

Koebe Uniformization and Circle Packings

京大理 植田達雄 (Tatsuo Ueda)

「Koebe Uniformization Conjecture (1908)

$\forall \Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ domain は, $\exists$ circle domain $\subset \hat{\mathbb{C}}$ と conformal」

「Definition

$\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ circle domain が rigid

$\Leftrightarrow_{\text{def.}} \forall h: \Omega \rightarrow \Omega^* (\text{circle domain})$ は Möbius 変換」

Circle domain の rigidity は, $\partial\Omega$ が, σ -finite linear measure をもつとき [HS2] で, Uniformization に関しては $\partial\Omega$ の境界成分が可算個のとき [HS1] で証明されている。ここではこれらの内容を紹介する。

§0. 定義など

Circle domain とは境界成分が全て円又は点である領域。

σ -finite linear measure をもつ集合とは, 1次元 Hausdorff measure が有限の集合の可算和で表せる集合のこと。

以下で示す定理は次の2つ。

「Theorem 0.1. $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ は circle domain で、境界は σ -finite linear measure をもつとする。

$\exists \Omega^* \subset \hat{\mathbb{C}}$ circle domain $\exists \varphi: \Omega \rightarrow \Omega^*$ conformal

$\Rightarrow \varphi$ は Möbius 変換

「Theorem 0.2. $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ domain の境界成分は高々可算個とする。
 $\exists \Omega^* \subset \hat{\mathbb{C}}$ circle domain $\exists \varphi: \Omega \rightarrow \Omega^*$ conformal

§ 1. Rigidity

「Lemma 1.1. $Z \subset \mathbb{R}^2$ σ -finite linear measure をもつ Borel set

$X \subset \mathbb{R}$, $X = \{x \in \mathbb{R}: (\{x\} \times \mathbb{R}) \cap Z \text{ が非可算}\}$

$\Rightarrow X$ の Lebesgue measure は 0

Proof. Z の linear measure は 1 としてよい。

$X_m^n = \{x \in \mathbb{R}: (\{x\} \times \mathbb{R}) \cap Z \text{ の中に互いに } \frac{1}{m} \text{ 以上離れた点 } n \text{ 個以上とれる。}\}$

とすると、 X_m^n の measure は高々 $\frac{1}{n}$

$X \subset \bigcap_n \bigcup_m X_m^n$ より、 X の measure は 0 //

「Lemma 1.2. $\Omega, \Omega^* \subset \hat{\mathbb{C}}$ circle domains, Ω の境界は σ -finite linear measure をもつ。 $f: \Omega \rightarrow \Omega^*$ conformal

$\Sigma: \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ の component で点ではない $\Rightarrow \Sigma^*$ も点ではない。

但し、 Σ^* は f により Σ に自然に対応させられる $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega^*$ の

component. 以降断りのない限り*のついたものは同様のものとする。

Proof. Σ^* を1点とする。Möbius変換で normalize して

$\Sigma = \bar{U}$ (単位円板), $\Sigma^* = \{0\}$ とする。

$r > 0$ は十分小, D_r は中心0半径 r の円。

H^* は $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega^*$ の連結成分で $D_r \setminus \{0\}$ と交わるものの和。

H は $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ の対応する成分の和。

Q は H の成分を要素とする集合。

$W = f^{-1}(D_r \setminus (\{0\} \cup H^*))$ とする。

V は $\bar{U}$ を含む任意の open set, r を十分小さくすれば,

$W \cup H \subset V - \bar{U}$ とできる。 $\infty \notin W \cup H$ とする。

$\forall \theta \in [0, 2\pi] \quad X_\theta = \{\rho e^{i\theta} : \rho > 0\}$

$Q(\theta)$ は H の成分のうち X_θ と交わるものとする。

Lemma 1.1 より a.e. θ で $Q(\theta)$ は可算である。

$\infty \notin W \cup H$ より, $\forall X_\theta$ は $W \cup H$ の内周と外周を横切る。

$\therefore f(W \cap X_\theta) \cup \left(\bigcup_{\Delta \in Q(\theta)} \Delta^* \right)$ は0と ∂D_r を結ぶ。

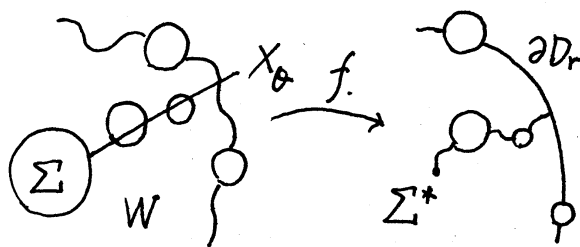


図.1.

