

一般四元数群のボルディズム群

阪大 理学部 柴田 勝征

・ §1. 一般的な準備

一般に、コンパクト・リー群 G に対して、 $\Omega_*^U(G)$ という記号によって、弱複素構造を保つような自由な G 作用全体の作るユニタリー・ボルディズム加群を表わす事にする。

——命題 1.1. (well-known)——

G が有限群か可換群のとき、 Ω_*^U -加群の同型

$$\Omega_*^U(G) \cong \Omega_*^U(BG)$$

が、 G -作用のクラス $[M, G]$ に対して、 G -主バンドルの分類写像 $M/G \rightarrow BG$ のクラスを対応させる事により得られる。

——命題 1.2. (Atiyah-Hirzebruch, Conner-Floyd)——

X を CW complex とするとき、spectral sequence $\{E_{p,q}^r, d_r\}$ $\mathbb{Z}''$ 、
 $E_{p,q}^2 \cong H_p(X; \Omega_q^U) \Rightarrow E_{p,q}^\infty = J_{p,q} / J_{p-1, q+1}$

$$0 \subset J_{0,n} \subset \cdots \subset J_{n,0} = \Omega_n^U(X)$$

$$J_{p,q} = \text{Image}(\Omega_{p+q}^U(X^p) \rightarrow \Omega_{p+q}^U(X))$$

となるものが存在する。(但し X^p は X の p -skeleton)

以下の話においては、 G は有限群とし、命題 1.1 の同型により、 $\Omega_*^U(G)$ と $\Omega_*^U(BG)$ を自由に同一視する。

命題 1.3.

G を有限群とする時、次の諸条件は同値である。

- (1) $H_*(G; \mathbb{Z})$ は周期をもつ。
- (2) $\tilde{H}_i(G; \mathbb{Z}) = 0 \quad (\forall i)$ 。
- (3) G の可換部分群はすべて cyclic。
- (4) G の p -sylow 群は $\begin{cases} \text{cyclic} & (p: \text{奇素数の場合}) \\ \text{cyclic または 一般四元数群} & (p=2 \text{ の場合}) \end{cases}$
- (5) $\Omega_*^U(BG)$ に対する命題 1.2 のスペクトル列は collapse する。
- (6) Thom 準同型 $\mu: \Omega_*^U(BG) \rightarrow H_*(BG; \mathbb{Z})$ は全射。

(注) (1) $\Leftrightarrow$ (2) : Swan

(1) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) : Artin-Tate

(1) $\Leftrightarrow$ (5) : Landweber

(5) $\Leftrightarrow$ (6) : Conner-Smith

上の条件を満足する有限群は完全に決定されている。

命題 1.4. (Landweber)

G の p -syllow 群を H とする時、下の split exact 列がある。

$$0 \rightarrow \tilde{\Omega}_{*}^U(BG)_{(p)} \xrightarrow{t} \tilde{\Omega}_{*}^U(BH) \xrightarrow{j_*} \tilde{\Omega}_{*}^U(BG)_{(p)} \rightarrow 0.$$

但し t は transfer 準同型、 $()_{(p)}$ は p -成分を表わす。

定義 1.5.

有限群 G の複素表現 ρ が、単位元以外の g に対しては $\rho(g)$ が 1 を固有値として持たないとき、 ρ を 自由な表現 という。 G が自由な表現 $\rho: G \rightarrow U(d, \mathbb{C})$ を持てば、 G は S^{2d-1} に自由 (かつ線型) に作用するから、命題 1.3 の条件を満足するが、さらに次が成り立つ事が容易にわかる。

命題 1.6.

次の exact triangle が存在する。 ($m \geq 1$)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Omega}_{*}^U(S^{2d-1}, \rho) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{\Omega}_{*}^U(S^{2(m+1)-1}, (m+1)\rho) \\ \uparrow \alpha & \nearrow j_* & \downarrow \Delta: \text{Smith Hom} \\ \tilde{\Omega}_{*}^U(S^{2(m+1)d-1}, \rho^{2d-1}; (m+1)\rho) & \cong & \tilde{\Omega}_{*}^U(S^{2md-1}, m\rho). \end{array}$$

但し、 $\tilde{\Omega}_{*}^U(S^{2(m+1)-1}, (m+1)\rho)$ により、 G 空間 $(S^{2(m+1)-1}, (m+1)\rho)$ の equivariant ユニタリー・ホルディズム 加群を表わす。

