7) P を weight $(m-k)$ の Fuchs 型, $e(\lambda) \neq 0$ for $\lambda \geq m-k$, $\lambda \in \mathbb{Z}$,

任意の正則函数 $f(t, x)$, $u_0(x), \dots, u_{m-k-1}(x)$ に対し, Cauchy 問題 (5)

$$(5) \quad P(t, x, D_t, D_x) u(t, x) = f(t, x) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^v u(t, x) \Big|_{t=0} = u_v(x) \quad 0 \leq v \leq m-k-1$$

は唯一つの正則解をもつ. 更にもし data を $\{x \in \mathbb{C}^n: |x| \leq r \ll 1\}$ で与えたならば 解 u は $\{(t, x); |t| \leq (r/M)^A\}$ $A = \min\{m, k+1\}$ で存在する. (ここで M は P のみに依存する定数).

(証明) $m=k$ の時は P_3 の方法で matrix 表示すれば良い. $m \neq k$ の時 $\hat{P} = tP$ とおき $\hat{P}$ を次の様にして matrix 表示してゆく. $u_0 = u$, $u_1 = D_t u_0, \dots, u_{m-k-1} = D_t u_{m-k-2}$, $u_{m-k} = t D_t u_{m-k-1}, \dots, u_{m-1} = (t D_t - k + 1) u_{m-2}$ とおく. $D_t u = v \Leftrightarrow t D_t u = t v$ により Fuchs 系にもってゆく. F-order $\leq k+1$ 故定理の領域を得る. q. e. d.

§1.2. FCK 級数の評価.

本節では, §1.1 の定理 (1.1.4) の証明の実行を目標とする. 最初に評価実行の武器となる Monvel-Kree [5] の形式 norm の説明をしておく. $P(x, D_x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{j-k}(x, D) x^k$ を j 階変 $D, \mathcal{O}_p$ とする時,

$$N_j^{\omega}(p; T) = \sum_{k, \alpha, \beta} \frac{2(2\pi)^k k!}{(|\alpha|+k)! (|\beta|+k)!} \sup_{\omega} |D_x^{\alpha} D_{\xi}^{\beta} P_{j-k}(x, \xi)| T^{2k+|\alpha|+|\beta|}$$

と置く. 主な性質は次の通りである.

(i) $P(xD)$ が $\text{gr} D, \mathcal{O}_p$ の増大条件を満たす $\Leftrightarrow N_j^\omega(P; T)$ が収束巾級数.

(ii) $P_\nu(xD)$ を j_ν 次 $\text{gr} D, \mathcal{O}_p$ ($\nu=1, 2$) ならば $N_{j_1+j_2}^\omega(P; T) \ll N_{j_1}^\omega(P; T) \cdot N_{j_2}^\omega(P; T)$.

定義 (1.2.1) 次の形の級数を形式的 FCK 級数と呼ぶ.

$$R(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} R^\ell t^\ell; \quad R^\ell = \sum_{\substack{m_i \in \mathbb{Z}_+ \\ \ell = m_1 + \dots + m_p \geq 1 \\ k_p = m_p, k_i = m_i - m_{i+1} (1 \leq i < p)}} A_{k_1}(m_1) A_{k_2}(m_2) \dots A_{k_p}(m_p).$$

この R^ℓ に関し次の漸化式が成り立つ事は容易にわかる.

$$(1) R^1 = A_1(1), \quad (2) R^{\ell+1} = A_1(\ell+1)R^\ell + \dots + A_\ell(\ell+1)R^1 + A_{\ell+1}(\ell+1).$$

従って FCK 級数とは漸化式 (1) (2) より構成される級数に他ならない. 今 $\{A_k^\omega(m)\}_{1 \leq i \leq s, k, m \in \mathbb{Z}_+}$ を $\text{gr} D, \mathcal{O}_p$ の集合, C, C^{-1} を可逆行列とする. この時 $A_k(m) = C(A_k^\omega(m; xD_k) + \dots + A_k^{(s)}(m; xD_k))C^{-1}$ とおくと形式的 FCK 級数ができる. これを $R(C\{A_k^\omega(m)\}C^{-1}; txD_k)$ とかく.

命題 (1.2.2) $\{A_k^\omega(m; xD_k)\}_{1 \leq i \leq s, k, m \in \mathbb{Z}_+}$ が次の 1) 2) を満たし, C, C^{-1} が有限階 $\text{gr} D, \mathcal{O}_p$ ならば, $R(C\{A_k^\omega(m)\}C^{-1}; txD_k) \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{s})$ となる. 但し

1) $A_k^\omega(m; xD_k)$ は高々 i 階以下の $\text{gr} D, \mathcal{O}_p$.

2) $\exists$ 領域 ω , $\exists \lambda > 0, M > 0, B > 0$ s.t. $N_i^\omega(A_k^\omega(m); \lambda) \leq \frac{MB^k}{m^i}$.

$$\begin{aligned} (\text{証明}) \quad A_{k_1}(m_1) \dots A_{k_p}(m_p) &= \sum_{1 \leq \varepsilon_i \leq s} C A_{k_1}^{(\varepsilon_1)}(m_1) A_{k_2}^{(\varepsilon_2)}(m_2) \dots A_{k_p}^{(\varepsilon_p)}(m_p) C^{-1} \\ &= \sum_{\substack{p_1 + p_2 + \dots + p_s = p \\ p_i \geq 0}} \left(C \sum_{\substack{p_i = \#(\{\varepsilon_i - \varepsilon_p\} \cap \{i\}) \\ 1 \leq \varepsilon_i \leq s}} A_{k_1}^{(\varepsilon_1)}(m_1) \times \dots \times A_{k_p}^{(\varepsilon_p)}(m_p) C^{-1} \right) \end{aligned}$$

と書ける. 故に.

$$X^{(p_1 \dots p_s)} = \sum_{p_i = \#(\{\varepsilon_i - \varepsilon_p\} \cap \{i\}), 1 \leq \varepsilon_i \leq s} C A_{k_1}^{(\varepsilon_1)}(m_1) \dots A_{k_p}^{(\varepsilon_p)}(m_p) C^{-1} \quad \text{とおくと.}$$

$C, \bar{C}$ の各成分が高々 c 階以下とすると $X^{(P_1 \cdots P_s)}$ は $(2c + P_1 + 2P_2 + \cdots + sP_s)$ 階以下の至 $D, \mathcal{O}_p$. 齊次部分表示して $X^{(P_1 \cdots P_s)} = \sum_{j \leq 2c + P_1 + \cdots + sP_s} X_j^{(P_1 \cdots P_s)}(x, \xi)$ と書く. この時 $X^{(P_1 \cdots P_s)}$ を使おう.

$$R(C\{A_k^{(u)}\}\bar{C}; t \times D_k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{\ell=m_1+\cdots+m_p \geq 1 \\ k_p=m_p, k_i=m_i-m_{i+1}}} \sum_{\substack{P_1+\cdots+P_s=P, P_i \geq 0}} X^{(P_1 \cdots P_s)}(x, D_k) \cdot t^\ell$$

と書ける.

$R(C\{A_k^{(u)}\}\bar{C}; t \times \xi) = \sum_j R_j(t \times \xi)$; $R_j(t \times \xi)$ は j について j 次齊次式とすると

$$R_j(t \times \xi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{\ell=m_1+\cdots+m_p \geq 1 \\ k_p=m_p, k_i=m_i-m_{i+1}}} \sum_{\substack{P_1+\cdots+P_s=P \\ j \leq 2c + P_1 + \cdots + sP_s}} X_j^{(P_1 \cdots P_s)}(x, \xi) \cdot t^\ell$$

となる.

まず $X^{(P_1 \cdots P_s)}$ の評価を行なう. $N_c^\omega(C^\pm; \lambda) = N$ とおくと,

$$\begin{aligned} N_{2c+P_1+\cdots+sP_s}^\omega(X^{(P_1 \cdots P_s)}; \lambda) &\leq \sum_{\substack{P=\#\{i \in I, \varepsilon_i \neq 1\} \\ 1 \leq \varepsilon_i \leq s}} N_c^\omega(C; \lambda) N_{\bar{C}}^\omega(\bar{C}; \lambda) N_{\varepsilon_1}^\omega(A_{k_1}^{(\varepsilon_1)}; \lambda) \cdots N_{\varepsilon_p}^\omega(A_{k_p}^{(\varepsilon_p)}; \lambda) \\ &\leq \sum N^2 M^P B^{k_1+\cdots+k_p} \frac{1}{m_1 \varepsilon_1} \times \cdots \times \frac{1}{m_p \varepsilon_p} \end{aligned}$$

を得る.

ここで $\frac{1}{m_1} < \frac{1}{m_2} < \cdots < \frac{1}{m_p}$, $\frac{1}{m_p} \leq \frac{1}{\nu}$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_1 \varepsilon_1} \times \cdots \times \frac{1}{m_p \varepsilon_p} &\leq \frac{1}{(m_1 \cdots m_p)} \times \frac{1}{(m_{P_1+1} \cdots m_{P_1+P_2})^2} \times \cdots \times \frac{1}{(m_{P_1+\cdots+P_{p-1}+1} \cdots m_p)^s} \\ &\leq \frac{1}{P!} \left(\frac{P!}{(P+P_2)!} \right)^2 \times \cdots \times \left(\frac{(P-P_1)!}{P!} \right)^s \leq \frac{1}{P!} \left(\frac{1}{P_2!} \right)^2 \cdots \left(\frac{1}{P_s!} \right)^s \end{aligned}$$

を得る. $\sum$ の項数 $= \frac{P!}{P_1! \cdots P_s!} \leq s^P$; $k_1 + \cdots + k_p = \ell$ 故結局次を得る.

$$N_{2c+P_1+2P_2+\cdots+sP_s}^\omega(X^{(P_1 \cdots P_s)}; \lambda) \leq N^2 (sM)^P B^\ell \frac{1}{P!} \left(\frac{1}{P_2!} \right)^2 \times \cdots \times \left(\frac{1}{P_s!} \right)^s$$

故に Monvel-Kree の形式 norm の定義にもとけると

$$|X_{2c+P_1+\cdots+sP_s-k}^{(P_1 \cdots P_s)}(x, \xi)|_\omega \leq \frac{k! (2\eta)^k}{2 \cdot \lambda^{2k}} \cdot N^2 (sM)^P B^\ell \frac{1}{P!} \left(\frac{1}{P_2!} \right)^2 \times \cdots \times \left(\frac{1}{P_s!} \right)^s$$

$j = 2c + P_1 + \cdots + sP_s - k$ とおくと

$$|X_j^{(P_1 \cdots P_s)}(x, \xi)|_\omega \leq \frac{(2c + P_1 + \cdots + sP_s - j)!}{P! (P_2!)^2 \cdots (P_s!)^s} \cdot \frac{N^2 (sM)^P B^\ell}{2} \left(\frac{2\eta}{\lambda^2} \right)^{2c + P_1 + \cdots + sP_s - j}$$

故に $|R_j(t, \xi)|$ に関し次の評価を得る.

$$|R_j| \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{\ell=m_i > m_p > 1 \\ k_p=m_p, k_i=m_i-m_{\min}}} \sum_{\substack{\beta_1+\dots+\beta_s=p \\ j \leq 2C+\beta_1+\dots+\beta_s}} \frac{(2C+\beta_1+\dots+\beta_s-j)!}{\beta_1! \times \dots \times (\beta_s!)^s} \cdot \frac{N^2(SM)^p B^\ell}{2} \left(\frac{2n}{\lambda^2}\right)^{2C+\beta_1+\dots+\beta_s-j} |t|^\ell$$

ここで次の事に注意しよう.