$Q(\theta)$ が可算となる θ について (a.e.に存在)

$$r \leq \int_{W \cap X_\theta} |f'(z)| |dz| + \sum_{\Delta \in Q(\theta)} r \text{diam}(\Delta^* \cap D_r)$$

但し、 $r \text{diam}(E) = \sup \{|z_1| - |z_2| : z_1, z_2 \in E\}$

積分して、

$$2\pi r \leq \iint_W |f'(pe^{i\theta})| \rho d\rho d\theta + \sum_{\Delta \in Q} r \text{diam}(\Delta^* \cap D_r) \text{length}(\{\theta : \Delta \in Q(\theta)\})$$

$$\text{length}(\{\theta \in [0, 2\pi] : \Delta \in Q(\theta)\}) \leq \text{diam} \Delta$$

$$\rho d\rho d\theta \leq \rho d\rho d\theta = dz dy \text{ on } W \quad (\because \rho \geq 1)$$

$$2\pi r \leq \iint_W |f'(z+iy)| dz dy + \sum_{\Delta \in Q} r \text{diam}(\Delta^* \cap D_r) \text{diam} \Delta$$

関数と数列の組 $(f, \{a_n\})$ の内積と

$$(f, \{a_n\}) \cdot (g, \{b_n\}) = \int f \bar{g} d\mu + \sum a_n \bar{b}_n$$

で与えるような Hilbert 空間を考え. Schwarz-Cauchy を使うと.

$$4\pi^2 r^2 \leq \left(\iint_W |f'(z+iy)|^2 dz dy + \sum_{\Delta \in Q} (r \text{diam}(\Delta^* \cap D_r))^2 \right) \\ \times \left(\iint_W dz dy + \sum_{\Delta \in Q} (\text{diam} \Delta)^2 \right)$$

D を円板とすると.

$$\frac{\pi}{4} \text{area } D = (\text{diam } D)^2, \quad \frac{\pi}{4} \text{area}(D \cap D_r) \geq (r \text{diam}(D \cap D_r))^2$$

が成り立つので.

$$4\pi^2 r^2 \leq \left(\text{area } f(W) + \frac{4}{\pi} \sum_{\Delta \in Q} \text{area}(\Delta^* \cap D_r) \right) \left(\text{area}(W) + \frac{4}{\pi} \sum_{\Delta \in Q} \text{area} \Delta \right) \\ \leq \frac{16}{\pi^2} \left(\text{area } f(W) + \sum_{\Delta \in Q} \text{area}(\Delta^* \cap D_r) \right) \left(\text{area}(W) + \sum_{\Delta \in Q} \text{area} \Delta \right) \\ \leq \frac{16}{\pi^2} \text{area } D_r \text{area}(W \cup H) = \frac{16r^2}{\pi} \text{area}(W \cup H)$$

$$\therefore \text{area}(W \cup H) \geq \frac{\pi^3}{4} \quad \text{area}(W \cup H) \text{ はいくらでも小さく}$$

できるはずだから矛盾。よって Σ^* は円である。 //

「Lemma 1.3. Ω, Ω^*, f は Lemma 1.2 と同じとする。

$\Sigma: \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ の成分で 1 点とする $\Rightarrow \Sigma^*$ も 1 点。」

Proof. Σ^* は円とする。normalize し $\Sigma = \{0\}, \Sigma^* = \bar{U}$

とする。 C_ρ は中心 0 半径 ρ の円周, $r > 0$ 十分小とする。

$$A_r = \{z \in \mathbb{C} : \frac{r}{2} < |z| < r\}$$

H は $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ の連結成分で A_r と交わるものの和。

Q は H の成分を要素とする集合。

$\rho \in [\frac{r}{2}, r]$ に対し. $Q(\rho) = \{\Delta \in Q : \Delta \cap C_\rho \neq \emptyset\}$ とすると.