注意 1.7. 実は、命題 1.3, 1.4 と後出の 3.3 により、次の exact 列が存在する事がわかる。

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow \Omega_*^U \{ (\#G) \cdot [S^{2d-1}, f, id] + \text{higher filtration terms} \} &\xrightarrow{\text{incl}} \\
\tilde{\Omega}_*^U(S^{2d-1}, f) &\xrightarrow{i_*} \tilde{\Omega}_*^U(S^{2(m+1)d-1}, f) \xrightarrow{\Delta} \tilde{\Omega}_*^U(S^{2md-1}, f) \\
&\rightarrow 0.
\end{aligned}$$

但し $\#G$ は G の元の個数を表わす。

§2. 一般四元数群のボルディズム加群の生成元

命題 1.3 の (4) で出て来た一般四元数群とは、次の様にして定義される有限群である。

定義 2.1. 一般四元数群 Q_j とは、

$$Q_j = \{x, y; x^j = y^2, xyx = y\}; j \geq 1$$

で定義される有限群である。以下、簡単のため、 $j = 2k$ (偶数の場合のみ取りあつかうことにする。 Q_{2k} の自由な 2 次元複素表現

$$x \mapsto \begin{bmatrix} \exp(2\pi i/4k) & 0 \\ 0 & \exp(-2\pi i/4k) \end{bmatrix}, \quad y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を χ と書き、 $n\chi$ によって定義される S^{4n-1} 上の自由な Q_{2k} -作用を (S^{4n-1}, χ) と書くことにする。すると、

$$BQ_{2k} = \lim_{n \rightarrow \infty} S^{4n-1} / \chi$$

としてよい。

補題 2.2.

$$\tilde{H}_{2i}(BQ_{2k}; \mathbb{Z}) = 0, \quad H_{4i+3}(BQ_{2k}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{8k}([S^{4i+3}/\chi])$$

$H_{4i+1}(BQ_{2k}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2(i_*^{(1)}[S^{4i+1}/Z_{4k}]) \oplus \mathbb{Z}_2(i_*^{(2)}[S^{4i+1}/Z_4])$
 但し, $i^{(1)}: BZ_{4k} \rightarrow BQ_{2k}$, $i^{(2)}: BZ_4 \rightarrow BQ_{2k}$ は,
 inclusions $Z_{4k}(x) \subset Q_{2k}$, $Z_4(y) \subset Q_{2k}$ から induce される写像を表わす。

系 2.3.

$\Omega_*^U(Q_{2k})$ は Ω_*^U -加群とし $\{[S^{4i+3}, \chi], i_*^{(1)}[S^{4i+1}, T_{(4k,1)}], i_*^{(2)}[S^{4i+1}, T_{(4,1)}]; i \geq 0\}$ によって生成される。但し,
 $(S^{4i+1}, T_{(m,1)})$ は, $S^{4i+1} \subset \mathbb{C}^{2i+1}$ 上の標準的な $\mathbb{Z}_m$ の線型作用を表わす。

命題 2.4. (Kasparov)

$n_1, n_2, \dots, n_{m+1}$ を m と素な整数とするととき、ボルディスムのクラス

$$[L^m(m; n_1, n_2, \dots, n_{m+1}), f] \in \Omega_{2m+1}^U(BZ_m)$$

は、

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} [L^i(m, 1, 1, \dots, 1), \tau] X^i \right) \left(\prod_{j=1}^{m+1} \frac{X}{[n_j]_F(X)} \right)$$

の X^m の係数に等しい。但し, f は $\mathbb{Z}_m$ -主バンドルの分類写像で, τ は自然な包含写像、また $[n_j]_F$ はコボルディスム形式群 $F(X, Y)$ による形式的 n_j 倍を表わす。

補題 2.5.

$$t^{(1)}: \Omega_{\ast}^U(\mathbb{Q}_{2k}) \rightarrow \Omega_{\ast}^U(\mathbb{Z}_{4k})$$

$$t^{(2)}: \Omega_{\ast}^U(\mathbb{Q}_{2k}) \rightarrow \Omega_{\ast}^U(\mathbb{Z}_4)$$

を transfer 準同型とすると、以下が成り立つ。

$$(1) \quad t^{(1)} \circ i_{\ast}^{(1)} [S^{2n-1}, T_{(4k, 1)}] = [S^{2k-1}, T_{(4k, 1)}] + [S^{2n-1}, T_{(4k, -1)}]$$

