

閾値分布結合系による世論形成モデル

関西学院大学・総合政策学部 井垣 伸子 (Nobuko Igaki)
School of Policy Studies,
Kwansei Gakuin University
名古屋工業大学・おおい領域 大鑄 史男 (Fumio Ohi)
Omohi College,
Nagoya Institute of Technology

1 はじめに

1970年代数理社会学の分野において、Granovetter[1]は、つぎのような集合現象についての離散時間型閾値モデルを提唱した。今、あるグループ内に n 人の人がいるとして、グループ内の各人は閾値と呼ばれる値をもち、暴動に参加している人の数がこの閾値以上になればその者も暴動に参加する。この n 人の閾値分布と初期状態（暴動に参加しているかいないか、どちらかの状態）が与えられれば、初期状態から各人の状態がどのように推移していくかが確定する。

これは1次元モデルであるが、Granovetter[1]、石井[7]、松田[3]では、2次元の閾値をもつモデルも扱われている。今回我々が注目したのは、流行現象をとらえた松田の2次元閾値モデルである。松田モデルにおいては、暴動なり、流行なりに参加する閾値のほかに、参加をとりやめる限界の閾値が採用されている。つまり、グループ内の各人が、参加する閾値（下限閾値）と参加を取りやめる閾値（上限閾値）の2つの閾値をもつ。Granovetterの単純な暴動モデルでは、全員参加か、途中の割合で参加率が止まる場合の2種類の結果しか出てこないが、松田モデルでは、収束、周期に加えて、カオス的な振舞いをする場合や、一回だけ爆発的に流行ってその後衰退するような場合など、バラエティーに富む結果が、モデルを決定しているパラメータの違いによって生ずることがわかっている。

さて、今回の我々の問題意識は、松田モデルを想定した複数のグループにおける流行現象を考えると、グループ相互の影響を考慮すると、全体としてどのような現象が起こるのかというものである。もともとカオスシステムの結合系というモデルは、日本発のものであり、金子邦彦[5]らにより物理・生物現象を対象にした研究が行われている。我々の研究は、この結合系というモデルを普及現象という社会現象に応用しようというひとつの試みである。

2 グループ内における普及の影響について

m 個のグループで、あることが普及し始めているとする。グループ内の各人がその流行に参加するかしないかは、グループ内の普及状況に影響され、また、グループ間でもそれらの普及状況が互いに影響を与える

*1 本研究の一部は、文部科学省科学研究費補助金基盤研究(C)(2)(課題番号15510125)のもとで行われた。

とする。

まず、グループ内の影響関係を松田 [3] に従って説明しよう。グループ内の各人はそれぞれ、その個人の属するグループ内の普及率がある閾値以上であればその流行にのるという下限閾値と、グループ内の普及率がある閾値以上になればその流行から降りるという上限閾値の二つの閾値を持つ。したがって、上限閾値は下限閾値よりも必ず大きい。各グループ内で、そのグループに属する個人がどのような閾値を持っているかは、いろいろ想定することができるが、ここではそれらは、図 1 のように各人の（下限閾値，上限閾値）を平面上にプロットしたとき、左上三角形の部分に一樣に分布していると想定する。この三角形は、 $(0, a), (0, 1), (1-a, 1)$ の 3 点を頂点とする三角形であり、 $0 \leq a < 1$ とする。このパラメータ a の値は、すべてのグループにおいて共通であると仮定する。