Lemma 1.1. より. a.e. ρ で $Q(\rho)$ は可算である。

そのような ρ に対し. C_ρ の像は $\Sigma^* = \bar{U}$ の外側を固めているので.

$$2\pi \leq \int_{C_\rho \setminus H} |f'(z)| |dz| + \sum_{\Delta \in Q(\rho)} \text{diam}(\Delta^*)$$

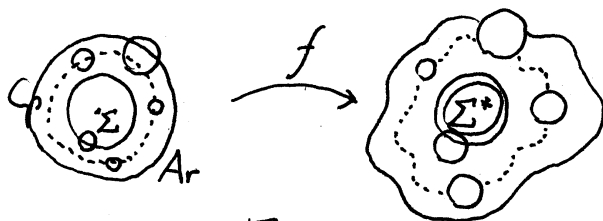


図 2.

$\int_{\frac{r}{2}}^r d\rho$ を上式両辺について計算すると. Lemma 1.2. と同様
に.

$$\pi r^2 \leq \frac{12r^2}{\pi} \text{area}(f(A_r \setminus H) \cup H^*)$$

$$\therefore \text{area}(f(A_r \setminus H) \cup H^*) \geq \frac{\pi^3}{12}$$

$\infty \neq \text{area}(f(A_r \setminus H) \cup H^*)$ としておけば. $\text{area}(f(A_r \setminus H) \cup H^*)$ は
いくらでも小さくなるはずだから矛盾. よって Σ^* は点で
ある. //

Lemma 1.4. Ω, Ω^*, f は Lemma 1.2. と同じとする。

$f: \Omega \rightarrow \Omega^*$ conformal は $\bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}^*$ に homeomorphism
にのぼせる。

Proof. $\Sigma: \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ の成分が、点なら Σ^* も点であり、
当然のびる。

Σ を円板とする (Σ^* も円板になる。) $\rho \in \partial \Sigma$ とする。

normalize して $\rho = 0, \Sigma^* = \bar{U}$ とする。

$C_\rho, A_r, Q, Q(\rho), H, H^*$ は Lemma 1.3 と同じとする。

$$\text{diam} \{ (H^* \setminus \bar{U}) \cup f(A_r \setminus H) \} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

ならば、 f は $\Omega \cup \{\rho\}$ に連続にのびる。

$\rightarrow 0$ とすると、 $\exists M. \text{diam} \{ (H^* \setminus \bar{U}) \cup f(A_r \setminus H) \} \geq M.$

$$\therefore M \leq \int_{C_\rho \setminus H} |f'(z)| |dz| + \sum \text{diam}(\Delta^*)$$

以下同様にして、

$$\text{area} (f(A_r \setminus H) \cup (H^* \setminus \Sigma^*)) \geq \frac{M^2 \pi}{12r^2} \geq \frac{M^2 \pi}{12} \quad (r: \text{十分小} < 1)$$

やはり、 $\text{area} (f(A_r \setminus H) \cup (H^* \setminus \Sigma^*))$ をいくらでも小さくでき
ることに矛盾。 $\therefore f$ は $\partial \Omega$ の各点で連続にのびる。それを $\hat{f}$
とする。 $\hat{f}: \text{bijection}$ を示せばよいが、各 Σ (円周) $\subset \partial \Omega$ で、
 $\hat{f}|_{\Sigma}$ injection にならばよい。 injection でないとする。

$$\exists p_1, p_2 \in \Sigma \quad p_1 \neq p_2 \quad \hat{f}(p_1) = \hat{f}(p_2) = q$$

normalize して、 $q = 0, \Sigma = \partial U, \Omega \cap U = \emptyset$ とする。

$f: \Omega \rightarrow \Omega^*$ は homeomorphism だから、 p_1, p_2 を端点とする ∂U の

弧は $\hat{f}$ で $\{0\}$ にうつる。この弧と $\{e^{i\theta} : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$ とする。

$r > 0$ 十分小、 D_r : 中心 0 半径 r の円板。

H^* は $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega^*$ の連結成分で D_r と交わるものの和。

H, Q は今までと同様、 $X_\theta = \{pe^{i\theta} : p > 1\}$ $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$Q(\theta)$ は H の成分のうち、 X_θ と交わるものとする。

$\infty \notin H \cup f^{-1}(D_r \setminus H^*)$ として、 $W = f^{-1}(D_r \setminus (H^* \cup \Sigma^*))$ 。

