

Briot-Bouquet型の特異点をもつ

一階非線型偏微分方程式

上智大理工 田原 秀敏 (Hidetoshi Tahara)

非線型常微分方程式の特異点で最も基本的なもののひとつに Briot-Bouquetの特異点と呼ばれているものがある。ここでは、その偏微分方程式版とでもいうべき次の一階非線型偏微分方程式を考えてみたい。

$$(E) \quad t \frac{\partial u}{\partial t} = F(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}).$$

ここで、 $(t, x) \in \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_x^n$ 、 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 、 $\frac{\partial u}{\partial x} = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$ とし関数 $F(t, x, u, v)$ (ただし $v = (v_1, \dots, v_n)$) は、次の条件を満たしているものとする。

- (A₁) $F(t, x, u, v)$ は、原点の近傍 Δ で holomorphic。
- (A₂) $F(0, x, 0, 0) = 0$ 、 $x \in \Delta_0 (= \Delta \cap \{t=0, u=0 \text{ \& } v=0\})$ 。
- (A₃) $\frac{\partial F}{\partial v_i}(0, x, 0, 0) = 0$ 、 $x \in \Delta_0$ 、 $i=1, \dots, n$ 。

まず最初に幾つかなの特異な例を挙げておく。

例① $t \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x}$ は $u = \frac{x+c}{1-\log t}$ なる解をもつ。

例② $t \frac{\partial u}{\partial t} = u - x(\frac{\partial u}{\partial x})^2$ は $u = x$ なる解をもつ。

例③ $t \frac{\partial u}{\partial t} = u - 2tx(\frac{\partial u}{\partial x})^2$ は $u = \frac{x}{t}$ なる解をもつ。

この様に、方程式(E)を一般的に扱おうとすると、ものすごく多

様な解が表われてきて、今の所、著者には殆ど魑魅魍魎の世界の様に思えてしまう。そこで、次の方針で考えてゆくことにしたい。

方針 解のクラスを制限して (E) を解析する。

解のクラス $\tilde{\Theta}_+$ の定義 $\tilde{\Theta}_+$ で、次の (あ) (い) をみたす様な $u(t, x)$ の全体を表わすものとする。

(あ) 或る $\varepsilon(s) \in C^0(\mathbb{R}_s)$ 、 $\varepsilon(s) > 0$ と或る $\delta > 0$ とが存在して
 $u(t, x)$ は $\{ (t, x) \in (\widetilde{\mathbb{C} \setminus \{0\}}) \times \mathbb{C}^n ; 0 < |t| < \varepsilon(\arg t), |x| < \delta \}$
 で holomorphic 。

(い) 或る $a > 0$ が存在して、任意の $\theta > 0$ と任意のコンパクト集合 K に対して、 $\{ t \in \widetilde{\mathbb{C} \setminus \{0\}} ; |\arg t| < \theta \} \ni t \longrightarrow 0$ のとき、

$$\max_{x \in K} |u(t, x)| = O(|t|^a)。$$

もちろん、この $\tilde{\Theta}_+$ は、例①②③の様な解をすべて除外しているわけだけれど、しかし、その代りにひとつの橋頭堡として次の結果を得ることができる。

$$\rho(x) = \frac{\partial F}{\partial u}(0, x, 0, 0),$$

$$S_+ = (E) \text{ の } \tilde{\Theta}_+ \text{-解の全体}$$

とおく。

定理 $\rho(0) \notin \{1, 2, 3, \dots\}$ と仮定すると S_+ は次のとおり。

$$S_+ = \begin{cases} \{u_0\}, & \operatorname{Re} \rho(0) \leq 0 \text{ のとき、} \\ \{u_0\} \cup \{U(\varphi); 0 \neq \varphi(x) \in \mathbb{C} \setminus \{x\}\}, & \operatorname{Re} \rho(0) > 0 \text{ のとき。} \end{cases}$$

ただし、 u_0 は (E) の唯一つの holomorphic な解であり、 $U(\varphi)$ は次の

様な展開式によって与えられる (E) の singular な解である。

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} U(\varphi) = \sum_{i \geq 1} u_i(x) t^i + \sum_{\substack{i+2j \geq k+2 \\ j \geq 1}} \varphi_{i,j,k}(x) t^{i+j\rho(x)} (\log t)^k, \\ \varphi_{0,1,0}(x) = \varphi(x) \quad . \end{array} \right.$$

また、 $\mathbb{C}\{x\}$ は収束巾級数環を表わすものとする。

注① $U(\varphi)$ について、もう少し詳しくいうと次のとおり。

任意の $\varphi \in \mathbb{C}\{x\}$ に対して、 1) (E) は (*) の形の形式解を唯一つもち、
2) それは、収束して $\tilde{\mathcal{O}}_+$ に属する。そこで、これによって得られる解を $U(\varphi)$ と記述した。

注② $\varphi=0 \in \mathbb{C}\{x\}$ の時は $U(\varphi)=u_0$ である。本当に singular なものと、holomorphic なものとを区別するため、 u_0 を特別視しておいた。

上の定理は、あくまでも (E) を $\tilde{\mathcal{O}}_+$ の中で考えるとうまくゆく、というにすぎない。 $\tilde{\mathcal{O}}_+$ は、例①②③の様な解をすべて除外しているわけであるから、上の定理は魑魅魍魎の世界でのひとつの橋頭堡ではあるものの、かなり網の目は荒い。

今後の問題

解のクラスを広くすれば、新しい singular な解はいくらでも出て来そうである。そこで、それらをどのように捕えてゆくか？

本稿の結果は、R. Gérard (Univ. de Strasbourg) との共同作業によるものです。詳細は次の [1][2] の論文を見てください。

参考文献

- [1] R. Gérard and H. Tahara, Nonlinear singular first order partial differential equations of Briot-Bouquet type, Proc. Japan Acad. Ser. A, 66 (1990), 72-74.
- [2] R. Gérard and H. Tahara, Holomorphic and singular solutions of nonlinear singular first order partial differential equations, Publ. RIMS, 26 (1990), 979-1000.