$$(a) \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{\ell=m_i > m_p > 1 \\ k_p=m_p, k_i=m_i-m_{\min}}} \sum_{\substack{\beta_1+\dots+\beta_s=p \\ j \leq 2C+\beta_1+\dots+\beta_s}} 1 \leq C_p \leq 2^\ell \quad (*) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{1 \leq p \leq \ell} \sum_{\substack{\beta_1+\dots+\beta_s=p \\ j \leq 2C+\beta_1+\dots+\beta_s}} \left(\sum_{\substack{\ell=m_i > m_p > 1 \\ k_p=m_p, k_i=m_i-m_{\min}}} 1 \right) (*)$$

$$\sum_{\ell=m_i > m_p > 1} 1 \leq C_p \leq 2^\ell \quad \text{が成立つ.}$$

$$(b) \frac{(2C+\beta_1+\dots+\beta_s-j)!}{\beta_1! (\beta_2!)^2 \dots (\beta_s!)^s} \leq \frac{(2C+\beta_1+\dots+\beta_s-j)!}{(2C+\beta_1+\dots+\beta_s)!} \times (1+1+2+\dots+s)^{2C+s\ell} \times (2C)!$$

故に (a) (b) を使って書き直すと, $((1+1+2+\dots+s)^{2C+s\ell} (2C)! \leq L \cdot V^{s\ell})$

$$|R_j| \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{1 \leq p \leq \ell} \sum_{\substack{\beta_1+\dots+\beta_s=p \\ j \leq 2C+\beta_1+\dots+\beta_s}} \frac{(2C+\beta_1+\dots+\beta_s-j)!}{(2C+\beta_1+\dots+\beta_s)!} \cdot \frac{N^2 L \cdot (SM)^p}{2} \cdot (2V^s B |t|)^\ell \left(\frac{2n}{\lambda^2}\right)^{2C+\beta_1+\dots+\beta_s-j}$$

と書ける. 右辺で $\nu = 2C+\beta_1+2\beta_2+\dots+s\beta_s$ とおく時次を得る.

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{1 \leq p \leq \ell} \sum_{\substack{\beta_1+\dots+\beta_s=p \\ j \leq \nu=2C+\beta_1+\dots+s\beta_s}} \frac{(\nu-j)!}{\nu!} \cdot \frac{N^2 L (SM)^p}{2} (2V^s B |t|)^\ell \left(\frac{2n}{\lambda^2}\right)^{\nu-j}$$

$SM > 1$ と仮定して良いので $(SM)^p \leq (SM)^\ell$, $(SM) \cdot 2V^s B = C_1$, $(\frac{2n}{\lambda^2}) = C_2$ と

$$\text{かく.} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{1 \leq p \leq \ell} \sum_{\substack{\beta_1+\dots+\beta_s=p \\ j \leq \nu=2C+\beta_1+\dots+s\beta_s}} \frac{(\nu-j)!}{\nu!} (N^2 L) (C_1 |t|)^\ell C_2^{\nu-j}$$

を得る. ここで ℓ, ν を固定した時の“場合の数” $\leq \sum_{1 \leq p \leq \ell} \sum_{\beta_1+\dots+\beta_s=p} 1 \leq (2s)^\ell$

一方 ν は $2C+1 \leq \nu \leq s\ell+2C$ の範囲内にあるから,

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{1+2C \leq \nu \leq s\ell+2C \\ j \leq \nu}} \frac{(\nu-j)!}{\nu!} N^2 L (2s C_1 |t|)^\ell C_2^{\nu-j} \\ &= \sum_{1+2C \leq \nu} \sum_{\substack{\nu-2C \leq s\ell, \ell \in \mathbb{Z}_+ \\ j \leq \nu}} \frac{(\nu-j)!}{\nu!} N^2 L (2s C_1 |t|)^{\frac{1}{s}(s\ell-\nu+2C)} \cdot (2s C_1 |t|)^{\frac{1}{s}(\nu-2C)} C_2^{\nu-j} \end{aligned}$$

$$= \sum_{1+2c \leq \nu, j \leq \nu} \frac{(\nu-j)!}{\nu!} (2SC_1 H)^{\frac{1}{s}(\nu-2c)} C_2^{\nu-j} \sum_{\nu-2c \leq s\ell, \ell \in \mathbb{Z}_+} N^2 L (2SC_1 H)^{\frac{1}{s}(s\ell-\nu+2c)}$$

ここで、 $\sum_{\substack{\nu-2c \leq s\ell \\ \ell \in \mathbb{Z}_+}} N^2 (2SC_1 H)^{\frac{1}{s}(s\ell-\nu+2c)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} N^2 L (2SC_1 H)^{\frac{1}{s}n} < C_3 \quad (H \ll 1)$

故に $(2SC_1)^{\frac{1}{s}} = M_1$ とおき $|R_j|_\omega$ の評価を書き直すと、次を得る.

$$|R_j| \leq \sum_{\substack{1+2c \leq \nu \\ j \leq \nu}} \frac{(\nu-j)!}{\nu!} C_3 \cdot (M_1 H^{\frac{1}{s}})^{\nu-2c} \cdot C_2^{\nu-j}$$

この評価から定理の評価が導びかれる事を示そう.

1) $j \geq 2c$ の場合の評価. $\nu-j=k$ と置いて書き換えると.

$$\begin{aligned} |R_j|_\omega &\leq C_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k+j)!} (M_1 H^{\frac{1}{s}})^{k+j-2c} C_2^k \\ &\leq C_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!j!} (M_1 H^{\frac{1}{s}})^k (M_1 H^{\frac{1}{s}})^{j-2c} C_2^k \\ &= C_3 (M_1 H^{\frac{1}{s}})^{j-2c} \frac{1}{j!} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (C_2 M_1 H^{\frac{1}{s}})^n \right\}. \end{aligned}$$

$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (C_2 M_1 H^{\frac{1}{s}})^n \right\}$ は $C_2 M_1 H^{\frac{1}{s}} < 1$ の時収束する.

2) $j < 0$ の場合の評価.

$$\begin{aligned} |R_j|_\omega &\leq C_3 \sum_{\nu=1+2c}^{\infty} \frac{(\nu-j)!}{\nu!} (M_1 H^{\frac{1}{s}})^{\nu-2c} C_2^{\nu-j} \\ &\leq C_3 \sum_{\nu=1+2c}^{\infty} (-j)! 2^{\nu-j} (M_1 H^{\frac{1}{s}})^{\nu-2c} C_2^{\nu-j} \\ &\leq C_3 (-j)! (2C_2)^{2c-j} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2C_2 M_1 H^{\frac{1}{s}})^n \right\} \end{aligned}$$

$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2C_2 M_1 H^{\frac{1}{s}})^n \right\}$ は $2C_2 M_1 H^{\frac{1}{s}} < 1$ の時収束する.

以上 1) 2) の評価から $\widehat{\rho}(\frac{1}{s})$ の評価が導びかれる事は明らかである. 故に証明は完了した.

g. e. d.

注意 (1.2.3) $R(C\{A_k^{\psi(m)}\}C'; t \times D_k)$ の評価は、 $N_k^{\omega}(A_k^{\psi(m)}; \lambda)$ の評価に

のみ依存している。従って、 $T(m_0)\{A_k^{(i)}(m)\} = \{\tilde{A}_k^{(i)}(m)\}_{1 \leq i \leq S, k, m \geq 0}$, $\tilde{A}_k^{(i)}(m) \equiv A_k^{(i)}(m+m_0)$ とする時、 $R(C \cdot T(m_0)\{A_k^{(i)}(m)\} \cdot C^{-1}; t \times D_k)$ は、 $R(C \{A_k^{(i)}(m)\} C^{-1}; t \times D)$ と同じ値の評価でおさえられる。

以上を準備として §1.1 の基本解の評価を行なう。方法は命題 (1.2.2) に帰着させる事による。 $P = tD_t - A(t \times D_k)$ を Fuchs 系、 $(0, dx_m)$ で $\mathbb{A}^1(D, \mathbb{Q}_p)$ 、有次部分表示して $A(t \times \xi) = \sum_j A^{(j)}(t \times \xi)$, $A(t \times D) = (A_{ij})$, $\text{ord } A_{ij} \leq n_i - n_j + 1$ $\phi = P$ の F-order とする。

命題 (1.2.4) $(\lambda - A^{(0)}(0, x, \xi))$ の (i, j) 小行列式を $\Delta_{ij}(\lambda; x, \xi)$, $\deg_\lambda \Delta_{ij}$ を λ についての次数, $l = \text{matrix の size}$ とする。この時

$$l - \deg_\lambda \Delta_{ij} \geq n_i - n_j + 1$$

(証明) $\mathbb{S}_l$ を l 次置換群とする。 $\pi \in \mathbb{S}_l, \pi(i) = j$ なる π に対し

$$P_\pi(\lambda, x, \xi) = \prod_{k \neq i} (\lambda \delta_{k, \pi(k)} - A_{k, \pi(k)}^{(0)}(0, x, \xi)) \quad \text{とおく。} \quad \Delta_{ij} = \sum_{\pi \in \mathbb{S}_l, \pi(i) = j} \text{sgn } \pi P_\pi(\lambda, x, \xi)$$

故、任意の $\pi \in \mathbb{S}_l, \pi(i) = j$ に対し $l - \deg_\lambda P_\pi(\lambda, x, \xi) \geq n_i - n_j + 1$ を示せば良い。

$P_\pi = 0$ ならば、 $\deg_\lambda P_\pi = -\infty$ 故必ず成立。 $P_\pi \neq 0$ と仮定する。

i) $i = j$ の場合。 $\deg_\lambda P_\pi \leq l - 1$ は常に成立故 $l - \deg_\lambda P_\pi \geq 1 = n_i - n_j + 1$,

ii) $i \neq j$ の場合。 π は巡回置換の積に書ける。 i, j を結ぶ巡回置換の長さを m , $(j = j_1, j_2, \dots, j_m = i)$ $\pi(j_\nu) = j_{\nu+1}$ とする。この時、

$\deg_\lambda P_\pi \leq l - m$ 故から $l - \deg_\lambda P_\pi \geq m$, 一方 $P_\pi \neq 0$ 故、かつ P_π は $A_{j_\nu j_{\nu+1}}^{(0)}(0, x, \xi)$ ($1 \leq \nu \leq m-1$) を因子にもつ。従って $A_{j_\nu j_{\nu+1}}^{(0)}(0, x, \xi) \neq 0$, 所で Fuchs

系の定義より $\text{ord } A_{ij}(0 \times D_k) \leq \min(n_i - n_j + 1, 0)$ 故にもし $n_{j_0} - n_{j_{m+1}} + 1 \leq -1$ ならば $A_{j_0 j_{m+1}}^{(0)}(0 \times \xi) \equiv 0$ となり矛盾. 従って $n_{j_0} - n_{j_{m+1}} \geq -1$ を得る.
 $j_1 = j, j_m = i$ であるから, $n_i - n_j + 1 = (n_{j_m} - n_{j_{m-1}}) + \dots + (n_{j_2} - n_{j_1}) + 1 \leq (m-1) + 1 = m$. 故に $\ell - \deg P_k \geq m \geq n_i - n_j + 1$ を得る. g.e.d.

$P(m; x D_k) = (P_{ij}(m; x D_k))$ の各成分が次の性質をもつ時 $T(\rho)$ を満すと言う. ($\rho \geq 0$). $T(\rho): P_{ij} = \max(0, \text{ord } P_{ij}), N_{P_{ij}}^\omega(P_{ij}(m), \lambda) \leq \frac{M}{m P_{ij} + \rho}$
 (但し ω, λ, M は m に無関係).

この $T(\rho)$ について次が成り立つ事は明らかであろう.

