

Fox's congruence modulo $(2,1)$

神大 中西康剛 (Yasutaka Nakanishi)

定義. 3次元球面内の1次元結び目 (S^3, K) に対し, K と交わらぬ平凡な結び目 $\bigcirc$ で $\pm\frac{1}{2}$ -surgery すると新しい結び目 (S^3, K^*) が得られる. このような結び目の変形の有限列で, 2つの結び目がうつりあうとき, これらは congruent modulo $(2,1)$ であるという. (Fox[1] は, surgery の係数, $lk(K, \bigcirc)$ 等から congruence mod (n, g) を定義しているが, 本稿では必要がないので省略する.)

それでは 結び目の congruence class が いくつあるかであるが, 次の予想がある.

予想C 全ての結び目は, congruent modulo $(2,1)$ である.

なお、絡み輪に拡張して考えた時には、先の変形が絡み輪の成分間の絡み数を変えないことから、この予想は成り立たない。(例. Hopf-link  と 2-comp. trivial link )

予想A, Bも列挙しておくと次の通りです.

予想B 全ての結び目は, congruent modulo $(2, 2)$ である.

予想A 全ての結び目は,  $\leftrightarrow$  $\leftrightarrow$  の変形の有限列でうつりあう.

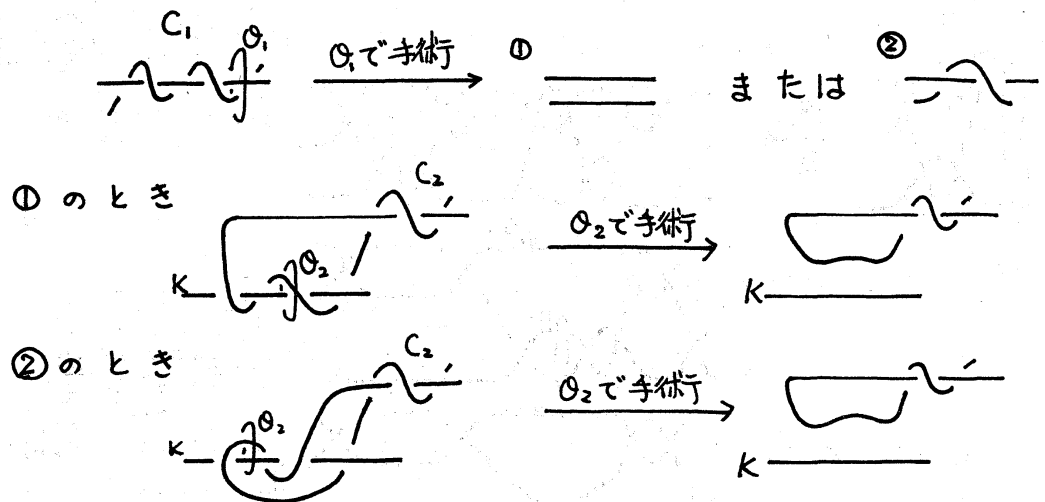
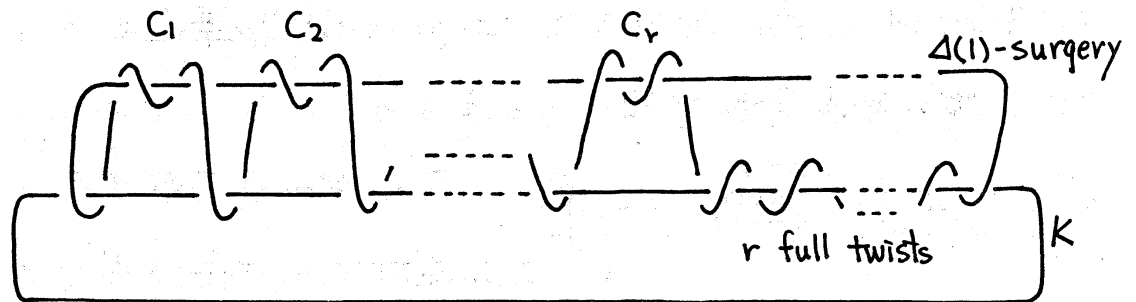
なお, $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ の関係があるわけですが, 予想Aに対しては, 1983年10月K O O K セミナーで, 特殊な 3-braid knots と 10-crossings までの結び目については成り立つことを示しました.

本稿では, 予想Cが 全ての 3-braid knots について成り立つことと, その確からしさの一面を Alexander 多項式から照らしてみよう.

命題. $\Delta(t)$ を結び目多項式とする (すなわち, $|\Delta(1)|=1$ $\Delta(t^{-1}) = \Delta(t)$ をみたす Laurent 多項式). この時, $\Delta(t)$ を

Alexander 多項式とする結び目 K で, 平凡な結び目と congruent modulo $(2, 1)$ であるものがある.

