

shifted plane partitionの母関数

東大理 岡田 聡一 (Soichi Okada)

§0 Introduction.

(shifted) plane partition の母関数を用いて, 別の対象の母関数や個数を求めることがよくある. ここでは, partially strict shifted plane partition の母関数と, その応用として monotone triangle の母関数について述べたい.

まず, shifted plane partition とは, 自然数 a_{ij} と

$$\pi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,\mu_1} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,\mu_2} \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{rr} & \dots & a_{r,\mu_r} \end{pmatrix}$$

のように並べたもので

- $$\begin{aligned} (i) \quad & \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r \\ (ii) \quad & a_{i,j} \geq a_{i,j+1} \quad (1 \leq i \leq r, i \leq j \leq \mu_i - 1) \\ (iii) \quad & a_{i,j} \geq a_{i+1,j} \quad (1 \leq i \leq r-1, i+1 \leq j \leq \mu_{i+1}) \end{aligned}$$

とみたすもののことをいう。このよう $\tau \in \Pi$ に対して, $sh(\tau) = (\mu_1, \mu_2 - 1, \mu_3 - 2, \dots, \mu_r - r + 1)$ を τ の shape, $pr(\tau) = (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr})$ を τ の profile といふ。

$$(M1) \quad t_{ij} > t_{i,j+1} \quad (1 \leq i \leq r-1, 1 \leq j \leq r-i)$$

$$(M2) \quad t_{ij} \geq t_{i+1,j} \geq t_{i,j+1} \quad (1 \leq i \leq r-1, 1 \leq j \leq r-i)$$

をみたすもののことをいう。このような T に対して

$$sp(T) = \#\{(i, j) : t_{i-1,j} > t_{ij} > t_{i,j+1}\}$$

$$min(T) = \#\{(i, j) : t_{i-1,j} > t_{ij} = t_{i,j+1}\}$$

とおき、変数 $x_1, x_2, \dots$ に対して $m(T) = x_1^{s_1-s_2} x_2^{s_2-s_3} \dots x_{r-1}^{s_{r-1}-s_r} x_r^{s_r}$

($s_i = \sum_{j=1}^{r-i+1} t_{ij}$) と書く。 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) (\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r > 0)$ を第 1 行

とする monotone triangle 全体を $\mathcal{M}(\lambda)$ とし、 $\mathcal{M}(\lambda)$ の '重みつき' 母関

数

$$M(\lambda) = \sum_{T \in \mathcal{M}(\lambda)} (1+t)^{sp(T)} t^{min(T)} m(T)$$

を考える。(§3) 例えば、 $\lambda = (3, 2, 1)$ のとき、

$$\mathcal{M}(\lambda) = \left\{ \begin{array}{c} 321 \quad 321 \quad 321 \quad 321 \quad 321 \quad 321 \quad 321 \\ 32 \quad , \quad 32 \quad , \quad 31 \quad , \quad 31 \quad , \quad 31 \quad , \quad 21 \quad , \quad 21 \\ 3 \quad , \quad 2 \quad , \quad 3 \quad , \quad 2 \quad , \quad 1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 1 \end{array} \right\}$$

$sp(T)$	0	0	0	1	0	0	0
$min(T)$	0	1	1	1	2	2	3

だから

$$M(\lambda) = x_1 x_2^2 x_3^3 + t x_1 x_2^3 x_3^2 + t x_1^2 x_2 x_3^3 + t(1+t) x_1^2 x_2^2 x_3^2 + t^2 x_1^2 x_2^3 x_3 \\ + t^2 x_1^3 x_2 x_3^2 + t^3 x_1^3 x_2^2 x_3.$$

以下では、 $F(\mathcal{S}_{A,B}(\lambda; a), z)$ を行列式の形に表し、それを用いて $M(\lambda)$ の簡単な表示を導いていく。(詳しくは [Ok2] を参照されたい)

§1 (A, B) -partially strict shifted plane partition の母関数

$A, B \subseteq \mathbb{N}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{N}$ とする $\mathbb{N}$ の部分集合とする. $z_1, \dots, z_n$ の多項式 $\tilde{g}_{A,B,k}^{(n)}(z)$ と, 母関数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{g}_{A,B,k}^{(n)}(z) t^k = \frac{\prod_{i \in A \cap [n]} (1 + z_i t)}{\prod_{j \in B \cap [n]} (1 - z_j t)} \quad ([n] = \{1, 2, \dots, n\})$$