1) $P(m)$ が $T(\rho)$, $Q(m)$ が $T(\rho)$ を満す $\Rightarrow P(m)Q(m)$ は $T(\rho + \rho)$ を満す行列の有限和.

2) $0 \leq k \leq \rho$. P の各成分は高々 k 階以下, $Q(m)$ は $T(\rho)$ を満す. $\Rightarrow P Q(m), Q(m) P$ は $T(\rho - k)$ を満す行列の有限和.

命題 (1.2.5) $(m - A(0 \times D_k))^{-1}$ は $m \gg 1$ で存在する. $C = \begin{bmatrix} D_n^{n_1} & & \\ & D_n^{n_2} & \\ & & \ddots \\ & & & D_n^{n_\ell} \end{bmatrix}$
 とおく. この時 $C^{-1}(m - A(0 \times D_k))^{-1}C$ は性質 $T(1)$ をもつ.

行列の有限和となる.

(証明). $A(0 \times D_k) = A^{(0)}(0 \times D_k) - \tilde{A}(0 \times D_k)$. $-\tilde{A}(0 \times D_k) = \sum_{j \leq 0} A^{(j)}(0 \times D_k)$ とおく.
 $(m - A^{(0)}(0 \times D_k))^{-1} = B(m, x D_k)$. $\tilde{A}(0 \times D_k) B(m, x D_k) = R(m, x D_k)$ とおく. この時 $(m - A(0 \times D_k))^{-1} = B(m, x D_k) \sum_{k=0}^{\infty} R(m, x D_k)^k$ と書ける. 次の i) ii) iii) を示せば十分であろう.

i) $\bar{C}^T B(m \times D) C$ は性質 T(1) をもつ. 実際, $B(m) = (B_{ij}(m))$ とおく. $\bar{C}^T B(m) C$ の (i, j) 成分 $= \bar{D}_n^{n_i} B_{ij}(m) D_n^{n_j}$ だから, その order $\leq n_j - n_i$. 故に $p_{ij} = \max(0, n_j - n_i)$ とおく時 $N_{p_{ij}}^\omega(\bar{D}_n^{n_i} B_{ij}(m) D_n^{n_j}; \lambda) \leq \frac{M}{m^{p_{ij}+1}}$ を示せばよい. 所で左辺 $\leq M_1 N_0^\omega(B_{ij}(m); \lambda) \leq M_1 \frac{M_2}{m^{\ell - \deg \Delta_{ji}}} (\because B_{ij}(m \times \xi) = \Delta_{ji} / \det(m - A^{(0)} \otimes \xi))$ 故). 命題 (1.2.4) より $\ell - \deg \Delta_{ji} \geq n_j - n_i + 1$. また $\deg \Delta_{ji} \leq \ell - 1$ だから $\ell - \deg \Delta_{ji} \geq \max(n_j - n_i + 1, 1) = p_{ij} + 1$. 故に $\frac{1}{m^{\ell - \deg \Delta_{ji}}} \leq \frac{1}{m^{p_{ij}+1}}$ となり (i) が示された.

ii) $\bar{C}^T R(m) C$ は性質 T(0) をもつ行列の有限和. 実際, $\text{ord } \tilde{A}_{ij} \leq n_i - n_j + 1$ だから $\bar{C}^T \tilde{A} C$ の各成分は高々 1 階. $\bar{C}^T B(m) C$ は T(1) を満す. 従って, $\bar{C}^T R(m) C = (\bar{C}^T \tilde{A} C)(\bar{C}^T B(m) C)$ は性質 T(0) をもつ行列の有限和.

iii) 十分大きな k_0 に対し, $\bar{C}^T (\sum_{k \geq k_0} R(m)^k) C$ は性質 T(0) をもつ. 実際 k_0 を十分大きくすると $\bar{C}^T (\sum_{k \geq k_0} R(m)^k) C$ の各成分は 0 階以下. 評価が m に一様にとれるのは明らか故 T(0) を満す.

以上 (i) (ii) (iii) より $\bar{C}^T (m - A^{(0)} \otimes D)^{-1} C$ が T(1) をもつ行列の有限和となる事は, PK の D より明らか. g.e.d.

命題 (1.2.5) より $\bar{C}^T (m - A^{(0)} \otimes D)^{-1} C$ は次の様に分解できる.

i) $\bar{C}^T (m - A^{(0)} \otimes D)^{-1} C = S^{(0)}(m \times D) + \cdots + S^{(d-1)}(m \times D)$. ここで $S^{(i)}(m \times D)$ の各成分は高々 i 階以下. (d は P の F-order)

ii) $N_i^\omega(S^{(i)}(m); \lambda) \leq \frac{M}{m^{i+1}}$.

今, $A(t \times D)$ を t について Taylor 展開して $\sum_{k=0}^{\infty} t^k A_k(x \times D)$ と書き.

$X_k^{(i)}(m) = S^{(i-1)}(m, xD_k) \bar{C}^T A_k(xD_k) C \quad 1 \leq i \leq A, k \in \mathbb{Z}_+, m \gg 1$ とおく. $\bar{C}^T A_k C$ の各成分が 1 階以下である事に注意すれば $\{X_k^{(i)}(m)\}$ は命題 (1.2.2) の条件 1) 2) を満す. つまり

1) $X_k^{(i)}(m, xD_k)$ は高々 i 階以下の $\mathbb{D}, \mathbb{Q}_p$,

2) $N_i^{(i)}(X_k^{(i)}(m); \lambda) \leq \frac{MB^k}{m^i} \quad \text{for } \exists \lambda > 0, M > 0, B > 0,$

これを使って §1.1 の基本解の評価を得る事ができる. 実際

(定理 (1.1.4) の証明). i) $W_j(t \times D_k) \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{2})$ の証明: $W_j = \sum_{\ell=1}^{\infty} t^{\ell-1} G_{\ell}(x D)$ とおく時 G_{ℓ} は次の漸化式をみたす. $(n_0 + \ell - A_0) G_{\ell} = A_{n_0 + \ell - j} + \sum_{m=1}^{\ell} A_m G_{\ell-m}$. 故に W_j はともかく $W_j = \sum_{\ell=1}^{\infty} t^{\ell-1} W_{j,\ell}(t \times D_k) (n_0 + \ell - A_0)^{-1} A_{n_0 + \ell - j}$ なる形に書ける. $W_{j,\ell}(t \times D_k) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k H_{k,\ell}(x D_k)$ とおくと $H_{k,\ell}$ は次の漸化式を満す. 1) $H_{0,0} = 1$. 2) $(n_0 + \ell + k - A_0) H_{k,\ell} = \sum_{m=1}^k A_m H_{k-m,\ell} + A_k$, 故に $\tilde{X}_k(m) = (n_0 + \ell + m - A_0)^{-1} A_k$ とおいた時 1) 2) は形式的 FCK 級数の漸化式を示している. p. ここで上で構成した $\{X_k^{(i)}(m)\}$ を使うと,

$$W_{j,\ell} = 1 + R(C, T(n_0 + \ell) \{X_k^{(i)}(m)\} \bar{C}^T : t \times D_k)$$

と書ける. 命題 (1.2.2) より $W_{j,\ell} \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{2})$ であり. 注意 (1.2.3) よりその評価は ℓ に依存しない. 一方 $(n_0 + \ell - A_0)^{-1} A_{n_0 + \ell - j} = C \sum_{i=1}^A X_{n_0 + \ell - j}^{(i)}(n_0 + \ell) \bar{C}^T$ であり. $p = \max |n_i - n_j|$ とおく時. $N_{i+2p}(C X_{n_0 + \ell - j}^{(i)}(n_0 + \ell) \bar{C}^T; \lambda) \leq \frac{MB^{n_0 + \ell - j}}{(n_0 + \ell)^i}$ なる評価をもつ. 従って, $\bar{B}^{\ell} (n_0 + \ell - A_0)^{-1} A_{n_0 + \ell - j}$ も ℓ に無関係な評価をもつ.

$$W_j = \sum_{\ell=1}^{\infty} B(Bt)^{\ell-1} [W_{j,\ell} \bar{B}^{\ell} (n_0 + \ell - A_0)^{-1} A_{n_0 + \ell - j}]$$

であり, $[\quad]$ 内は ℓ に無関係な評価をもち $\in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{2})$, また $\sum_{\ell=1}^{\infty} (Bt)^{\ell-1}$

は $Bt < 1$ で収束し結局 $W_j(t \times D_k) \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{\alpha})$ を得る.

ii) $R_F \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{\alpha})$ の証明. $R_F = \sum_{\ell=n_0+1}^{\infty} t^\ell R_\ell F_\ell$ はる形に書け. 更に,
 $R_\ell = R(CT(\ell)\{X_k^{\psi(m)}\}C^{-1}; t \times D_k)(\ell - A_0)^{-1}$ と書ける. 故に $R_\ell \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{\alpha})$
 で評価は ℓ に無関係. 一方 $\exists \alpha > 0$ をとると $\alpha^{-\ell} F_\ell$ は ℓ に無関係
 な評価をもつ. 故に $R_F = \sum_{\ell=n_0+1}^{\infty} (\alpha t)^\ell R_\ell \cdot \frac{1}{\alpha^\ell} F_\ell \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{\alpha})$ を得る. g.e.d.

§2. Fuchs 双曲系.

前節で Fuchs 系に対する形式的な基本解 $W(t \times D_k)$ を構成した.
 もし形式的に $E(t \times \gamma) = W(t \times D_k) \delta(x - \gamma)$ とおいたものが hyperfunction
 として意味付けできれば, それは hyperfunction 内での Cauchy 問
 題の基本解を与える事になる. その為には双曲型の条件を必
 要とする. 最初に幾つかの定義を述べておこう.

定義 matrix $P = tD_t - A(t \times D_k)$ が次の 1) 2) 3) を満す時 Fuchs 双曲系という.

- 1) $P = tD_t - A(t \times D_k)$ は, t に関し Volterra の意味で Fuchs 系.
- 2) $\hat{A}(t \times \xi) = (\sigma_{n_i - n_j + 1}(A_j)(t \times \xi))$ とおく時, $\det(t\tau - \hat{A}(t \times \xi)) = \lambda^\ell \hat{p}(t, x, \tau, \xi)$ と積の形に書ける. 但し $\ell = \text{matrix の size}$
- 3) $\hat{p}(t \times \tau, \xi) = 0$ の根について, (t, x, ξ) が実数 $\Rightarrow \tau$ も実数.

定義 m 階の微分作用素 $P(t \times D_t D_k)$ (単独高階) が, 次の 1) 2) 3)

を満たす時 $\text{weight}(m-k)$ の Fuchs 双曲型 (t に関し) という.

1) $P(t \times D_x D_x)$ は $\text{weight}(m-k)$ の Fuchs 型 (t に関し).

2) 主要表象 $\sigma_m(P) = t^k p_m(t \times \tau \xi)$ と積になっている.

3) $p_m(t \times \tau \xi) = 0$ の根 τ について $(t \times \xi)$ が実数 $\Rightarrow \tau$ も実数.

もし作用素が $(0, Fdx_{n\infty})$ の近傍での α, β の時は 3) の ξ も $(0, Fdx_{n\infty})$ の近傍に限定して考える. この時各々を Fuchs マイクロ双曲系, Fuchs マイクロ双曲型と呼ぶことにする. なお $\text{weight } m$ の Fuchs 双曲型は普通の双曲型である事に注意しよう.

本節では実領域の解析を行なうので $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $z = x + iF\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$ とする. まず §2.1 で $E(t, x, y) = W(t \times D_x) \delta(x - y)$ に hyperfunction としての意味付けを与え Cauchy 問題の基本解を構成する. §2.2 では, 単独 Fuchs 双曲型の hyperfunction solution の構造を調べる. 具体的には, 局所可解性や斉次解の構造についてである.