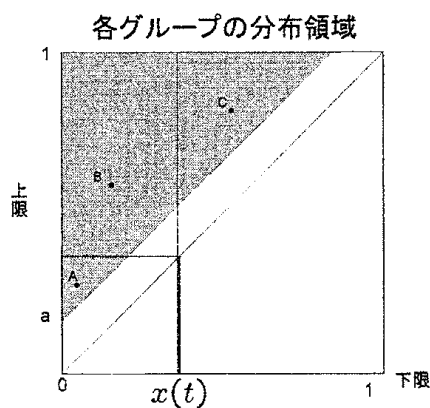


図 1: 各グループの分布領域

今、あるグループの時刻 t における普及率が $x(t)$ であったとすると、つぎの時刻に普及が及ぶ個人は、 $x(t)$ よりも小さな下限閾値を、また同時に、 $x(t)$ よりも大きな上限閾値をもっていなければならない。するとたとえば、図 1 のような位置に $x(t)$ があるときには、点 A の閾値を持つ個人は、 $x(t)$ が点 A の上限閾値を越えているため、早くもこの流行から降りるのであり、また、点 C の閾値を持つ個人は、 $x(t)$ が点 C の下限閾値に達していないため、まだこの流行にのらないことになる。したがって、この段階では、左上三角形全体のうち点 B をふくむ 5 角形の部分に閾値を持つ人たちが、次の時刻にこの流行に乗る人たちである。つまり、次の時刻の普及率は、この 5 角形の部分の面積を左上三角形全体の面積で割ったものになる。このように考えると、現在の普及率 $x(t) = x$ に対して、次の時刻の普及率 $x(t+1) = f(x)$ はつぎのように求まる。

$0 \leq a \leq 0.5$ の場合

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(2-x-2a)}{(1-a)^2}, & 0 \leq x \leq a \\ \frac{2x(1-x)-a^2}{(1-a)^2}, & a < x \leq 1-a \\ \frac{(x-2a+1)(1-x)}{(1-a)^2}, & 1-a < x \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

$0.5 < a < 1$ の場合

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(2-x-2a)}{(1-a)^2}, & 0 \leq x \leq 1-a \\ 1, & 1-a < x \leq a \\ \frac{(x-2a+1)(1-x)}{(1-a)^2}, & a < x \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

ちなみに、この関数は、 $a = 0.5$ のときは単純に $f(x) = 4x(1-x)$ となり、これはカオス的挙動をするロジスティック関数としてよく知られているものである。図 2 は、いろいろな a の値に対する $f(x)$ のグラフである。これを見ると、 $a > 0.5$ の場合は、 $f(x)$ の値が 1 になるような x の区間が存在することがわかる。一旦、1 になった普及率は、次のステップでは、必ず 0 になる。つまり、全員に普及したとたんに、普及率が 0 になるのである。松田 [3] では、このような結果が不自然であるとして、モデルの改良版を提唱しているが、この論文では結合系を考える最初から設定が複雑になりすぎることを恐れ、この改良版には言及せず、オリジナルの閾値関数を使用し、まずはそれらを結合させることに重きをおいた。

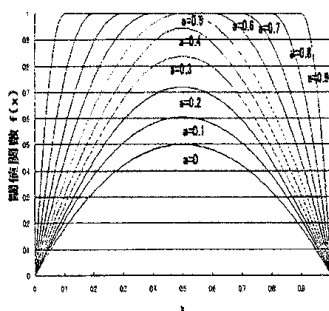


図 2: いろいろな a の値に対する $f(x)$ の形

さて、グループがひとつの場合、そのグループの普及率の挙動については、松田 [3] により研究されており、 a の値が 0 から 0.2 あたりまでは 1 点に収束、その後、 a の値が 0.37 あたりまでは周期的に変化し、さらに、 a の値をそれ以上まで上げると、カオスになる。また、 a の値が 0.5 より大きくなると、一回爆発的に普及して、その後、死に絶えるというパターンになることがわかっている。

3 グループ間における影響の設定

つぎに、グループ間における普及の影響について、説明する。いま、時刻 t におけるグループ i ($i = 1, 2, \dots, m$) の普及率を $x_i(t)$ で表す。また、 $\mu(t)$ を、次式のように、時刻 t における普及率の平均とし、これを全体普及率と呼ぶ。

$$\mu(t) = \frac{\sum_{i=1}^m x_i(t)}{m} \quad (3)$$

このとき、グループ i の時刻 t における普及率 $x_i(t+1)$ を次のように、グループ i 独自の動きと、全体普及率 $\mu(t)$ の重み付け和で定義する。

$$x_i(t+1) = c_1 f(x_i(t)) + c_2 \mu(t), \quad c_1 + c_2 = 1, \quad 0 \leq c_1, c_2 \leq 1 \quad (4)$$

ここでの重み係数 c_1, c_2 は、グループ i によらず一定であると仮定する。

グループ i の普及率が全体普及率の影響をこのような形で受けるということは、言い換えれば、他のグループそれぞれから等しく影響を受けると解釈することもできる。また、関数 f のパラメータ a も重み係数 c_1, c_2 もグループに共通であることから、どのグループ間も対等な立場であると想定されている。