により定義する. すると, $\lambda = (k)$, $a = (n)$ に対して, $\mathcal{S}_{A,B}((k); (n))$ の母関数は

$$F(\mathcal{S}_{A,B}((k); (n)), z) = \tilde{g}_{A,B,k}^{(n)}(z) - \tilde{g}_{A,B,k}^{(n-1)}(z)$$

となる. より一般の λ , a に対して $F(\mathcal{S}_{A,B}(\lambda; a), z)$ は次の形に表される.

定理 1. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ($\lambda_1 > \dots > \lambda_r > 0$), $a = (a_1, \dots, a_r)$ ($a_1 > \dots > a_r > 0$) に対して, $\mathcal{S}_{A,B}(\lambda; a)$ の母関数は

$$F(\mathcal{S}_{A,B}(\lambda; a), z) = \det \left(\tilde{g}_{A,B,\lambda_i}^{(a_j)}(z) - \tilde{g}_{A,B,\lambda_i}^{(a_j-1)}(z) \right)_{1 \leq i, j \leq r}$$

で与えられる.

例えば, $A = \{1, 2\}$, $B = \mathbb{N} - A$, $\lambda = (3, 2)$, $a = (3, 2)$ のとき (§0 で与えた例).

$$\begin{aligned} F(\mathcal{S}_{A,B}(\lambda; a), z) &= \det \begin{pmatrix} z_1 z_2 z_3 + z_1 z_3^2 + z_2 z_3^2 + z_3^3 - 0 & 0 - 0 \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 + z_3^2 - z_1 z_2 & z_1 z_2 - 0 \end{pmatrix} \\ &= z \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ & 2 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ & 2 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ & 2 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

定理 1 に おいて, $A=\mathbb{N}, B=\emptyset$, または, $A=\emptyset, B=\mathbb{N}$ のときを
 考える. $A=\mathbb{N}, B=\emptyset$ [resp. $A=\emptyset, B=\mathbb{N}$] のとき, $\pi=(a_{ij})$ に対す
 る (A, B) -partially strict shifted plane partition の条件 (P1), (P2) は,
 $a_{i,j} > a_{i,j+1} (\forall i, j)$ [resp. $a_{i,j} > a_{i+1,j} (\forall i, j)$] ということであり, この
 条件をみたすとき, π は row-strict [resp. column-strict] である
 という. $sh(\pi)=\lambda$, $pr(\pi)=a$ となる row-strict [resp. column-strict]
 shifted plane partition π 全体を $\mathcal{R}(\lambda; a)$ [resp. $\mathcal{C}(\lambda; a)$] とおく:

$$\mathcal{R}(\lambda; a) = \mathcal{S}_{\mathbb{N}, \emptyset}(\lambda; a), \quad \mathcal{C}(\lambda; a) = \mathcal{S}_{\emptyset, \mathbb{N}}(\lambda; a)$$

系 1. $\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_r) (\lambda_1 > \dots > \lambda_r > 0)$, $a=(a_1, \dots, a_r) (a_1 > \dots > a_r > 0)$ に対
 して,

$$\sum_{\pi \in \mathcal{R}(\lambda; a)} z^\pi = \det (e_{\lambda_i}^{(a_j)}(z) - e_{\lambda_i}^{(a_j-1)}(z))_{1 \leq i, j \leq r}$$

$$\sum_{\pi \in \mathcal{C}(\lambda; a)} z^\pi = \det (h_{\lambda_i}^{(a_j)}(z) - h_{\lambda_i}^{(a_j-1)}(z))_{1 \leq i, j \leq r}$$

ここで, $e_k^{(n)}(z) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} z_{i_1} \dots z_{i_k}$ は n 変数 k 次 elementary
 symmetric function, $h_k^{(n)}(z) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} z_{i_1} \dots z_{i_k}$ は n 変数 k 次
 complete symmetric function である.

ここで, さらに $z_i = q^i$ と代入すると, $\mathcal{R}(\lambda; a)$, $\mathcal{C}(\lambda; a)$ の一
 変数母関数が得られる.