§2.1. Fuchs 双曲系の Cauchy 問題の基本解.

最近 柏原-河合 [4] によって展開された方法を我々の場合に適用してゆく. 実変数と複素変数を区別する為, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $z, w \in \mathbb{C}^n$, $\xi = \eta + iF\tilde{\xi} \in \mathbb{C}^n$, $\xi^0 = (0, \dots, 0, 1)$ とおく. また, $\Phi_j(x_w) = \frac{1}{2\pi i F} \cdot \frac{j!}{(-x_w)^{j+1}}$ (for $j \geq 0$) $= -\frac{1}{2\pi i F} \frac{x_w^{j-1}}{(j-1)!} (\log(-x_w) - \psi(j))$ (for $j < 0$) とおく. 但し $\psi(j) = \text{digamma function}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ に対し $\Phi_\alpha(x) = \prod_{i=1}^n \Phi_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})$ とおく.

$P = tD_z - A(tzD_z)$ を $(0; dx_n)$ で定義された $\mathbb{A}D\mathcal{O}_p$ の Fuchs 系, $F(tzD_z)$ を $\mathbb{A}D\mathcal{O}_p$, $R(tzD_z)$ を $\frac{1}{s}$ 次形式的 $\mathbb{A}D\mathcal{O}_p$ とする. 次の式が成立つとする.

$$t \frac{\partial}{\partial t} R(tzD_z) - A(tzD_z)R(tzD_z) = F(tzD_z)$$

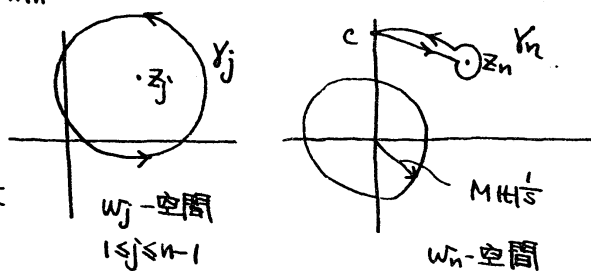
$A(tzD_z) = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(tz) D_z^{\alpha}$ とおく時, $A(tzD_z)$ は $L(tz\omega) \equiv \sum_{\alpha} A_{\alpha}(tz) \Phi_{\alpha}(z-\omega)$ を積分核とする積分作用素となる. 一方 $F(tzD_z) = \sum_j F_j(tzD_z)$, $R(tzD_z) = \sum_j R_j(tzD_z)$ とおき, $H(tz\eta) = \sum_j F_j(tz\eta) \Phi_j(\langle z, \eta \rangle)$, $G(tz\eta) = \sum_j R_j(tz\eta) \Phi_j(\langle z, \eta \rangle)$ とおく. $F(tzD_z)$ は $\mathbb{A}D\mathcal{O}_p$ 故, $H(tz\eta)$ は $\{(tz\eta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n; t \in \mathbb{C}, |z| \in \mathbb{C}, |\eta| < \varepsilon, |\eta| < \varepsilon, \langle z, \eta \rangle \neq 0\}$ で正則な多価函数. $R(tzD_z)$ は $\frac{1}{s}$ 次形式的 $\mathbb{A}D\mathcal{O}_p$ の増大条件を満たすから, $G(tz\eta)$ が $\{(tz\eta); t \in \mathbb{C}, |z| \in \mathbb{C}, |\eta| < \varepsilon, |\eta| < \varepsilon, |\langle z, \eta \rangle| > M|t|^{-\frac{1}{s}}|\eta|\}$ で正則な多価函数になることがわかる. この時次の命題が成り立つ.

命題 (2.1.1) 次の函数 $J(tz)$ は原点 $(0,0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ の近傍で正則である.

$$J(tz) = t \frac{\partial}{\partial t} G(tz\eta^0) - \oint_{Y_1 \times \dots \times Y_n} L(tz\omega) G(t\omega\eta^0) d\omega - H(tz\eta^0), \quad \eta^0 = (0, \dots, 0)$$

とおく.

但し積分路は右図の様
な路で共通の定義領域に
含まれるものとする.



更にもし P, F, R が微分 $\mathcal{O}_p$ (or 形式的) ならば $J(tz) \equiv 0$ である.

(証明) 柏原-河合 [4] を参照されたい. ここで $J(tz) = \frac{\partial}{\partial t} G(tz\eta^0) - \oint L(tz\omega) G(t\omega\eta^0) d\omega$ の場合に計算されているが, まったく同様

の計算が我々の場合も実行できる.

g.e.d.

$P = tD_t - A(t \times D_x)$ が Fuchs マイクロ双曲系の時, 条件 2)3) より "local Bochner's theorem" を使うと, $\exists M > 0$ s.t. $\{(t, z, \zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n; 0 < t < \delta, |z| < \delta, |\zeta| < \delta, |\zeta_n| > M(|y| + \sum_{j=1}^{n-1} |\operatorname{Im}(y_j/\zeta_j)|)\}$ 上で $\det(tD_t - \hat{A}(t, z, \zeta)) \neq 0$ となる. (但し $z = x + \sqrt{-1}y$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$). 更にもし $\hat{A}(t, z, \zeta)$ が巾零行列ならば $M=0$ にとれる. この事に注意すると次が成立つ.

命題(2.1.2) P が Fuchs マイクロ双曲系の時, $\exists \delta_1 < \delta, \exists M_1 \gg 1$ が存在して, $G(t, z, \zeta)$ は $\{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n; 0 < t < \delta_1, |z| < \delta_1, \operatorname{Im} z_n > M_1(|y| + \sum_{j=1}^{n-1} |\operatorname{Im} z_j|)\}$ で解析的となる. もし $\hat{A}(t, z, \zeta)$ が巾零ならば, $M_1=0$ にとることが出来る. (証明). 柏原-河合 [4] §4 の論法を我々の場合に移しかえればよい. $\hat{A}(t, z, \zeta)$ が巾零ならば $\det(tD_t - \hat{A}(t, z, \zeta)) = t^l t^l$ だから明らかである.

g.e.d.

以上を準備として Fuchs 双曲系の基本解を構成しよう.

定理(2.1.3) $P(t \times D_t, D_x) = tD_t - A(t \times D_x)$ を Fuchs 双曲系とする. その特性固有値 $\{n \in \mathbb{Z}; n > n_0 \geq 0\}$, $\lambda = P$ の F-order, $A(t \times D_x) = \sum_{i=0}^{\lambda} t^i A_i(x, D_x)$ とおく. この時次の条件を満たす超関数 $E_0(t \times \gamma), \dots, E_{n_0}(t \times \gamma)$ が存在する.

$$(1) P(t \times D_t, D_x) E_j(t \times \gamma) = \frac{1}{j!} (jt^j - \sum_{i=0}^{n_0-j} t^{j+i} A_i(x, D)) \delta(x - \gamma) \quad 0 \leq j \leq n_0.$$

$$(2) \text{Supp } E_j(txy) \subset \{(txy) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; |x-y| \leq M|t|^{1/2}\}.$$

$$(3) S-S(E_j) \subset \{(txy); F_1(\tau dt + \langle \xi dx \rangle + \langle \eta dy \rangle) \in \infty\}; |x-y| \leq M|t|^{1/2}, |t| \leq M|t|^{1/2}|\xi|, |\tau| \leq M|\xi| \}.$$

$$(4) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^v E_j(txy)|_{t=0} = \delta_{jv} \delta(x-y) \quad 0 \leq v, j \leq n_0.$$

(証明) j を固定し $E_j(txy)$ を構成する. $\S 1$ で展開した形式的な意味で次の Cauchy 問題を考える.

$$\begin{cases} t \frac{\partial}{\partial t} W(tzD_z) - A(tzD_z) W(tzD_z) = \frac{1}{j!} (jt^j - \sum_{i=0}^{n_0-j} t^{j+i} A_i(zD_z)) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^v W(tzD_z)|_{t=0} = \delta_{jv} \cdot 1 \quad 0 \leq v \leq n_0. \end{cases}$$

data は系(1.1.5)の適合条件を満たす様に与えられているので $\hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{2})$ の中に一意的な解をもつ. それを $W(tzD_z) = \sum_{j=0}^{\infty} W_j(tzD_z) \in \hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{2})$ とおく. $G(tz\gamma) = \sum_j W_j(tz\gamma) \Phi_{n-1+k}(\langle z, \gamma \rangle)$, $\frac{1}{j!} (jt^j - \sum_{i=0}^{n_0-j} t^{j+i} A_i(zD_z)) = F(tzD_z) = \sum_k F_k(tzD_z)$ と齊次部分にわけて, $H(tz\gamma) = \sum_k F_k(tz\gamma) \Phi_{n-1+k}(\langle z, \gamma \rangle)$ とおく. すると $\gamma^0 = (0, \dots, 0, 1)$ とおくと命題(2.1.1)(2.1.2)が使える.

i) 命題(2.1.2)より $G(tz\gamma^0)$ は, $\{(tz) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n; 0 < |t| < \delta, |z| < \delta, \text{Im } z_n > M|t| (\sum_{i=1}^{n-1} |\text{Im } z_i|) \} \cup \{(tz) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n; |t| < \delta, |z| < \delta, |z_n| > M|t|^{1/2}\}$ で解析的. z に関し正則である. 従って $G(tz\gamma^0)$ を z に関し複素解析的パラメータとなる超函数とみなす時, 上の領域より $\text{Im } z_n > 0$ から実軸への境界値として超函数を定義できる. それを $u(t, x)$ とおく.

ii) 命題(2.1.1)より, 次が成り立つ.

$$t \frac{\partial}{\partial t} G(tz\gamma^0) - \oint L(tz\omega) G(t\omega\gamma^0) d\omega - H(tz\gamma^0) = 0.$$

これは積分路表示した時の超函数の積分の理論より次を意味

する. $t \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - A(t, x) D_x u(t, x) = \frac{1}{j!} (j t^j - \sum_{i=0}^{n-j} t^{j+i} A_i(x, D_x)) \Phi_{n-1}(\langle x, \gamma \rangle + i0)$

故に構成した超函数 $u(t, x)$ は, 次の 1)' 2)' 3)' を満たす.

$$1)' \quad P(t, x) D_t D_x u(t, x) = \frac{1}{j!} (j t^j - \sum_{i=0}^{n-j} t^{j+i} A_i(x, D_x)) \Phi_{n-1}(\langle x, \gamma \rangle + i0)$$

$$2)' \quad S-S(u(t, x)) \subset \{(t, x); \int_0^t (\tau dt + \langle \xi, dx \rangle) \in \infty\}; |x_n| \leq M |t|^{1/2}, |\xi| \leq M |t| |\xi_n|, |t| \leq M |\xi|$$

$$3)' \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^v u(t, x) \Big|_{t=0} = \delta_{jv} \Phi_{n-1}(\langle x, \gamma \rangle + i0),$$

所で $u(t, x)$ を構成する際 $\gamma = (0, \dots, 0, 1)$ に固定したが, P は微分作用素なので $|\gamma| = 1$ 全体で定義されている. 故に γ を動かせる. また $\Phi_v(\langle x, \gamma \rangle)$ の x についても動かして $\Phi_v(\langle x - y, \gamma \rangle)$ としても同様に実行できる. 従って, γ, x を動かして構成した超函数を $u(t, x, \gamma)$ とすると次の 1)'' 2)'' 3)'' を満足する.