4 全体からの影響による結果

パラメータ a の値が 0 から 0.2 あたりまでは各グループの普及率は、全体普及率の影響がまったくない場合 1 点に収束する。これらのグループからなる結合系においては、初期状態によらず収束する点が同じなので、全体普及率の影響が働く場合でも、そこからの影響は収束点に関してはみられない。

パラメータ a の値が 0.2 以上 0.37 以下のあたりでは、全体普及率の影響がまったくない場合、各グループの普及率は 1 点に収束するが、これらのグループからなる結合系においては、全体からの影響が強まるにつれて、複数のグループが連動して周期的な挙動を見せる。つまり、グループ全体がいくつかの集まりに分割され、それぞれの集まりは単一の挙動を引き起こす。さらに、全体の影響を強めると、図 3 に見られるように、すべてのグループの挙動が同一化し、ひとつの周期に引き込まれる現象が見られた。

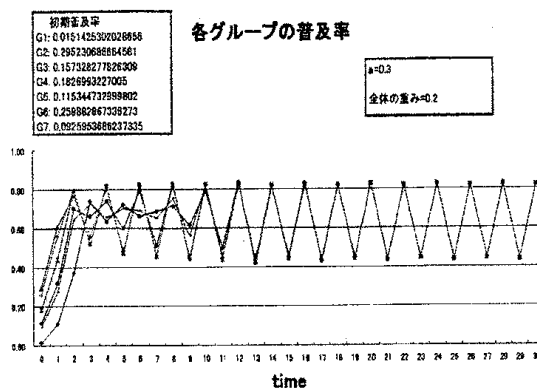


図 3: 7つのグループの普及状態の時間的変化 (同じ周期に引き込まれる例)

パラメータ a の値が 0.37 以上であるようなカオスの性質をもつグループの結合系においては、全体からの影響の加減によって、周期的になったり、擬似周期的になったりするが、全体からの影響が強すぎると、すべてのグループの挙動が同一化し、単一グループであるかのようにしてカオスの挙動を示すことがわかった。図 4 は、全体からの影響がない場合に各グループの普及率がカオス的に変化している様子を表している。図 5 は、これとまったく同じ初期状態で、全体影響のパラメータ c_2 の値を少しずつ上げていくと、各グループの普及率に構造が現れる様子を、そして、図 6 は、 c_2 の値をさらに上げた場合、いくつかのグループが組をつくり、その組ごとに 2 周期、4 周期の振舞いをする例を示している。

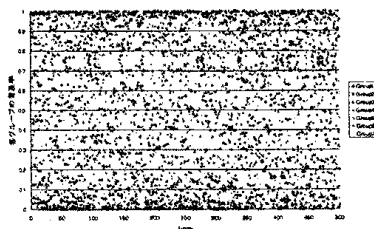


図 4: 7つのグループの普及状態の時間的変化 ($c_2 = 0$ の場合)

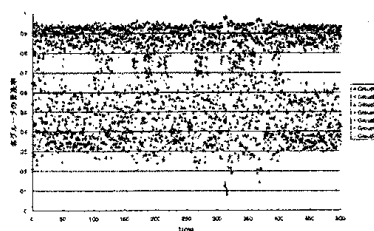


図 5: 7つのグループの普及状態の時間的変化 ($c_2 = 0.2$ の場合)

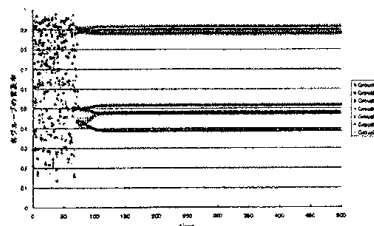


図 6: 7つのグループの普及状態の時間的変化 ($c_2 = 0.3$ の場合)

