

Derivation of self-adjoint algebras

宮城教育大 板垣 芳雄

近年 C^* -algebra の one parameter $*$ automorphism group が δ の infinitesimal generator となる (unbounded) derivation との関係でいろいろ調べられている。そのとき, derivation は一般に C^* -algebra 全体でなく δ の dense subalgebra で定義されたもので, bounded でない限り定義域全体とはならず, 当然のことながら inner でない。そこで一般に Hilbert space 上 unbounded となる operator を含む $*$ -algebra ; self-adjoint algebra $\mathcal{O}$ について $\mathcal{O}$ の inner $*$ automorphism group, $\mathcal{O}$ 全体で定義される inner $*$ derivation について考えてみた。derivation が inner というのは $\mathcal{O}$ の δ bounded な operator のなる algebra $\mathcal{O}_b$ についていえば, derivation を定義する unbounded operator が $\mathcal{O}_b$ に affiliated する場合に相当する。

まず s.a. algebra の定義, 位相等について記す。次に $\mathcal{H}$ 上の $*$ derivation と $*$ automorphism group の定義を述べる。事はこの関係を議論するまで行かず, 続く内容はそれを調べる目安として, まず unitary semi-group とその generator との関連で algebra を考えた段階のものである。最後に関連して有限自由度 CCR の Schrödinger 表現について述べる。

§1. 定義を記す前に 1 つの例について考える。

A を Hilbert space $\mathcal{H}$ 上の maximal symmetric operator, $\Phi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ は $\mathcal{H}$ で dense とする。 $\mathbb{C} = \mathcal{D}(T)$ は T の domain を表わす。 A の positive deficiency; $\{x \mid A^*x = ix\}$ の次元は 0 とする。 $V_t = e^{-itA} \quad t \geq 0$ は isometric semi-group であり, $\mathcal{D}(A)$ 上 $V_t A = A V_t$ が成立する。よ, 2 特には $V_t \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ であり,

$$V_t \mathcal{D}(A^n) \subset \mathcal{D}(A^n) \quad \text{が成立するから} \quad V_t \Phi \subset \Phi.$$

1) 又 adjoint semi-group V_t^* について

$$V_t^* \Phi \subset \Phi$$

が成立すると仮定する。 strongly convergence の意味で

$$\frac{d}{dt} V_t^* = iA^* V_t^* = iV_t^* A^*$$

また Φ 上では $A = A^*$ であるから

$$\frac{d}{dt} V_t V_t^* = -i A V_t V_t^* + V_t i A V_t^* = 0$$

$$\rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} V_t V_t^* x = x, \quad x \in \Phi. \quad \text{ゆえに}$$

$$V_t V_t^* = I \quad \text{on } \Phi$$

Φ は $\mathcal{H}$ で dense であるから $V_t V_t^* = I$ on $\mathcal{H}$.

従って V_t は unitary operator になり, A は self-adjoint operator である。以上より

V_t, V_t^* は $t \in \mathbb{R}$ に Φ から Φ への operator である (i.e. Φ の image は Φ に含まれる) ための必要十分条件は, A が self-adjoint operator なることである。

さて, $\mathcal{H}$ は Hilbert space, Φ は $\mathcal{H}$ の dense な linear subspace とする。 Φ から Φ への linear operator 全体を $\mathcal{L}(\Phi)$, $\mathcal{L}(\Phi)$ の元 A の $\mathcal{H}$ での adjoint A^* (の Φ への restriction A^+) がまた $\mathcal{L}(\Phi)$ に属するようなもの全体を $\mathcal{L}^+(\Phi)$ で表わす。

$\mathcal{L}^+(\Phi)$ の identity I を含む $*$ -subalgebra $\mathcal{O}$, involution は $A \mapsto A^+$, が次の条件を満たすとき, $\mathcal{O}$ は self-adjoint であるという。

$$\Phi = \bigcap_{A \in \mathcal{O}} \mathcal{D}(A), \quad \mathcal{D}(A) \text{ は } A \text{ の domain}$$

$\mathcal{L}^+(\Phi)$ に次の semi-norm 系により topology (weak topology) を導入する。

$$|(Ax, y)|, \quad x, y \in \Phi$$

$\mathcal{O}$ の元で $\mathcal{H}$ 上 bounded であるようなものの全体を $\mathcal{O}_b$ と記す
 ことにする。いま s.a. algebra $\mathcal{O}$ について $\mathcal{O}_b$ が $\mathcal{O}$ で
 weakly dense であるとき, $\mathcal{O}$ の double commutant $\mathcal{O}''$
 は $\mathcal{O}$ の weak closure $\mathcal{O}'' = \overline{\mathcal{O}}^w$ (*) である。この commutant
 $\mathcal{O}'$ は次式で定義する。

$$\mathcal{O}' = \{ C \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \mid CA = AC \text{ for } \forall A \in \mathcal{O} \}$$

つまり $\mathcal{H}$ 上 bounded な operator 全体 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ について, $\mathcal{O}$
 commutant は $\mathcal{O}'$ で表わすことにする。identification
 $\mathcal{O}_b \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ により

$$\mathcal{O}_b' = \{ C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid CA = AC \text{ for } \forall A \in \mathcal{O} \}$$

Lemma. $\mathcal{O}$ は s.a. algebra である。 $\mathcal{H}$ 上の bounded
 operator B について, $\mathcal{O}$ の任意の元 A について $\mathcal{Q}(\bar{A})$ 上
 $B\bar{A} = \bar{A}B$ が成立すれば, $B \in \mathcal{O}'$ である。

Proof. 条件より $B\mathcal{Q}(\bar{A}) \subset \mathcal{Q}(\bar{A})$
 ゆえに $B \bigcap_{A \in \mathcal{O}} \mathcal{Q}(\bar{A}) \subset \bigcap_{A \in \mathcal{O}} \mathcal{Q}(\bar{A}) = \mathfrak{H}$