$$1)'' \quad P(t, x) D_t D_x u(t, x, \gamma) = \frac{1}{j!} (j t^j - \sum_{i=0}^{n-j} t^{j+i} A_i(x, D_x)) \Phi_{n-1}(\langle x - y, \gamma \rangle + i0)$$

$$2)'' \quad S-S(u) \subset \{(t, x, \gamma); \int_0^t (\tau dt + \langle \xi, dx \rangle + \langle \xi, dy \rangle + \langle \rho, d\gamma \rangle) \in \infty\}; |x - y, \gamma| \leq M |t|^{1/2}; |t| \leq M |\gamma|, |y - \gamma_n \xi_n(x - y)| \leq M |t|^{1/2} |\xi_n|, |\xi - \xi_n \gamma_n' \gamma'| \leq M |t| |\xi_n|, |y + \gamma_n' \xi_n \gamma| \leq M |t| |\xi_n| \}$$

(詳しくは, 柏原・河合図参照).

$$3)'' \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^v u(t, x, \gamma) \Big|_{t=0} = \delta_{jv} \Phi_{n-1}(\langle x - y, \gamma \rangle + i0) \quad 0 \leq v \leq n.$$

そこで今超函数 $E_j(t, x, \gamma)$ を次の様に定義する.

$$E_j(t, x, \gamma) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{|\gamma|=1} u(t, x, \gamma) \omega(\gamma),$$

但し $\omega(\gamma) = \sum_{v=1}^n (-1)^{v-1} \gamma_v d\gamma_1 \wedge \dots \wedge d\gamma_{v-1} \wedge d\gamma_{v+1} \wedge \dots \wedge d\gamma_n$

ここで次の Radon 変換の公式を思い出そう.

$$\delta(x - y) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{|\gamma|=1} \Phi_{n-1}(\langle x - y, \gamma \rangle + i0) \omega(\gamma).$$

Radon変換の公式より $E_j(t; x, y)$ は次の 1) 2) 3) をみたす.

$$1) P(t; x, D_x) E_j(t; x, y) = \frac{1}{j!} (j! t^j - \sum_{i=0}^{n_0-j} t^{i+j} A_i(x, D)) \delta(x-y)$$

$$2) S-S(E_j) \subset \{ (t; x, y) : F(\|x\| + \langle \xi, dx \rangle + \langle \eta, dy \rangle) \omega : |x-y| \leq M \|t\|^{\frac{1}{2}}, |x+y| \leq M \|t\|^{\frac{1}{2}}, |t| \leq M |\xi| \}$$

$$3) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^v E_j(t; x, y) \Big|_{t=0} = \delta_j^v \delta(x-y) \quad 0 \leq v \leq n_0.$$

最後に $\text{Supp } E_j(t; x, y) \subset \{ (t; x, y) : |x-y| \leq M \|t\|^{\frac{1}{2}} \}$ を示せば証明は完了する. まず $|x-y| \neq 0$ の時次の a) b) が成立つ事に注意しよう.

(a) $|x-y| \neq 0$ の時.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_j(t; x, D_x) \int_{|\eta|=1} \frac{\omega(\eta)}{(\langle x-y, \eta \rangle + i\varepsilon)^{n+j}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\eta|=1} \frac{W_j(t; x, \eta)}{(\langle x-y, \eta \rangle + i\varepsilon)^{n+j}} \omega(\eta) = 0.$$

(b) $|x-y| \neq 0$ の時.

$$\left| \int_{|\eta|=1} \frac{W_j(t; x, \eta)}{(\langle x-y, \eta \rangle + i\varepsilon)^{n+j}} \omega(\eta) \right| \leq C_\delta \frac{(M \delta^{\frac{1}{2}})^j}{\delta!} \cdot \frac{A}{(|x-y|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}(n+j)}}.$$

(但し A は定数).

(a) はよく知られている. (b) は積分路変更による. 実際 $|x-y| = r$,

$(x-y) = (r, 0, \dots, 0)$ と回転しておく. (b) の積分は次の様に書ける.

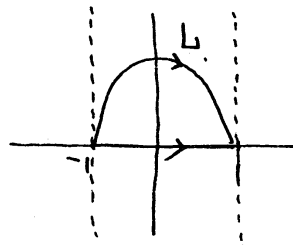
$$\int_{|\eta|=1} \frac{W_j(t; x, \eta)}{(r \cdot \eta_1 + i\varepsilon)^{n+j}} \omega(\eta) = \int_{-1}^1 \frac{d\eta_1}{(r \eta_1 + i\varepsilon)^{n+j}} \int_{|\eta'|=\sqrt{1-\eta_1^2}} R_j(t; x, \eta, \eta') \omega(\eta')$$

左辺の η_1 に注目すると被積分項は $-1 < \text{Re } \eta_1 < 1$, $\eta_1 \neq -\frac{i\varepsilon}{r}$ で正則と

なる. 故に $-1 \rightarrow 1$ の積分路を右図の L の

様に変更すると

$$= \int_L \int_{|\eta'|=\sqrt{1-\eta_1^2}} \frac{R_j(t; x, \eta, \eta')}{(r \eta_1 + i\varepsilon)^{n+j}} d\eta_1 \omega(\eta')$$



この式で絶対値をとれば (b) を得る. (a) (b) を使って, $(txy), |x-y| > M|t|^{1/2}$ ならば $E_j(txy) = 0$ となる事を導びこう.

$$I_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi F)^{n-1}} \int_{|\eta|=1} \left\{ \sum_j W_j(tx\eta) \Phi_{n-1+j}(\langle x-y, \eta \rangle + i\varepsilon) \right\} \omega(\eta).$$

$$\tilde{I}_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi F)^{n-1}} \sum_j W_j(tx D_x) \int_{|\eta|=1} \Phi_{n-1}(\langle x-y, \eta \rangle + i\varepsilon) \omega(\eta)$$

とおく.

$\varepsilon > M|t|^{1/2}$ の時, I_ε の被積分項は絶対収束する. 従って項別積分により $I_\varepsilon = \tilde{I}_\varepsilon$, 解析函数 ($\varepsilon > 0$) の一致の定理より $\varepsilon > 0$ で $I_\varepsilon = \tilde{I}_\varepsilon$. 故に $E_j(txy) = [\tilde{I}_\varepsilon \text{ の } \varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0 \text{ の境界値として定義される超函数}]$ となる. $|x-y| > M|t|^{1/2}$ ならば (b) より $\tilde{I}_\varepsilon$ は絶対収束して $\varepsilon = 0$ も含めて近傍で収束 ($|x-y|^2 + \varepsilon^2 > M|t|^{1/2}$ 故). 故に $\tilde{I}_\varepsilon$ の $\varepsilon \rightarrow 0$ の境界値 $= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{I}_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi F)^{n-1}} \sum_j \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_j(tx D_x) \int_{|\eta|=1} \Phi_{n-1}(\langle x-y, \eta \rangle + i\varepsilon) \omega(\eta) = 0$. が (a) より得られる. 故に $|x-y| > M|t|^{1/2}$ ならば $E_j(txy) = 0$ となり $\text{Supp } E_j(txy) \subset \{|x-y| \leq M|t|^{1/2}\}$ を得る. g. e. d.

系(2.1.4) P を Fuchs 双曲系, 特性固有値 $\{n \in \mathbb{Z} : n > n_0 \geq 0\}$ とし, 次の Cauchy 問題を考える.

$$P(tx D_x) u(tx) = 0, \quad S-S(u) \in (0, \pm F dt \infty), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^v u(tx) \Big|_{t=0} = u_v(x), \quad 0 \leq v \leq n_0.$$

この Cauchy 問題が, 超函数 $u_0(x), \dots, u_{n_0}(x)$ に対して超函数解 $u(tx)$, s.t. $S-S(u) \in (0, \pm F dt \infty)$ を持つ為の必要十分条件は次の (*) を満す事である. (*) $0 \leq l \leq n_0, \quad (l - A_0) \cdot u_l / l! = \sum_{i=1}^l A_i u_{l-i} / (l-i)!$

(但し $A(tx D_x) = \sum t^n A_n(x D)$ とする.)

(証明). data $u_\nu(x)$ が (*) を満す時定理の基本解 $E_j(t, x, y)$ を使うと、
 解 $u(t, x)$ が $u(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \int E_j(t, x, y) u_j(y) dy$ と書ける。次に Cauchy 問題
 の解 $u(t, x)$ が存在する時、 $Pu=0$ より $(\frac{\partial}{\partial t})^p Pu=0$ 従って $(\frac{\partial}{\partial t})^p (Pu)|_{t=0}=0$
 を得る。具体的に $(\frac{\partial}{\partial t})^p (Pu)|_{t=0}=0$ を表示すると、これは関係式 (*)
 に他ならない。 g. e. d.

以上 matrix の場合について述べて来たが、単独の場合は matrix
 に帰着できる。従って、Fuchs 双曲型についても同様の結果を得
 る。念の爲、定理の形で述べておこう。

定理 (2.1.5) $P(t, x, D_x)$ を weight $(m-k)$ の Fuchs 双曲型。 $P(\lambda, 0) \neq 0$ for
 $\lambda \geq m-k$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ とする。 $\lambda = \min(m, k+1)$ 。この時次の条件を満た
 す超函数 $E_0(t, x, y), \dots, E_{m-k-1}(t, x, y)$ が存在する。

- 1) $P(t, x, D_x) E_\nu(t, x, y) = 0 \quad 0 \leq \nu \leq m-k-1,$
- 2) $\text{Supp } E_\nu(t, x, y) \subset \{(t, x, y) : |x-y| \leq M|t|^{\frac{1}{\alpha}}\}$
- 3) $S-S(E_\nu) \subset \{(t, x, y) : \sqrt{t} \in (T, E, \gamma)^\infty : |x-y| \leq M|t|^{\frac{1}{\alpha}}, |t+\gamma| \leq M|t|^{\frac{1}{\alpha}}|t|, |t| \leq M|t|\}$
- 4) $(\frac{\partial}{\partial t})^j E_\nu(t, x, y)|_{t=0} = \delta_j \delta(x-y) \quad 0 \leq j, \nu \leq m-k-1,$

(証明). 定理 (1.1.7) の様に matrix 表示する。 $t \cdot W(t, x) = 0$, $S-S(W) \neq (0, \pm \sqrt{t} dt)$
 ならば $W(t, x) = 0$ である事に注意すれば良い。 g. e. d.

系 (2.1.6) (2.1.5) の仮定のもとで次の Cauchy 問題を考える。

$$P(t \times D_t D_x) u(t, x) = 0 \quad S-S(u) \in (0, \pm F dt \infty), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^v u(t, x)|_{t=0} = u_0(x), \quad 0 \leq v \leq m-k-1.$$

Cauchy 問題は、任意の超関数 $u_0(x), \dots, u_{m-k-1}(x)$ に対し、超関数解 $u(t, x)$ が、

$S-S(u) \in (0, \pm F dt \infty)$ を必ず持つ。

(証明). 明らか. $u(t, x) = \sum_{j=0}^{m-k-1} \int E_j(t, x, y) u_j(y) dy.$ q. e. d.

上の議論全体は、 P が $(0, dx \infty)$ で $\square D_t \mathcal{O}_p$ の場合も、“超関数”の所を“microfunction”に変えれば全て成立つ、つまり、microfunction 枠内でも Cauchy 問題は基本解を構成できる。

§2.2. Fuchs 双曲型方程式の超関数解の構造.

本節では $P(t \times D_t D_x)$ が Fuchs 双曲型 (for t) の時、次の完全列の内容を調べてゆきたい.

$$0 \rightarrow \ker P \rightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{P} \mathcal{B} \rightarrow \operatorname{Coker} P \rightarrow 0.$$

weight 0 の Fuchs 双曲型は普通の双曲型故 $\ker P \cong \mathcal{B}^m$ ($\mathcal{B}$ は x -変数のみの超関数), $\operatorname{Coker} P = 0$ である事に注意しよう.