系 2 shifted plane partition $\pi = (a_{ij})$ に対して, $|\pi| = \sum_{i,j} a_{ij}$ と書くことにすると

$$\sum_{\pi \in \mathcal{R}(\lambda; a)} q^{|\pi|} = \det \left(q^{a_j + \binom{\lambda_i}{2}} \begin{bmatrix} a_j - 1 \\ \lambda_i - 1 \end{bmatrix} \right)_{1 \leq i, j \leq r}$$

$$\sum_{\pi \in \mathcal{C}(\lambda; a)} q^{|\pi|} = \det \left(q^{a_j + \lambda_i - 1} \begin{bmatrix} a_j + \lambda_i - 2 \\ \lambda_i - 1 \end{bmatrix} \right)_{1 \leq i, j \leq r}$$

ここで, $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ は Gauss の項式 (q -2 項係数) である:

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{cases} \prod_{i=1}^m \frac{1 - q^{n-i+1}}{1 - q^i} & (0 \leq m \leq n \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

この結果は, 対称性をもつ plane partition の個数, 母関数を求める上で重要である. ([An], [MRR1], [Ok1])

定理 1 と類似の結果が, plane partition についても成り立つ.

plane partition

$$\pi = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1, \lambda_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2, \lambda_2} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & \cdots & & a_{r, \lambda_r} \end{matrix} \quad \begin{array}{l} \text{ただし (i) } a_{ij} \in \mathbb{N} \\ \text{(ii) } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \\ \text{(iii) } a_{ij} \geq a_{i, j+1} \\ \text{(iv) } a_{ij} \geq a_{i+1, j} \end{array}$$

は, 次の条件 (P1), (P2) をみたすとき, (A, B)-partially strict であるという. ($A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{N}$)

(P1) 各 $m \in A$ に対して, m は 1 行に高々 1 回しか現れない.

(P2) 各 $m \in B$ に対して, m は 1 列に高々 1 回しか現れない.

上の π に対して, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ を π の shape といい, $sh(\pi)$ で表す.

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ($\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$) と $N \in \mathbb{N}$ が与えられたとき, $sh(\pi) = \lambda$, $a_{ij} \leq N$ ($\forall i, j$) とする (A, B) -partially strict plane partition $\pi = (a_{ij})$ 全体を $\mathcal{P}_{A, B}(\lambda; \leq N)$ とすると, その母関数は次の定理で与えられる. ただし, $k < 0$ のとき $\tilde{q}_{A, B, k}^{(N)}(z) = 0$ とする.

定理 2 plane partition $\pi = (a_{ij})$ に対して $z^\pi = \prod_{i, j} z^{a_{ij}}$ と書くと,

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_{A, B}(\lambda; \leq N)} z^\pi = \det \left(\tilde{q}_{A, B, \lambda_i - i + j}^{(N)}(z) \right)_{1 \leq i, j \leq r}$$

特に, $A = \mathbb{N}, B = \emptyset$; $A = \emptyset, B = \mathbb{N}$ のときを考えると,

系

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}, \emptyset}(\lambda; \leq N)} z^\pi = \det \left(e_{\lambda_i - i + j}^{(N)}(z) \right)_{1 \leq i, j \leq r}$$

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_{\emptyset, \mathbb{N}}(\lambda; \leq N)} z^\pi = \det \left(h_{\lambda_i - i + j}^{(N)}(z) \right)_{1 \leq i, j \leq r}$$

この系は, Jacobi-Trudi identity として知られている.

この節については [Ok3] も参照された.

§2 Diagonal-strict shifted plane partition

$E = \{\text{偶数}\}$, $O = \{\text{奇数}\}$ とおく. (E, O) -partially strict shifted plane partition と monotone triangle と, diagonal-strict shifted plane partition によって結びつける.