これより次が知られる。

Corollary. $\mathcal{O}$ は s.a. algebra である。

$$(\mathcal{O}')_b = \mathcal{O}' \cap \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

は * algebra である。

*) 坂垣芳雄, Double commutant theorem for topological
 *-algebras, 数理解析研講究録 210

§2. $\mathcal{A}$ は s.a. algebra とする。

$\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ への linear operator σ が次の条件をみたすとき σ は $\mathcal{A}$ 上の $*$ automorphism であるという。

$$(1) \quad \sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$$

$$(2) \quad \sigma(I) = I$$

$$(3) \quad \sigma(A^+) = \sigma(A)^+$$

σ が $\mathcal{A}$ の $\bar{V}$ により $\sigma(A) = V^+AV$ と表わされるとき σ は inner であるという。このとき (3) は自然に成立する。また (2) が成立すれば $V^+V = I$ より (1) は成立し (かつ V は $\mathcal{H}$ の内積について isometry でなければならず、 V が $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への bijection のとき V in $\mathcal{H}$ の closure は unitary operator, $\mathcal{A}_b^{cc}$ が finite のときも V は unitary である。

$\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ への linear operator δ が次の条件をみたすとき、 δ は $*$ derivation であるという。

$$(1) \quad \delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)$$

$$(2) \quad \delta(I) = 0$$

$$(3) \quad \delta(A^+) = -\delta(A)^+$$

δ が $\mathcal{A}$ の $\bar{H}$ により $\delta(A) = AH - HA$ と表わされるとき δ は inner であるという。このとき (1), (2) は自然に成立する。また (3) が成立することから H は symmetric operator $\frac{H+H^+}{2}$ にとりかえることができる。

§3. $\mathcal{A}$ は weakly closed な s.a. algebra とする。

$\mathcal{A}$ の元が $t \mapsto V_t$ なる one-parameter (strongly continuous) unitary semi-group $V_t = e^{-itH}$ について, どのような条件のもとで self-adjoint operator H が $\mathcal{A}$ の元になっているか, およびその逆の成立条件について考える。

Theorem. $V_t = e^{-itH} \in \mathcal{A}$ のとき 次の二つを満たせば $B = -iH \in \mathcal{A}$ とある。

(1) Φ は topology を導き, Φ の topology について Φ が weak complete のとき, かつ

$$\left\langle \frac{V_t - I}{t} x, x' \right\rangle \rightarrow \langle Bx, x' \rangle, \text{ for } \forall x \in \Phi, x' \in \Phi' \\ \text{as } t \rightarrow 0$$

(2) $\left(\frac{V_t - I}{t} x, y \right) \rightarrow (Bx, y), \text{ for } \forall x, y \in \Phi$ である。

$$\bigcap_{C \in \{V_t\}'} \mathcal{Q}(C^{**}) = \Phi$$

こゝに $B \in \mathcal{L}(\Phi)$ を保証する後の方の条件を以下では「 $\{V_t\}'$ が十分小さくある」ということにする。

(3) $\mathcal{Q}(B) \supset \Phi$ である。

$\{V_t\}'$ が十分小さくある。

Theorem. $H \in \mathcal{O}$ が essentially self-adjoint のとき
次のことが満たせば $V_t = e^{-itH} \in \mathcal{O}$ である。

(1) resolvents $(\bar{H} - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{O}$ である

$\{H\}'$ が十分小さくある。

(2) H の spectral measure $E_\lambda \in \mathcal{O}$ である

$\{H\}'$ が十分小さくある。

(3) bounded self-adjoint operator の列 $\{H_n\}$ で

$$HH_n = H_nH$$

$$e^{-itH_n} \in \mathcal{O}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n x = Hx, \quad x \in \Phi$$

なるものが存在し、かつ

$\{V_t\}'$ が十分小さくある。

(4) H が lower semi-bounded,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(e^{n\bar{H}}) \supset \Phi \quad \text{である}$$

$\{H\}'$ が十分小さくある。

§4. 有限自由度のCCR (正準交換関係) の Schrödinger
表現から生成される algebra のを考える。(自由度1で書
く。)

$$(Qf)(x) = xf(x)$$

$$(Pf)(x) = -i \frac{d}{dx} f(x)$$

ただし $\mathcal{H}$ 上の space は $\Phi = \mathcal{F}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{H}$ とする。

$\mathcal{U}$ は e^{-itP} , e^{-itQ} を含む $\mathcal{U}$ であり、その weak closure は $\mathcal{U} = \mathcal{L}^+(\Phi)$ であり $\mathcal{U}$ は s.a. algebra である。

逆に、 $\Phi \in \mathcal{H}$ の dense subset, essentially self-adjoint operator $P, Q \in \mathcal{L}(\Phi)$ が

$$PQ - QP = I$$

$$\Phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(P^n) \cap \mathcal{D}(Q^n)$$

を満たし、 $\{P, Q\}$ が生成される algebra の中心 $\mathcal{U}'$ は

$$\mathcal{U}' = \{\alpha I\} \quad (\text{irreducibility})$$

とすれば、 $C \subset \mathbb{R}$ 条件から $\{P\}', \{Q\}'$ が modulo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で十分小さく取れることから

$$e^{-itP}, e^{-itQ} \in \mathcal{L}(\Phi)$$

となり、しかも $\{e^{-itP}, e^{-itQ}\}' = \mathcal{U}' = \{\alpha I\}$ 。

よって von Neumann の unitary 値を除く表現一意性定理から、 $\mathcal{U}$ は $\mathcal{U}$ の Schrödinger 表現から作られる algebra と同視できる。