$P(t \times D_t D_x)$ を weight $(m-k)$ の Fuchs 双曲型, $\tilde{P} = t^{-k} P$ とおく時、 $\tilde{P}$ は $\{t=0\}$ に特異点をもつ有理型関数を係数にもつ. ここで一般に、 P を有理型関数を係数とする m 階微分作用素とする時、

$D_t P$ が $\{t=0\}$ に関し non-characteristic とは、 $\sigma_m(p)(x, d\varphi)$ が正則であって、かつ $\neq 0$ なる事.

2) P が $d\varphi$ 方向に双曲型とは $\sigma_m(p)$ が正則で、かつ $d\varphi$ 方向に $\sigma_m(p)$ が双曲型なる事、

と呼ぶ事にしよう。この時 Bony-Schapira [6] [7] で展開された議論は上の 1) 2) の形の微分作用素迄。精密化する事ができる。簡単にその辺をスケッチしてみよう。

$x \in \mathbb{R}^n$ もの複素化 $z \in \mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n$ と $\mathbb{R}^{2n}$ とを内積 $\langle z, \zeta \rangle = \sum z_i \bar{\zeta}_i \mapsto \operatorname{Re} \langle z, \zeta \rangle$ によって同一視する。 Γ を開凸錐, $B(0, \varepsilon)$ を原点中心、半径 ε の開球体, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cap B(0, \varepsilon)$ と書く。 I を $(2n-1)$ 次元球面上の凸 proper 開部分集合, U を $\mathbb{C}^n$ の開集合, ∂U をその境界とする。 U の境界の点 $z_0 \in \partial U$ で性質 $C(z_0, I)$ をもつとは次の条件を満す事をいう。

$C(z_0, I)$: 任意の近傍 $I' \supset I$ に対し或る近傍 $V \ni z_0$, $\varepsilon > 0$ が存在して $V \cap U + \Gamma'_\varepsilon \subset U$ となる。 (Γ' は I' の polar の内部)

命題 (2.2.1) $P(z, D_z)$ を ∂U 及び U の外部にのみ特異点を許す m 階微分作用素とし、次の 1) 2) を満たすとする。

1) 開集合 U は $z_0 \in \partial U$ で性質 $C(z_0, I)$ をもつ。

2) P は z_0 で I 方向に non-characteristic

この時任意の z_0 の近傍 V に対し、或る近傍 W :

$V \supset W \ni z_0$ が存在して次の性質をもつ。つまり

* $\forall f(z) \in \mathcal{O}(U \cap V)$, $\exists u(z) \in \mathcal{O}(U \cap W)$ s.t. $Pu = f$ on $U \cap W$.



系(2.2.2) $P(zD_z)$ を m 階微分作用素とし次の 1) 2) 3) を満たす.

- 1) $\sigma_m(P) = \varphi(x) p_m(x, \xi)$ は積の形に書ける.
- 2) $p_m(x, \xi)$ は $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 方向に non-characteristic i.e. $p_m(0, \xi^0) \neq 0$
- 3) φ の複素化を $\tilde{\varphi}$ とする時, $\tilde{\varphi}(z) \neq 0$ on $\{z = x + i\gamma; x \in \mathbb{C}^n; |x| < \varepsilon, \gamma = t\xi^0; 0 < t < \varepsilon\}$.

この時, $P(xD_x): C_{(0, \infty)}^{\infty} \rightarrow C_{(0, \infty)}^{\infty}$ は全射である.

(系の証明) $\xi^0 = (0, \dots, 0, 1)$ とする. 任意の $\mu \in C_{(0, \infty)}^{\infty}$ をとる. $\mathbb{C}$ の flabbiness より $\exists f \in \mathcal{B}$ s.t. $\text{sp}(f) = \mu$ とする. ここで f は $U_\varepsilon = \{z = x + i\gamma; |x| < \varepsilon, |\gamma| < \varepsilon, |x| + \dots + |\gamma_{n-1}| < M\gamma_n, 0 < M < 1\}$ 上の正則函数 $\tilde{f}(z)$ の境界値として実現できる. M を十分小さくとり I を ξ^0 に十分近い方向の集合をとると, U_ε は原点 $0 \in \partial U_\varepsilon$ で性質 $C(0, I)$ をもつ. 一方 $\tilde{P} = \frac{1}{\varphi} P$ は U_ε 上に singularity をもたない. (local Bochner's theorem による) 故に命題(2.2.2)より領域を縮めれば $\tilde{P}(zD_z)\tilde{u}(z) = \frac{1}{\varphi(z)}\tilde{f}(z)$ は $U_\varepsilon' (\varepsilon' < \varepsilon)$ で解 $\tilde{u}(z)$ をもつ. $\tilde{u}(z)$ の境界値の決める超函数を $u(x)$ とすると $Pu = f$ とする. 故に $P \cdot \text{sp}(u) = \text{sp}(f) = \mu$ とはなり全射がいえた. *g.e.d.*

特異点をもつ作用素 P の双曲型についても次の形にまとめられる. $\mathbb{C}^n \ni z = x + i\gamma, \xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, B(x, r) \subset \mathbb{R}^n, B(x, r) = B(x, r) \cap \{x, \xi^0\} = 0\}$ と書く. $K(a, \delta)$ を $B(0, a)$ と $a\delta\xi^0$ との $\mathbb{R}^n$ の中で開凸包, $\Gamma' = \{\gamma \in \mathbb{R}^n; \langle \gamma, \xi^0 \rangle = 0 \text{ 平面内の開凸錐}\}$ Γ を $\mathbb{R}^n$ 内の開凸錐とする.

命題 (2.2.3) $P(\alpha D_k)$ を原点での微分作用素 (特異点を許す).

1) $\overline{B(0, r)}$ の各点で ξ^0 方向に双曲型.

2) $P(z, D_k)$ の低階の特異点は $\{z \in \mathbb{C}^n; \langle z, \xi^0 \rangle = 0\}$ に含まれる.

この時次の性質をみたす $\delta > 0$ が存在する.

* $0 < a < 1$, $f(z) \in \mathcal{O}(B(0, a) + \sqrt{1-\epsilon} \Gamma'_\epsilon)$ か Γ' を含む Γ_1 に対し $P(z, D_k)f$

$(z) \in \mathcal{O}(\{K(a, \delta) + \sqrt{1-\epsilon} \Gamma_{1, \epsilon}\} \setminus \{\langle z, \xi^0 \rangle = 0\})$ ならば, Γ を適当に取ると

$\Gamma_2 \supset \Gamma'$ にとりかえて $f(z) \in \mathcal{O}(K(a, \delta) + \sqrt{1-\epsilon} \Gamma_{2, \epsilon})$ とできる.

命題 (2.2.1) (2.2.3) の証明は Bony-Schapira [6], [7] と同じなので省略する. 両命題に定理 (1.1.7) を合わせると再び Cauchy 問題の解の存在を得る.

定理 (§2.2.4) P を weight $(m-k)$ の Fuchs 双曲型, $\mathcal{C}(1,0) \neq 0$ for $\lambda \in \mathbb{Z}$,

$\lambda \geq m-k$ とする. この時次の Cauchy 問題

$$\begin{cases} P \cdot u(t, x) = f(t, x), & S-S(f) \notin (0, \pm \sqrt{1-\epsilon} dt \otimes \infty), \\ S-S(u) \notin (0, \pm \sqrt{1-\epsilon} dt \otimes \infty), & \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^v u(t, x) \Big|_{t=0} = u_v(x) \quad 0 \leq v \leq m-k-1 \end{cases}$$

は, 任意の data $f(t, x), u_0(x), \dots, u_{m-k-1}(x)$ に対し解 $u(t, x)$ を必ずもつ.

(証明). Bony-Schapira [7] とまったく同様にできる g.e.d.

定理 (2.2.5) (2.2.4) の仮定のもとでは $P: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{CB}$ は全射である.

つまり局所可解性が成り立つ.

(証明) 系(2.2.2)より, $P: C_{(0, \pm Fdt\infty)} \rightarrow C_{(0, \pm Fdt\infty)}$ は全射である. 故に $\forall f \in B$ に対し適当な $v \in B$ をとって $f = Pv$ について, $S-S(f-Pv) \neq (0, \pm Fdt\infty)$ とできる. (2.2.4)より $\exists u \in B$ s.t. $Pu = f - Pv$. 故に $P(u+v) = f$ とはり局所可解がいえる. g. e. d.

以上によって, $\text{Coker } P = 0$ が示された. 次に $\ker P$ の構造をしるべたい. その指針となるのは次の3つの完全列である.

$$\alpha^\pm B = \{u \in B, S-S(u) \neq (0, \pm Fdt\infty)\}, \quad \alpha B = \alpha^+ B \cap \alpha^- B$$

$$B(\pm)^P = \{t > 0 \ (t < 0) \text{ なる領域での解}\} \quad \text{とおく.}$$

命題(2.2.6). P を weight $(m-k)$ の Fuchs 双曲型 (for t). $C(\lambda, 0) \neq 0$ for $\lambda \gg m-k, \lambda \in \mathbb{Z}$ とする. この時次の2つは完全列となる.

$$1) \quad 0 \rightarrow \alpha B^P \xrightarrow{\alpha} \alpha^+ B^P \oplus \alpha^- B^P \xrightarrow{\beta} B^P \rightarrow 0,$$

$$2) \quad 0 \rightarrow \alpha B^P \xrightarrow{\alpha} B^P \xrightarrow{\beta} C_{(0, +Fdt\infty)}^P \oplus C_{(0, -Fdt\infty)}^P \rightarrow 0.$$

更に $\lambda \in \mathbb{Z}, \lambda \leq -1$ に対しても $C(\lambda, 0) \neq 0$ ならば, 次の完全列を得る.

$$3) \quad 0 \rightarrow B^P \xrightarrow{\alpha} B(+)^P \oplus B(-)^P \xrightarrow{\beta} B^{m-k} \rightarrow 0.$$

(証明). 1) の証明. β が全射なる事のみいえばよい. C の flabbiness より, $u \in B^P$ は $u = u_+ - u_-$, $u_\pm \in \alpha^\pm B$ と表わせる. $Pu = 0$ 故 $Pu_+ = Pu_- = f \in \alpha B$. 定理(2.2.4)より $\exists w \in \alpha B, Pw = f$ となる. 故に, $P(u_\pm - w) = 0$, $u_\pm - w \in \alpha^\pm B$, $u = (u_+ - w) - (u_- - w)$ $\therefore \beta$ は全射.

2) の証明も 1) と同様に C の flabbiness と (2.2.4) より得られる.

3) の証明. P の形式的共役を P^* と書く時 $(-1)^m P^*$ も $\text{weight}(m-k)$ の Fuchs 型. その特性多項式を $\mathcal{E}^*(x, \lambda)$ とおく時, 次を得る.

$$(-1)^k \mathcal{E}^*(\lambda, x) = \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-m+k+1) \{(-\lambda-1)(-\lambda-2) \cdots (-\lambda-k) + a_1(\lambda)(-\lambda-1) \cdots (-\lambda-k+1) + \cdots + a_k(\lambda)\}.$$

従って, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \leq -1$, $\mathcal{E}(\lambda, 0) \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \geq m-k$, $\mathcal{E}^*(\lambda, 0) \neq 0$ となる. 定理 (1.1.7) より $0 \rightarrow {}'A^{m-k} \rightarrow A/S \xrightarrow{P^*} A/S \rightarrow 0$, ($S = \{t=0\}$) を得る. 小松河合 [8] の論法で双対をとると $0 \rightarrow \mathcal{H}_S^0(B) \xrightarrow{P} \mathcal{H}_S^0(B) \rightarrow {}'B^{m-k} \rightarrow 0$ を得る. これより $\alpha = \text{単射}$ なる事が示された. 更に小松河合 [8] と P の局所可解性より次を得ることは易しい.

$$b: (B(+)^P \oplus B(-)^P) / B^P \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_S^0(B) / P \mathcal{H}_S^0(B) \cong {}'B^{m-k}.$$

よって, 3) が証明された.

g. e. d.