5 パラメータ a が変わるときの構造的変化

1つのグループの場合の場合には、パラメータ a の値が大きくなるにつれて、「収束」→「周期」→「カオス」→「爆発的普及後死滅」の順にその力学の様相を変えていくが（松田 [3] を参照すること）、結合系の場合にはこのような単純な推移は見られず、一旦カオスになった後にも、再び周期的挙動が現れることがある。特徴的なのは、 a の値が 0.5 を超えても、普及が死滅しないことが頻繁にあることである。その原因を調べたところ、ほとんどのグループが死滅しているのに、ひとつのグループでも生き残っていれば（正の普及率をもっていれば）、それらの重みつき平均をとって次の普及率が決まるために、ゼロから正の普及率へと復活するためであった。そして、これがグループ間で交互にバランスよく助け合うようなことが起こる場合に、ずっと生き残り続ける現象がみられるのである。しかし、 a の値が非常に高くなってしまえば、このように生き残ることは起こらなくなる。

図 7 は、 $a = 0.75$, $c_2 = 0$ の場合であり、7つのグループとも早々に普及率が 0 に吸収されてしまう様子を表している。 $c_2 = 0$ のときは必ず、 a の値が 0.5 を超えるとこのような振舞いを起こす。図 8 では図 7 とまったく同じ初期値からスタートしているにもかかわらず、 $c_2 = 0.1$ であることによって、いつまでも普及率が 0 に落ち込まないで生き残っている例を示している。この図をよく見ると、7つのグループが2つの組に分けられ、組内ではまったく同じ周期的振舞いをしているが、2つの組の間で互いに影響しあって、安定的な振舞いを示していることがわかる。

6 生き残り初期値マップについて

前のセクションの結果として、 a の値が 0.5 を超えても、普及率が死滅しないことが頻繁にあることがわかった。 a の値も c_2 の値も同じであるとき、グループ普及率が死滅するかどうかは、初期値に依存する。図 9 と図 10 は、グループ数が2のときに、2次元で与えられる初期値（2つのグループそれぞれの初期普及率）に対して、そのプロセスが将来死滅する場合を黒い点で表示したものである。これを見ると、これらの図がフラクタル構造をもっているように思える。また、これら両図の左側の全体マップには、対角線に関する対

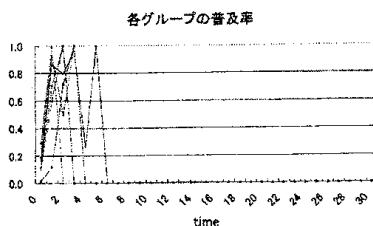


図 7: 7つのグループの普及状態の時間的变化 ($a = 0.75, c_2 = 0$ の場合)

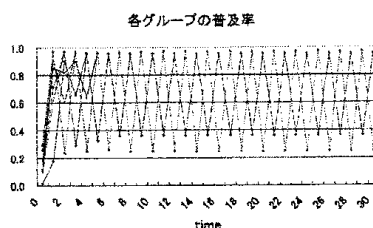


図 8: 7つのグループの普及状態の時間的变化 ($a = 0.75, c_2 = 0.1$ の場合)

称性と、中線に関する対称性が見られる。前者は、普及率 $f(x)$ の区間 $[0, 1]$ における対称性から、後者は、二つのグループ間の対称性からきている。

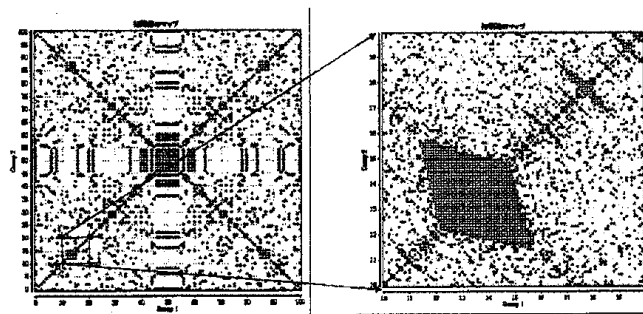


図 9: 生き残り初期値マップとその拡大図 ($a = 0.54, c_2 = 0.2$)

7 分岐図について

図 12 の分岐図は、全体普及率の重み c_2 が 0.18 の場合に、 a の値を 0.01 刻みに動かし、各 a の値に対して、ランダムに決めたある初期値からスタートした 7 つのグループの結合系における各グループの普及率の時間発展（軌道）をプロットしたものである。具体的には、最初の 200 ステップは捨てて、201 ステップ目から 237 ステップ目までの普及率を、縦に並べて同じ横軸目盛り上にプロットした。これをみると、まず a の値が 0 から 0.2 すぎあたりまでは、7 つのグループが同じ点に収束することがわかる。その後、2 周期、4 周期、・・・、と、周期的な振舞いが起こり、それよりも a の値が増加するとカオスの振舞いになる。