証明概略. Levin による surgery description で, 次の図で与えられる結び目 K の Alexander 多項式は $\Delta(t) = C_r(t^r + t^{-r}) + C_{r-1}(t^{r-1} + t^{-(r-1)}) + \cdots + C_1(t + t^{-1}) + C_0$ である. (図では, $C_r = -2, \dots, C_2 = 2, C_1 = 3$ である.)

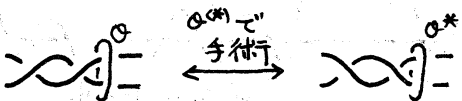


こうした変形のくり返しにより, 平凡な結び目の surgery description が得られる. ■

問題. $\Delta(t)$ を結び目多項式, K を結び目とする. これらをどのようにとっても, $\Delta(t)$ を結び目多項式とし, かつ, K と congruent な結び目 K^* があるか.

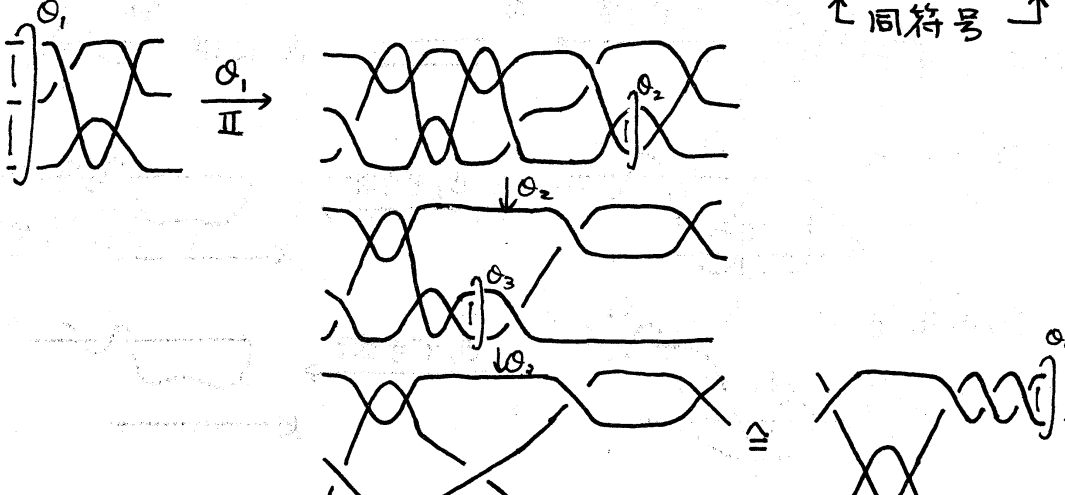
先の命題で, Alexander 多項式の congruence に関する障害はないと言, た所, 作問氏より上の問題が出た. 残念ながら未解決です.

3-braid knots がすべて congruent であることを示すために, 次の基本変形 I, II, III を考える.

I)  $\xrightarrow{\theta_1 \text{ with twist}} \dots$ θ_2 そこで ② 

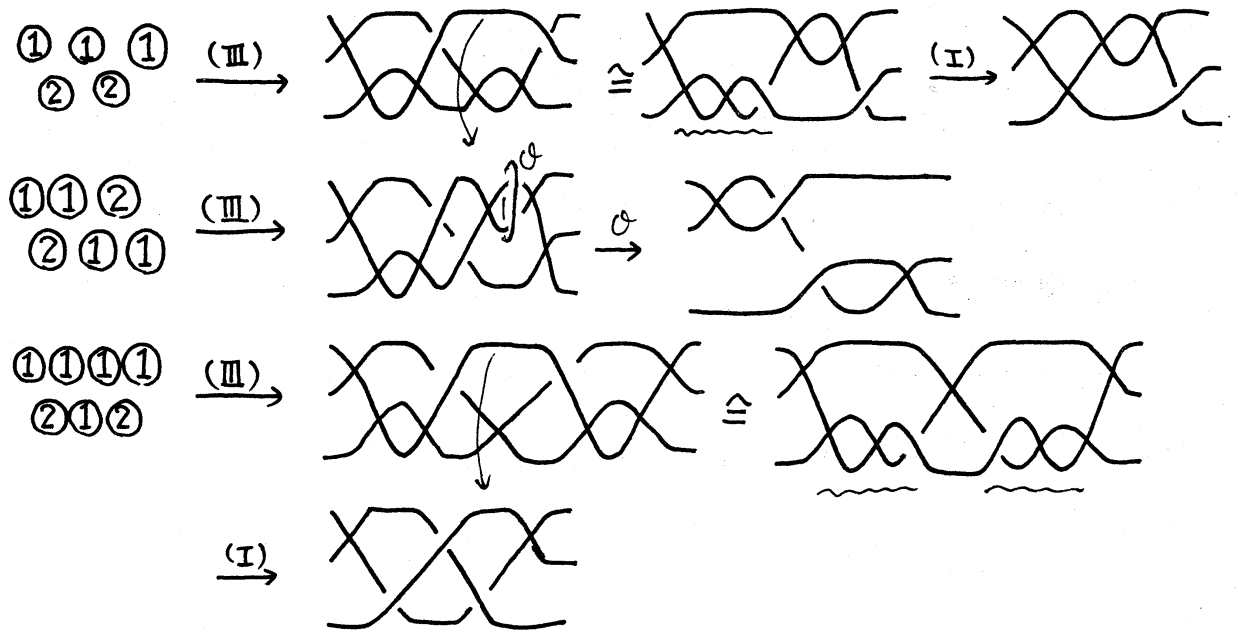
① ,  だけで良い.