命題 (2.2.6) より, $\text{Ker } P$ の研究は, $a^\pm B^P$, aB^P , $C_{(0, \pm F dt \infty)}^P$, $B(\pm)^P$ の研究に帰着される. 現在次の予想のもとに研究を進めているが, まだ詳しくは解明されていない. 詳細については今後の研究を待たれたい.

予想 1 B を x -変数超函数の芽とする時, $a^\pm B^P \cong {}'B^m$,

$$aB^P \cong {}'B^{m-k}, \quad C_{(0, \pm F dt \infty)}^P \cong {}'B^k, \quad B(\pm)^P \cong {}'B^m,$$

予想 2 上の 3 つの完全列は分解している.

予想 3 $Pu(x) = 0$, $S = S(\omega) \neq (0, \pm F dt \infty)$, $(\frac{\partial}{\partial t})^\nu u|_{t=0} = 0$ $0 \leq \nu \leq m-k-1$

ならば $u(x) \equiv 0$ である. (予想 3 と Cauchy 解の存在とから

$aB^P \cong {}^tB^{m-k}$ が出る事に注意しよう)。

$\sigma_m(p) = {}^tD_t^m$ の場合は上の予想は証明できる。その詳細を次節で述べてゆきたい。

§3. 巾零 Fuchs 系

佐藤・河合・柏原 [9] は、 $\sigma_m(p) = D_t^m$ の m 階 (擬) 微分作用素について、方程式 $Pu=0$ と $D_t^m u=0$ とが同値である事を証明している。これに対応する結果を我々の Fuchs 型の場合に導こう。 $\sigma_m(p) = {}^tD_t^m$ なる Fuchs 型に相当する matrix 表示は次の通りである。

1) $P = tD_t - A(t \times D_x)$ は Volenik の意味の Fuchs 系

2) $\hat{A}(t \times \tau \xi) = (\sigma_{n_i - n_j + 1}(A_{ij}))$ が巾零行列。

今後 1) 2) を満たす作用素を巾零 Fuchs 系と呼び、その標準形を求めてゆく。§31 では、方程式 $(tD_t - A(t \times D_x))u=0$ と $(tD_t - A(0 \times D_x))u=0$ とが同値である事を示す。§32 ではその応用として、Cauchy 解の一意性、 $aB^P \cong {}^tB^{m-k}$ 、 $a \pm B^P \cong {}^tB^m$ を $\sigma_m(p) = {}^tD_t^m$ の場合に証明する。

§31. 巾零 Fuchs 系の標準形

$(t, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. $P = tD_t - A(t \times D_x)$ を $(0, dx_{n+1}) \in \mathbb{C} \times P^* \mathbb{C}^n$ での $\Omega D, \mathcal{O}_p$ からなる巾零 Fuchs 系とする。 $(t, x', x_n) \rightarrow (e^{i\theta_1} t, x', e^{i\theta_2} x_n)$ と変換しても。

P はやはり巾零 Fuchs 系である事と命題 (2.1.2) の後半に注意すれば次の命題を得る.

命題 (3.1.1) $P=tD_t-A(t \times D_x)$ を巾零 Fuchs 系, $F(t \times D_x)$ を $\mathfrak{A}(D, \mathcal{O}_p)$, $R(t \times D_x)$ を 1 次形式的 $\mathfrak{A}(D, \mathcal{O}_p)$ とし次関係式を満たしているとする.

$$t \frac{\partial}{\partial t} R(t \times D_x) - A(t \times D_x) R(t \times D_x) = F(t \times D_x)$$

この時 $R(t \times D_x)$ は無限階の $\mathfrak{A}(D, \mathcal{O}_p)$ となる.

(証明) $G(t \times \eta) = \sum_j R_j(t \times \eta) \Phi(\langle x, \eta \rangle)$ とおく. (但し $R(t \times D) = \sum_j R_j(t \times D_x)$). $\eta^0 = (0, \dots, 0, 1)$ とおき上の注意と命題 (2.1.2) より $G(t \times \eta^0)$ は $\bigcup_{\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}} \{ (e^{i\theta_1} t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n; 0 < e^{i\theta_1} t < \delta, |x| < \delta, \operatorname{Im}(e^{i\theta_2} x_n) > 0 \} \sqcup \{ (tx) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n; |t| < \delta, |x| < \delta, |x_n| > M|t|^{\frac{1}{2}} \}$ で正則多価函数となる. 故に結局 $G(t \times \eta^0)$ は $\{ (tx) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n; |t| < \delta, |x| < \delta, x_n \neq 0 \}$ で正則. 所で定理 (2.1.3) の証明で注意した様に η^0 を動かしてもよい. 更に $\Phi(\langle x, \eta \rangle)$ の x も動かして $x-y$ とできる. 従って $\sum_{j=-\infty}^{\infty} R_j(t \times \eta) \Phi(\langle x-y, \eta \rangle)$ は $\{ (tx, y, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m; |t| < \delta, |x| < \delta, |y| < \delta, |x-y| < 1, |\eta - \eta^0| < 1, \langle x-y, \eta \rangle \neq 0 \}$ で正則となる. 今 $p = \langle y, \eta \rangle$ とおくと $\sum_{j=-\infty}^{\infty} R_j(t \times \eta) \Phi(\langle x, \eta \rangle - p)$ が $p \neq \langle x, \eta \rangle$ の領域で収束する事を意味する. この式は $\mathfrak{A}(D, \mathcal{O}_p)$ の定義そのものに他ならない.

g. e. d.

今 $(tx_1 \cdots x_\ell) = (tx') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\ell = \tilde{X}$, $(tx_1 \cdots x_\ell \cdots x_n y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m = \tilde{Y}$, $X = \{t=0\} \subset \tilde{X}$, $Y = \{t=0\} \subset \tilde{Y}$ とおく. (tx') に正則な holomorphic microfunction (又は

holomorphic hyperfunction) を $C_{X|Y} (B_{X|Y})$ とおく. この時 $\mathfrak{D}, \mathcal{O}_p$ (diff.op) は $C_{X|Y} (B_{X|Y})$ に作用し, $u(txy) \in C_{X|Y} (B_{X|Y})$ に対し $u|_{t=0} \in C_{X|Y} (B_{X|Y})$ となる. 従って, $C_{X|Y}, B_{X|Y}$ の中で, Cauchy 問題を考える事ができる. ($C_{X|Y}, B_{X|Y}$ 等の定義性質については佐藤河合, 柏原 [9] を参照されたい. 大雑把に言えば, $C_{X|Y}, B_{X|Y}$ は $\mathfrak{D}, \mathcal{O}_p$ により diff.op を積分作用素として表わした時, その積分核となる函数のつくる層である.)

定理 (3.1.2) $P=tD_t-A(txD_t)$ 巾零 Fuchs 系. 特性固有値 $\in \{n \in \mathbb{Z}, n > n_0 \geq 0\}$ とし, 次の Cauchy 問題を考える.

$$\begin{cases} Pu(txy) = f(txy), & u(txy), f(txy) \in C_{X|Y} \text{ (又は } B_{X|Y}). \\ (\frac{\partial}{\partial t})^v u(txy)|_{t=0} = u_v(xy), & 0 \leq v \leq n_0, \quad u_v(xy) \in C_{X|Y} \text{ (又は } B_{X|Y}). \end{cases}$$

この Cauchy 問題が $f(txy), u_0(xy) \cdots u_{n_0}(xy)$ に対して解をもつ為の必要十分条件は次の (※) を満たす事であり, その時解は一意的である. $A(txD_t) = \sum t^n A_n(xD_t)$ とする $f(txy) = \sum t^n f_n(xy)$,

$$(\ast) \quad \forall 0 \leq l \leq n_0, \quad (l-A_0) u_l / l! = \sum_{i=1}^l A_i u_{l-i} / (l-i)! + f_l.$$

(証明). $C_{X|Y} \otimes \mathcal{U}_{x,y}$ は $P(txD_tD_y)$ なる形の $\mathfrak{D}, \mathcal{O}_p$ 全体と一致し, $f(txy) \in C_{X|Y}$ は $f(txy) = P(txD_tD_y) \delta(x) \delta(y)$ なる形に一意的に書ける. 従って, 上の Cauchy 問題は $\mathfrak{D}, \mathcal{O}_p$ の Cauchy 問題 (8.1 の形) に書き直す事ができる. 8.1 の定理 (1.1.5) と命題 (3.1.1) より定理を得る. $B_{X|Y}$ についても同様.

g.e.d.

$P = tD_t - A(t \times D_x)$ を巾零 Fuchs 系とし. その特性固有値を $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ とする. $(00; dx_n - dy_n)$ で定義された $\ell^2 \times \ell^2$ matrix 変 $D, \mathcal{Q}_P$ を次の様に書く. $\otimes P(t \times \gamma D_x D_y) = tD_t - I_\ell \otimes A(t \times D_x) + A^*(0 \times \gamma D_y) \otimes I_\ell$.

$$P_\otimes(t \times \gamma D_x D_y) = tD_t - I_\ell \otimes A(0 \times D_x) + A^*(t \times \gamma D_y) \otimes I_\ell.$$

この時 $\otimes P, P_\otimes$ も巾零 Fuchs 系となり. その特性固有値は $\alpha_i - \alpha_j$ $1 \leq i, j \leq \ell$ となる. (但し $A^*(t \times \gamma) = (A_\gamma)^* = t(A_\gamma^*)$ とおく.)

従って, 定理 (3.1.2) と変 $D, \mathcal{Q}_P$ (diff op) が holomorphic microfunction (hyperfunction) を積分核とする積分作用素に他ならない事に注意すれば, 次の巾零 Fuchs 系の標準形を得る.

定理 (3.1.3) $P = tD_t - A(t \times D_x)$ を $(0, dx_n \infty)$ での巾零 Fuchs 系. 特性固有値の差 $\mathbb{Z} - \{0\}$ であるとする. この時, 可逆な変 $D, \mathcal{Q}_P$ の行列 $U(t \times D_x)$ が存在して, $(tD_t - A(t \times D_x))U(t \times D_x) = U(t \times D_x)(tD_t - A(0 \times D_x))$ が成立つ. 更に P が微分作用素なら $U(t \times D_x)$ も微分作用素となる. (証明). 最初に次の Cauchy 問題を考えよう.

$$(\tilde{e}_1) (tD_t - A(t \times D_x))U(t \times D_x) = U(t \times D_x)(tD_t - A(0 \times D_x)), \quad U(t \times D_x)|_{t=0} = 1_x.$$

こゝで $tD_t \cdot U(t \times D_x) = t \frac{\partial}{\partial t} U(t \times D_x) - U(t \times D_x) \cdot tD_t$ であるから $(\tilde{e}_1)$ とは

$$(\tilde{e}_1) \cdot t \frac{\partial}{\partial t} U(t \times D_x) - A(t \times D_x)U(t \times D_x) + U(t \times D_x)A(0 \times D_x) = 0, \quad U(t \times D_x)|_{t=0} = 1_x.$$

所で変 $D, \mathcal{Q}_P U(t \times D_x)$ とは, $K(t \times \gamma) d\gamma = (K_{ij}(t \times \gamma) d\gamma)$ はる積分作用素に他ならないから, Cauchy 問題 $(\tilde{e}_1)$ は holomorphic microfunction $K_{ij}(t \times \gamma)$ に関する Cauchy 問題に書き直すことができる. $(\tilde{e}_1)$ の (i, j)