但し、 $(S^{2n-1}, T_{(4k, -1)})$ は $(S^{2n-1}, T_{(4k, 1)})$ と共役な線型作用を表わす。

$$(2) \quad t^{(2)} \circ i_{\ast}^{(2)} [S^{2n-1}, T_{(4, 1)}] = [S^{2n-1}, T_{(4, 1)}] + [S^{2n-1}, T_{(2, 1)}] \\ + (k-1) i_{\ast}^{2,4} [S^{2n-1}, T_{(2, 1)}]$$

但し、 $i_{\ast}^{2,4}: \Omega_{\ast}^U(\mathbb{Z}_2) \rightarrow \Omega_{\ast}^U(\mathbb{Z}_4)$ は、 $\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_4$ から引き起こされる自然な準同型。

$$(3) \quad t^{(2)} \circ i_{\ast}^{(1)} [S^{2n-1}, T_{(4k, 1)}] = i_{\ast}^{2,4} [S^{2n-1}, T_{(2, 1)}]$$

$$(4) \quad t^{(1)} \circ i_{\ast}^{(2)} [S^{2n-1}, T_{(4, 1)}] = i_{\ast}^{2,4k} [S^{2n-1}, T_{(2, 1)}]$$

$$(5) \quad t^{(1)} [S^{4i+3}, \chi] = [S^{4i+3}, (\tau \oplus \bar{\tau})_{(4k)}]$$

但し、 $[S^{4i+3}, (\tau \oplus \bar{\tau})_{(4k)}]$ は、命題 1.1 の同型で、 $[L^{2i+1}(4k; 1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1), f]$ に対応するクラスを表わす。

$$(6) \quad t^{(2)} [S^{4i+3}, \chi] = [S^{4i+3}, (\tau \oplus \bar{\tau})_{(4)}]$$

補題 2.6.

$$i_{\ast}^{2,2^m} [S^{2n-1}, T_{(2, 1)}] = 2^{m-1} [S^{2n-1}, T_{(2^m, 1)}] + 2^{m-1} [cp_1] [S^{2n-3}, T_{(2^m, 1)}]$$

$$+ 2^{m-1} [CP_1]^2 [S^{2n-5}, T_{(2^m, 1)}] + 2^{m-1} (\delta_1 [X_3] + \delta_2 [CP_2][CP_1] + \delta_3 [CP_1]^3) \cdot [S^{2n-7}, T_{(2^m, 1)}] + \dots$$

但し、 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ はそれぞれ 0 または 1 であり、 $[X_3] = -[H_{2,2}] - [CP_3]$ は Ω_*^U の 6 次元の polynomial generator を表わす。

命題 1.3 (4) より、 $2k = 2^{m-1}$ ($m \geq 2$) の場合が重要なので、以下は簡単のために $Q_{2^{m-1}}$ について話を進める。 $\Omega_*^U(Z_j)$ について知られている結果と、補題 2.4, 2.5, 2.6 を合わせると、系 2.3 の生成元に対して次の結果を得る。

命題 2.7

$\Omega_*^U(Q_{2^{m-1}})$ ($m \geq 2$) において、

- (1) $\text{order } i_*^{(1)} [S^{2n-1}, T_{(2^m, 1)}] = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ 2^{n-2+m} & (n \geq 2) \end{cases}$
- (2) $\text{order } i_*^{(2)} [S^{2n-1}, T_{(4, 1)}] = 2^n \quad (n \geq 1)$
- (3) $\text{order } [S^{4n-1}, \chi] = 2^{2n+m-1} \quad (n \geq 1)$

(注) 広大(理)の勝部豊氏も同様の結果を出している。

系 2.8.

可換群として、 $\tilde{\Omega}_{2n}^U(Q_{2^{m-1}}) \cong 0$,
 $\tilde{\Omega}_{4n-1}^U(Q_{2^{m-1}}) \cong Z_{2^{2n+m-1}} \oplus (\bigoplus_i Z_2 \mu_i)$

$$\begin{aligned}
 & (\mu_i \leq 2n+m-2) \\
 & \tilde{\Omega}_{4n-3}^U(Q_{2^{m-1}}) \cong (1+\delta_{m,2})Z_{2^{2n+m-3}} \oplus \left(\bigoplus_j Z_{2^{\nu_j}} \right) \\
 & (\nu_j \leq 2n+m-4)
 \end{aligned}$$