その後は、前のセクションで述べたように、 a の値が 0.5 を超えても、正の普及率をもつ場合がある様子

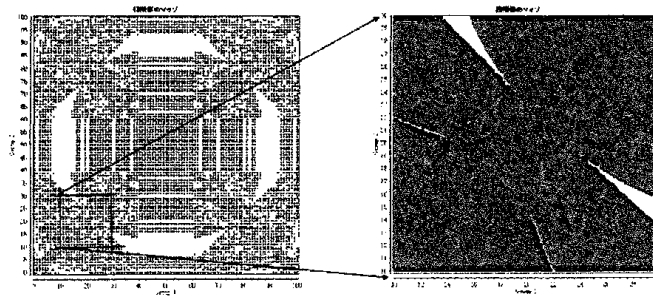


図 10: 生き残り初期値マップとその拡大図 ($a = 0.6, c_2 = 0.2$)

が表されている。 a の値が 0.6 あたりの場所では、2 周期に近いような現象が、また、 a の値が 0.75 あたりの場所では、4 周期に近いような現象が見られる。

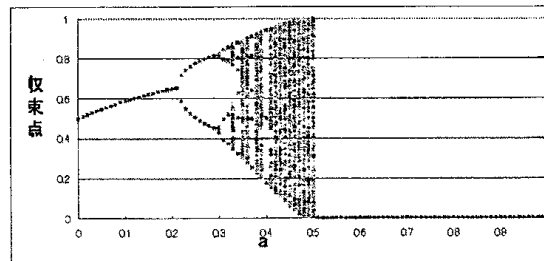


図 11: 分岐図の例 ($c_2 = 0$ の場合)

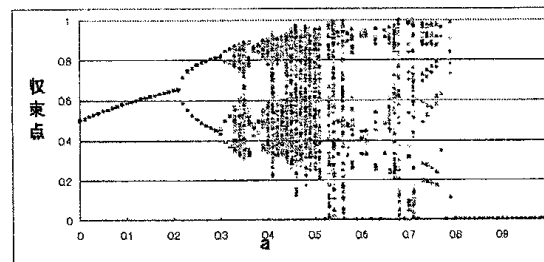


図 12: 分岐図の例 ($c_2 = 0.18$ の場合)

8 むすび

本研究では、普及現象を定性的に理解するための理論モデルとして、離散時間型力学系の結合系を用いることの可能性を示唆し、ひとつのグループでは見られなかった現象を報告することができた。今回対象としなかったカオス結合系で金子が用いた力学系 $1 - ax^2$ や他の力学系を用いた場合も興味のあるところであるし、あるいは、結合の仕方を他の方法に変えた場合にどうなるかについても今後の課題である。

このような普及現象を扱うモデルは、Granovetter[1] にもあるように、革新技术の普及、噂のひろがり、病気の感染、ストライキ行動、投票行動、学歴志向、逸脱行動、移民、"Risky Shift" (より不安定な状態へ

の転職など)など,さまざまな意思決定行動に応用される可能性がある。しかし,実際の事例に応用すると
なると,対象となっている人の閾値をどのように測ればよいのかという問題が出てくる。また,本研究で
は定性的な理論モデルとして,力学系的な側面からのシミュレーション結果を得たにすぎないが,これらの
結果を実際に即していかに理解するかということも残されている問題である。

参考文献

- [1] Mark Granovetter, Threshold Models of Collective Behavior, *American Journal of Sociology*, Vol.83,pp1420-1443, 1966.
- [2] 石井健一, "世論過程の閾値モデル", 理論と方法, Vol.2, No.1, 15-28, 1987.
- [3] 松田光司, "流行現象とベクトル型閾値モデル", 理論と方法, Vol.11, pp113-128, 1996.
- [4] 山口昌哉, 「カオス入門」, 朝倉書店, 1996.
- [5] 金子邦彦, 津田一郎, 「複雑系のカオスのシナリオ」, 朝倉書店, 1996.
- [6] 井庭崇, 福原義久, 「複雑系入門」, NTT 出版, 1998.
- [7] 石井健一, 「情報化の普及過程」, 学文社, 2004.