成分を $K_{\mu\nu}(txy)dy$ を使って書き表わすと

$$t \frac{\partial}{\partial t} K_{ij}(txy)dy - \sum_{\nu} A_{i\nu}(txD_x) K_{\nu j}(txy)dy + \sum_{\mu} K_{i\mu}(txy)dy \cdot A_{\mu j}(0xD_x) = 0.$$

ここで $A_{\mu j}(0xD_x) = A_{\mu j}(0xD_x) \delta(x-y)dy = A_{\mu j}^*(0yD_x) \delta(x-y)dy$ だから

$$K_{i\mu}(txy)dy \cdot A_{\mu j}(0xD_x) = A_{\mu j}^*(0yD_x) K_{i\mu}(txy)dy$$

を得る. 今 $U(tx\gamma) = {}^t(K_{11}, K_{12}, \dots, K_{1l}, K_{21}, \dots, K_{le})$ とおき $(\hat{Q}_1)$ を $\mathbb{R}^2$ ベクトル

$U(tx\gamma)$ に関する方程式で表わすと上の成分表示より

$$t \frac{\partial}{\partial t} U(tx\gamma) - (I_l \otimes A(txD_x) - A^*(0yD_x) \otimes I_l) U(tx\gamma) = 0$$

となる. 故に $U_0(x\gamma) = {}^t(K_{11}^0, \dots, K_{le}^0)$, $K_{ij}^0 = \delta_{ij} \delta(x-\gamma)$ とおくと $(\hat{Q}_1)$ は,

$$(\hat{Q}_1) \otimes P(tx\gamma D_x D_x D_x) U(tx\gamma) = 0 \quad U(tx\gamma)|_{t=0} = U_0(x\gamma).$$

と書ける. 定理 (3.1.2) より $(\hat{Q}_1)$ は $U(tx\gamma)$: holomorphic microfunction とし

て一意的に解をもつ. 故に Cauchy 問題 $(\hat{Q}_1)$ は $\mathcal{E}D \otimes P U(txD_x)$ を一意的に解としてもつ.

同様に次の Cauchy 問題が解を $\mathcal{E}D \otimes P$ にもつ事も P_0 を使って得られる.

$$(Q_2): V(txD_x)(tD_x - A(txD_x)) = (tD_x - A(0xD_x))V(txD_x), \quad V(txD_x)|_{t=0} = 1_x.$$

最後に $U(txD_x)V(txD_x) = V(txD_x)U(txD_x) = 1$ を示せば証明は完了する.

9. Q_2 より UV は次の方程式をみたす.

$$(Q_3): t \frac{\partial}{\partial t} (UV) - A \cdot (UV) + (UV)A = 0 \quad UV|_{t=0} = 1.$$

従って再び積分核の核函数についての方程式に書きかえると,

$$(\hat{Q}_3): t \frac{\partial}{\partial t} w(tx\gamma) - (I_l \otimes A(txD_x) - A^*(txD_x) \otimes I_l) w(tx\gamma) = 0 \quad w|_{t=0} = w_0(x\gamma).$$

故に Cauchy 問題 $(\hat{Q}_3)$ の解が一意的である事を示せば $UV=1$ を得

る. $w(tx\gamma)$ は t に関し正則故 $w(tx\gamma) = \sum t^m w_m(x\gamma)$ と展開できる.

$\hat{A} = I \otimes A - A^* \otimes I = \sum t^m \hat{A}_m(x) D_x D_x$ とする時 $m \geq 1$ では $(m - \hat{A}_0)$ は可逆だから $(\hat{A})$ の Cauchy 解の一意性は t の中に展開して係数を比較すれば、ただちに得る。結局 $UV=1$ が示された。 $VU=1$ も同様である。 P の成分が微分作用素の時は holomorphic hyperfunction についての Cauchy 問題に帰着させればよい。

注意(3.1.4) 巾零 Fuchs 系の時は $(tD_t - A(tx D_x)) U(tx D_x) = U(tx D_x) (tD_t - A(0x D_x))$, $U(tx D_x)|_{t=0} = 1$ が一意解をもつ事により標準形を求めた。 Fuchs 系の条件が崩れると、もはや一意解の存在は保証されない。次の例は興味深い例である。

$$\text{例} \quad \left\{ \begin{array}{l} (tD_t - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ D_x + t f(x) & 0 \end{bmatrix}) U(tx D_x) = U(tx D_x) (tD_t - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ D_x & 0 \end{bmatrix}) \\ U(tx D_x)|_{t=0} = 1. \quad (tx) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, (0, dx\infty) \text{ で考える} \end{array} \right.$$

1) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ とおくと時有限階数 $D, \mathbb{C}_p$ では $U(tx D_x)$ は解なし。

2) 無限階を許すと任意の $f(x)$ に対し、微分作用素の範囲で無数に多くの解が存在する。

定理(3.1.5) $P(tx D_t D_x)$ を $\sigma_m(p) = t^m D_t^m$ なる Fuchs 型作用素 $\mathcal{O}(\lambda x) = \prod_{i=1}^m (1 - \lambda_i(x))$ とおく時、 $\lambda_i(x)$ が正則かつ $\lambda_i(0) - \lambda_j(0) \notin \mathbb{Z} - \{0\}$ とするこの時 $Pu=0$ と $(tD_t - \lambda_j(x)) v_j = 0$ ($1 \leq j \leq m$) とは left $\mathcal{D}$ -module として同型である。(但し $\mathcal{D}$ は微分作用素のなす層。)

(証明) $t^l D_t^l = t D_t (t D_t - 1) \cdots (t D_t - l + 1)$ により matrix 表示して, 定理(3.1.3)を

便うと $Pu = 0$ と $(t D_t - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_m(x) & \cdots & -a_1(x) + m - 1 \end{bmatrix})w = 0$ と
同値 (as left $\mathcal{D}$ -module).

$[] = A(x)$ とおく.

今 $R(x) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1(x) & & \lambda_m(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1(x)^{m-1} & & \lambda_m(x)^{m-1} \end{bmatrix}$ とおくと $R(x)$ は可逆であり, かつ
 $R(x)^T A(x) R(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m(x) \end{bmatrix}$ となる.
g. e. d.

$k \neq m$ の時は一般には簡単な形にもってゆけないが, 例えば,
 $\mathcal{F} = \mathbb{C}, a \in \mathbb{B}, a \notin \mathbb{B}$ ならば $D_t u = v \Leftrightarrow t D_t u = t v$ が成立つので matrix
表示して方程式を簡単にできる. 今一般に " $\mathcal{F} \ni u, t u = 0 \Rightarrow u = 0$ "
が成り立つとする. この時次を得る.

定理(3.1.6) P を $\sigma_m(P) = t^k D_t^m$ なる weight $(m-k)$ の Fuchs 型, $\hat{P}(\lambda, x) \equiv$
 $(\lambda-1)(\lambda-2) \cdots (\lambda-k) + a_1(x)(\lambda-1) \cdots (\lambda-k+1) + \cdots + a_k(x) = \prod_{\nu=1}^k (\lambda - \lambda_\nu(x))$ とおく時
 $\lambda_\nu(x)$ 正則で $\lambda_i(x), \lambda_j(x) - \lambda_k(x) \notin \mathbb{Z} - \{0\}$ ($j \neq k$). この時次は風値.

1) $Pu = 0 \quad u \in \mathcal{F}$

2) $(t D_t - \lambda_j(x)) v_j = 0 \quad 1 \leq j \leq k, D_t v_\nu = 0 \quad k+1 \leq \nu \leq m, v_j, v_\nu \in \mathcal{F}$

(証明) $\hat{P} = tP \quad u_0 = u, D_t u_0 = u_1, \cdots, D_t u_{m-k-1} = u_{m-k}, t D_t u_{m-k} = u_{m-k+1}, \cdots, (t D_t - k+1) u_{m-2} = u_{m-1}$ とおいて matrix 表示する. その時の Fuchs 系の特性固有値 $\{0, \lambda_j(x)\}$ 故定理(3.1.3)が使えり)と次とは風値となる.

$P\tilde{u}=0$. $u=\tilde{u}$ on $\{t<0\}$. $S-S(u-\tilde{u}) \neq (0, \pm\infty)$ 故に Holmgren の定理より $u=\tilde{u}=e^{\log(t-i0)A(x)}f(x)$ と書ける. $u \mapsto f(x)$ は 1 対 1 onto に対応するので $a^+B^P \cong {}^1B^l$ も得る. a^-B^P も同様である.

2) の証明. 1) の論法より $u \in aB$, $Pu=0$ の時, $u(t,x)=e^{\log(t-i0)A(x)}f(x) = e^{[\log(t-i0)+2\pi i]A(x)}f(x)$ と書ける. 従って $t>0$ で R^1 を掛けると, $f(x) = e^{2\pi i A(x)}f(x)$. i.e. $[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} (2\pi i A(x))^{m-1}] 2\pi i A(x) f(x) = 0$. $\alpha_i \notin \mathbb{Z}-\{0\}$ より $[\]$ 内は可逆行列故 $A(x)f(x)=0$ を得る. もとにもどって, $u=e^{\log(t-i0)A(x)}f(x) = f(x) + [\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \{\log(t-i0)A(x)\}^{m-1}] \log(t-i0)A(x)f(x) = f(x)$. 故に $u=f(x)$ を得る. $u|_{t=0}=f(x)=0$ より $u=0$ を得る. g.e.d.

系 (3.2.2) P を $\sigma_m(P)=t^k D_t^m$ の Fuchs 型. $\tilde{e}(u,0)=0$ の根 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ について, $\lambda_i, \lambda_j - \lambda_k \notin \mathbb{Z}-\{0\}$. ($\tilde{e}(u,x)$ の定義は (3.1.6)). この時,

1) $a^\pm B^P \cong {}^1B^m$

2) $Pu=0$, $S-S(u) \neq (0, \pm\infty)$, $(\frac{\partial}{\partial t})^j u|_{t=0}=0$ $0 \leq j \leq m-k-1$ ならば $u=0$.

3) $aB^P \cong {}^1B^{m-k}$.

(証明) 定理 (3.1.6) の方法で matrix 表示して (3.2.1) を使う. g.e.d.

注意 (3.2.3) 一般に $\sigma_m(P)=t^l D_t^m$ なる作用素についても $a^\pm B^P \cong {}^1B^m$ が成立つ. (証明は $R=e^{\log t A(x)}$ の所を, 一般のモッド Ω として置きかえて議論すればよい.)

参考文献

- [1]. Baouendi-Goulaouic : Cauchy Problems with characteristic initial hypersurfaces, Comm. Pure. Appl. Math. 26. 1973.
- [2]. Hasegawa ; On the initial-value problems with data on a double characteristic, J. Math. Kyoto Univ 11. 1971.
- [3]. Hasegawa ; On the initial-value problems with data on a characteristic hypersurface, J. Math. Kyoto Univ 13 1973.
- [4]. 柏原・河合 ; On microhyperbolic pseudo-differential operators. 近刊.
- [5]. Monvel-Kree ; Pseudo-differential operators and Gevrey classes, Ann. Inst. Fourier 17. 1967.
- [6]. Bony-Schapira ; Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles ; Inventiones Math. 17. 1972.
- [7]. Bony-Schapira ; Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy, Springer Lecture note. No.287. 1973.
- [8]. 小松・河合 ; Boundary values of hyperfunctions solutions of linear partial differential equations, Publ. R.I.M.S. 7 1971
- [9]. 佐藤・河合・柏原 ; Microfunctions and pseudo-differential equations Springer Lecture note No.287. 1973.
- [10]. Tsuno ; On the prolongation of local holomorphic solutions of partial differential equations, III, equations of the Fuchsian type, 近刊.