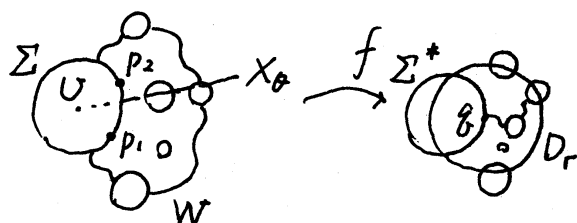


図 3.

$$r \leq \int_{X_\theta \setminus H} |f'(z)| |dz| + \sum_{\Delta \in Q(\theta)} r \text{diam}(\Delta^* \cap D_r)$$

$$\text{以下同様で、} \text{area}(W \cup H) \geq \frac{\pi(\theta_2 - \theta_1)^2}{16}$$

やはりいくらでも小さくできることに矛盾 //

あとは $\hat{f}$ と境界での反転により $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow K$ -quasiconformal への
 ばし、dilatation が 0 になることを示せば、 f が Möbius 変換の
 Ω への制限であることがわかり、Theorem 0.1 が示せる。詳細
 は省略。[HS2]

§ 2. Circle domain への写像の存在

以下 Ω の境界成分は可算個とする。 Ω は circle domain と

は限らず、一般の領域とする。 Ω から $\exists$ circle domain Ω^* への conformal map の存在は超限帰納法を用いる。

集合 X に対し、その孤立点を除いたものを X' と表す。順序数 α に対し、 X^α を次のように定義する。

$$X^0 = X \quad \left(\begin{array}{ll} \alpha \text{ が successor ordinal の時.} & X^\alpha = (X^\beta)' \quad (\alpha = \beta + 1) \\ \alpha \text{ が limit ordinal の時.} & X^\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} X^\beta \end{array} \right.$$

Ω の境界成分の集合 $B(\Omega)$ に自然な位相を入れ、 $B(\Omega)^\alpha$ を考える。countable compact Hausdorff space には必ず孤立点があるので、 $B(\Omega)^\alpha \neq \emptyset$ なら、 $(B(\Omega)^\alpha)'$ の点は $B(\Omega)^\alpha$ より確実に少ない。 $\exists \beta$ s.t. $B(\Omega)^\beta = \emptyset$ 。 β をこのような順序数の中で最小のものとする。 $B(\Omega)^\alpha$ の compact 性から β は successor ordinal。よってその前者を α とし、 $B(\Omega)$ の (Ω の) rank という。 $B(\Omega)^\alpha$ は有限個の点から成り、その数と n とし、 (α, n) を Ω の type という。各 ordinal β に対し、 $B(\Omega)^\beta$ の孤立点を rank β の境界成分という。

$B(\Omega)$ が有限のときは、circle domain への conformal map の存在は Koebe 自身が証明している。[Ko] このことを帰納法の base とする。以下 $B(\Omega)$ は無限集合とする。

type (α, n) の順序は、

$$(\lambda_1, n_1) < (\lambda_2, n_2) \iff \lambda_1 < \lambda_2, \text{ 又は } (\lambda_1 = \lambda_2 \text{ かつ } n_1 < n_2)$$

としておく。

Ω の rank が α なら, rank α の境界成分 K_0 のまわりを Jordan 曲線 J_k で切ることにより Ω の type を下げられる。Jordan 曲線を J_k とし, K_0 と J_k の間を Ω から取り去り, 1-領域を Ω_k とし, $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \dots$ $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ とする列

を考える。 Ω_k の type は Ω の type より下だから, 帰納法の仮定より, $\exists \Omega_k^*$: circle domain $\exists f_k: \Omega_k \rightarrow \Omega_k^*$ conformal.

normalize して, $\forall k, f_k(\partial\Omega) = \partial U, f_k(z_0) = 0, z_0 \in \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$ とする。 $\{f_k\}$ は正規族になるので部分列をとって

$$f_k \xrightarrow[\text{cpt}]{\Rightarrow} f \text{ on } \Omega \quad f \text{ is conformal or constant}$$

f が constant になるなら, $f \equiv 0$ だが,

$$g_k(z) = f_k(z) / f'_k(z_0) \text{ ととり直すことにより,}$$

$\{g_k\}$ も正規族になり, 部分列をとって

$$g_k \xrightarrow[\text{cpt}]{\Rightarrow} g \text{ on } \Omega \quad g'(z_0) = 1 \text{ より } g \text{ は conformal}$$