II)  $\xrightarrow{\theta_1 \text{ with twist}} \dots \xrightarrow{\theta_2 \text{ with twist}} \dots$ ↑ 同符号 ↑

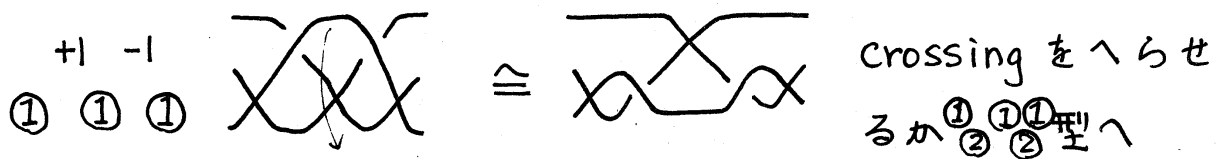
III)  $\xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{\theta_2} \dots \xrightarrow{\theta_3} \dots \xrightarrow{\theta_4} \dots$

註. III の重要なところは②の隣の①の
符号を同時に変えるところである.

つまり, I の変形で 3-braid を ①, ② だけにした後, ② が隣りあっておれば, III の変形で crossings を減らせる. 以下, この crossing に関する induction で示す.

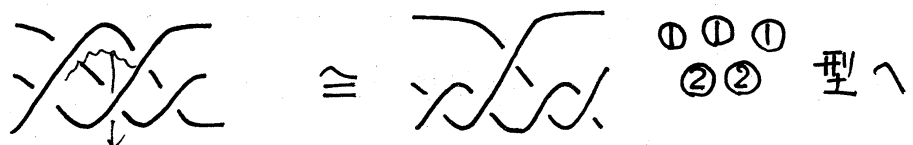


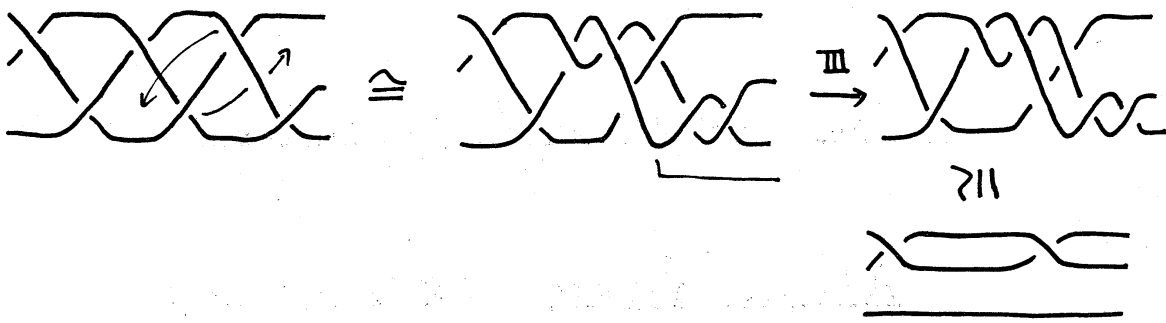
以上から, ① が 4 個以上続くとして良い. また, ② があれば, (III) を用いて 次のパターンを crossings をふやさずに作れる.



故に, あと考えなくてはいいけないのは 次の 2 タイプ.

$$\begin{array}{ccccccc} +1 & +1 & +1 & +1 & \cdots & +1 & +1 & +1 & +1 & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & & +1 & +1 & +1 & +1 \cdots \end{array} \quad \text{と}$$





これらの変形を施せば, 10-crossings 以下にはなる. そこで, KOOK セミナー (予想 A) だけで, 平凡な結び目に congruent であるを示せる. ■

参考文献

- [1] R.H.Fox "Congruent classes of knots" O.J.M. vol.10