§3. $\Omega_*^U(Q_{2^{m-1}})$ の Ω_*^U -加群としての構造

定義 3.1. $\rho: \mathbb{Z}_k$ の標準的複素 1 次表現

$\bar{\rho}: \rho$ の共役表現とするとき

$$(S^{2n-1}, (T \oplus \bar{T})_{(\mathbb{R})}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (n=2n'+2\pm) & n'(\rho \oplus \bar{\rho}) \text{ から定義される} \\ & S^{2n-1} \text{ 上の } \mathbb{Z}_k\text{-作用} \\ (n=2n'+1) & \bar{\rho} \oplus n'(\rho \oplus \bar{\rho}) \text{ から定義さ} \\ & \text{れる } S^{2n-1} \text{ 上の } \mathbb{Z}_k\text{-作用} \end{cases}$$

補題 3.2.

$$\Delta \circ i_*^{(1)} [S^{2n-1}, (T \oplus \bar{T})_{(2^m)}] = i_*^{(1)} [S^{2n-5}, (T \oplus \bar{T})_{(2^m)}]$$

$$\Delta \circ i_*^{(2)} [S^{2n-1}, (T \oplus \bar{T})_{(4)}] = i_*^{(2)} [S^{2n-5}, (T \oplus \bar{T})_{(4)}]$$

ここで、命題 2.4 を用いれば、系 2.3 の生成元 $i_*^{(1)}[S^{4i+1}, T_{(2^m, 1)}]$, $i_*^{(2)}[S^{4i+1}, T_{(4, 1)}]$ を $i_*^{(1)}[S^{4i+1}, (T \oplus \bar{T})_{(2^m)}]$, $i_*^{(2)}[S^{4i+1}, (T \oplus \bar{T})_{(4)}]$ で置き換えてよく、この新しい生成元に対して補題 2.5 と類似の transfer に関する補題を用いて計算すると、次の様な結果が得られる。

命題 3.3.

$1 \leq n \leq \infty$ とするとき、equivariant 自由ボルディズム加群 $\tilde{\Omega}_*^U(S^{4n-1}, \chi) \cong \tilde{\Omega}_*^U(S^{4n-1}/\chi)$ は Ω_*^U -加群として、 $\{[S^{4i-1}, \chi], i_*^{(1)}[S^{4i-3}, (T \oplus \bar{T})_{(2^m)}], i_*^{(2)}[S^{4i-3}, (T \oplus \bar{T})_{(4)}]; n \geq i \geq 1\}$ で生成される自由 Ω_*^U -加群を、下に定義する $\{\Phi_i; n-1 \geq i \geq 1, \psi_i^{(1)}, \psi_i^{(2)}; n \geq i \geq 1\}$ で生成される Ω_*^U -部分加群で割った商加群である。但し、

$$\Phi_i = 2^{m+1}[S^{4i-1}, \chi] + 2^{m-1}[CP_1]^2[S^{4i-5}, \chi] + (2^{m-2}[CP_3][CP_1] + 2^m[N])[S^{4i-9}, \chi] + \dots \quad ([N] \in \Omega_8^U)$$

$$\psi_i^{(1)} = 2i_*^{(1)}[S^{4i-3}, (T \oplus \bar{T})_{(2^m)}] - 2[CP_1][S^{4i-5}, \chi] + [CP_1]^2 i_*^{(1)}[S^{4i-7}, (T \oplus \bar{T})_{(2^m)}] + ([CP_3] - 2[CP_2][CP_1])[S^{4i-9}, \chi] + \dots$$

$$\psi_i^{(2)} = 2i_*^{(2)}[S^{4i-3}, (T \oplus \bar{T})_{(4)}] + (2^{m+1} + 2^m)[CP_1][S^{4i-5}, \chi] + [CP_1]^2 i_*^{(2)}[S^{4i-7}, (T \oplus \bar{T})_{(4)}] + (2^{m-2}[CP_3] - (2^{m+1} - 2^{m-1})[CP_2][CP_1] + 2^{m-1}[CP_1]^3)[S^{4i-9}, \chi] + \dots$$

そして、 Φ_i の右辺には $i_*^{(1)}[S^{4j-3}, (T \oplus \bar{T})_{(2^m)}]$ の type の生成元に関する項は現れない。また $\psi_i^{(1)}$ の右辺には $i_*^{(2)}[S^{4j-3}, (T \oplus \bar{T})_{(4)}]$ の type の生成元に関する項は現れず、他の type に関する項の係数は m に無関係。さらに $\psi_i^{(2)}$ の右辺には $i_*^{(1)}[S^{4j-3}, (T \oplus \bar{T})_{(2^m)}]$ の type の生成元は現れない。

各 i について $\Omega_i^U(Q_{2^{m+1}})$ の群構造を完全に決定するには、 $\Phi_i, \psi_i^{(1)}, \psi_i^{(2)}$ の右辺の係数についてもっと調べる必要がある。