この g を f と思う。

$f: \Omega \rightarrow \Omega^*$ で, Ω^* が circle domain になるなら Theorem 0.2 が言える。詳細は省略。[HS1]

§3. Circle packing との関連

$P = \{P_i : i \in V\}$ 各 P_i は compact topological disk で, 円点は互いに disjoint とする。更に P の任意の 2 つの disks は高々 1 点で交わり, 3 つの disks は共通部分をもたないとする。

packing P の limit point とは、 $p \in \hat{\mathbb{C}}$, p のどんな近傍も無限個の P_i と交わるような p とする。

P が Ω の acceptable packing であるとは、上のような P で、 Ω 内に limit point がないときをいう。

P が Ω の acceptable packing の時、 $\Omega_p = \Omega \setminus \bigcup_{i \in V} \{\text{int } P_i\}$ を generalized domain といい。但し、generalized domain は open とは限らないので domain ではないが、connected である。

Ω, Ω^* を generalized domain とした時、 $h: \Omega \rightarrow \Omega^*$ が conformal とは、 $\text{int } \Omega$ で conformal, Ω で homeomorphism のときをいう。

Ω が circle domain で、 P が circle packing である時、generalized domain Ω_p を generalized circle domain といい。

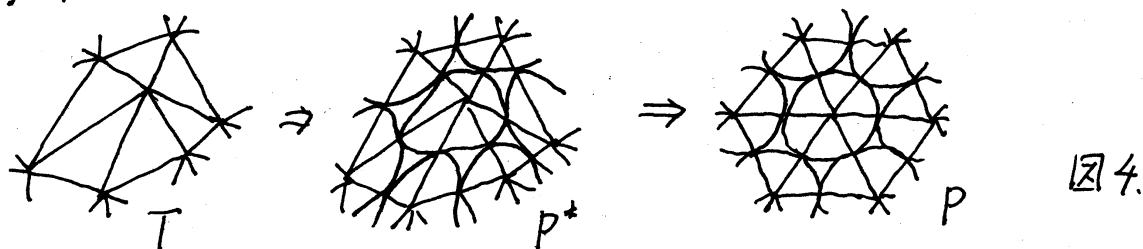
domain を generalized domain, circle domain を generalized circle domain に読みかえて、Theorem 0.1, Theorem 0.2 と同様のことが成り立つ。

それにより、例えば次の定理が得られる。

「Theorem 3.1. T を $\hat{\mathbb{C}}$ の境界成分が高々可算個の領域の三角形分割とする。このとき $\exists$ circle packing P in $\hat{\mathbb{C}}$ s.t. graph は T の 1-skeleton と組合せ同値で、carrier は circle domain 更に P は Möbius 変換を除き一意。」

Proof. まず, T を graph にもつ acceptable packing をつくる。
 (circle packing でなくてよい。) packed sets は topological disk
 でよいのでこれは可能である。acceptable というのは T が分
 割している領域に対してであり, それが carrier になる。

packing を P^* , carrier を Ω^* とし, generalized domain $\Omega_{P^*}^*$ に
 対し, Theorem 0.2. の読みかえ版により, $\exists h, \exists \Omega$: generalized
 circle domain s.t. $h: \Omega_{P^*}^* \rightarrow \Omega$ conformal. P^* に対応する
 Ω の packing P は circle packing であり, carrier は Ω . また, P
 の graph は T と組合せ同値になる。



T に対応する packing (circle) が 2 つあ, T とする。(P_1, P_2)
 P_1, P_2 の“すき間”は全て(曲がった)三角形だが, P_1 から
 P_2 の組合せ的に対応する三角形の間には頂点の行先(3点)
 を決めても Riemann の写像定理により conformal map が存在。
 それらをつなぐと, generalized circle domain から generalized
 circle domain への conformal map ができるが, Theorem 0.1 の読
 みかえ版により, これは Möbius 変換である。 //

§4. References

[HS.1] Z.-X. He & O. Schramm: Fixed points, Koebe uniformization and circle packings. *Ann. Math.* 137. pp 369-406 (1993)

[HS2] Z.-X. He & O. Schramm: Rigidity of circle domains whose boundary has σ -finite linear measure. *Invent. Math.* 115 p.p. 297-310 (1994)

[Ko] P. Koebe : Abhandlungen zur Theorie der Konformen Abbildung. VI. Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche auf Kreisbereiche, etc. *Math. Z.* 7. p.p. 235-301 (1920)