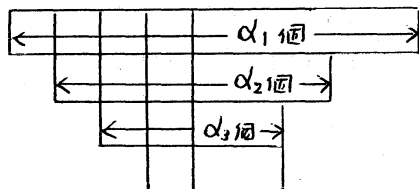
shifted plane partition $\pi = (a_{ij})$ は, $a_{i, j} > a_{i+1, j+1}$ ($\forall i, j$) をみた

すとき, diagonal-strictであるという. $sh(\pi)=\lambda$, $pr(\pi)=\alpha$ となる diagonal strict shifted plane partition 全体を $\mathcal{D}(\lambda; \alpha)$ とする. この節では, $\mathcal{D}(\lambda; \alpha)$ の重みつき母関数を考えるが, そのために必要な言葉を用意しておく.

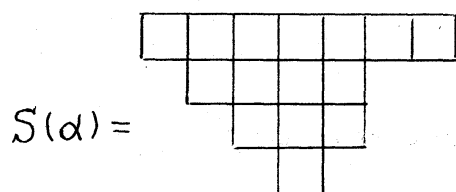
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ を distinct partition とする. つまり, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_{l(\alpha)} > \alpha_{l(\alpha)+1} = \dots = \alpha_n = 0$ とする. ($0 = (0, 0, \dots, 0)$ も distinct partition とする) この α に対して,

$$S(\alpha) = \{ (i, j) \in \mathbb{N}^2; 1 \leq i \leq l(\alpha), i \leq j \leq \alpha_i + i - 1 \}$$

とおき, α の shifted diagram といい. Young 図形と同様, 箱を並べて $S(\alpha)$ を表すが, Young 図形とは違って左端を 1 つずつずらして並べる.



例えば, $\alpha = (7, 4, 3, 1)$ のとき,

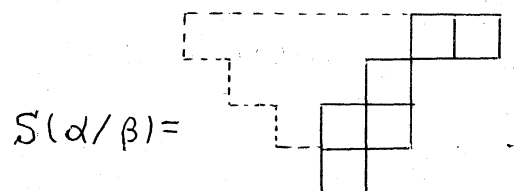


また, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ を, $\alpha_i \geq \beta_i$ ($i=1, \dots, n$) となる distinct partition とするとき,

$$S(\alpha/\beta) = S(\alpha) - S(\beta)$$

とおいて, skew shifted diagram という. 例えば, $\alpha = (7, 4, 3, 1)$

$\beta = (5, 3, 1) = (5, 3, 1, 0)$ のとき,



skew shifted diagram $S(\alpha/\beta)$ は, 連結であり, ,  を含まないとき, rim hook であるという. 上の例の $S(\alpha/\beta)$ は連結ではないが, その各連結成分(2つ)は rim hook である.

さて, shifted plane partition $\pi = (a_{ij})$ に対して, $sh_k(\pi)$ を, その第 i 成分 $sh_k(\pi)_i = \text{Max}\{j, a_{ij} \geq k\} - i + 1$ (π の第 i 行に書かれている k 以上の数字の個数)である partition とする. 例えば,

$$\pi = \begin{array}{ccccccc} 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & \\ & & 2 & 2 & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & & \end{array}$$

のとき,

$$sh_1(\pi) = (8, 6, 3, 2) (= sh(\pi)), \quad sh_2(\pi) = (6, 4, 2)$$

$$sh_3(\pi) = (4, 2), \quad sh_4(\pi) = (3).$$

もし, π が diagonal strict ならば, skew shifted diagram

$S(sh_k(\pi)/sh_{k+1}(\pi))$ (π で数字 k が書かれている場所を  で置き

かえたもの)の各連結成分は rim hook となることがわかる. 上

の例の π は diagonal-strict であり,

$$S(sh_4(\pi)/sh_5(\pi)) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}$$

$$S(sh_3(\pi)/sh_4(\pi)) = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}$$

$$S(sh_2(\pi)/sh_3(\pi)) = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}$$

$$S(sh_1(\pi)/sh_2(\pi)) = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$$

そこで, $S(sh_k(\pi)/sh_{k+1}(\pi))$ の連結成分を $\rho_1^{(k)}, \dots, \rho_{h_k}^{(k)}$ とし,

$$h(\pi) = \sum_k h_k$$

$$f(\pi) = \sum_k \sum_{j=1}^{h_k} (\rho_j^{(k)} \text{ の占める行数})$$

とおく. 上の例の π では,

$$h(\pi) = 6, \quad f(\pi) = 10.$$

そして, $\mathcal{O}(\lambda; a)$ の母関数として

$$\sum_{\pi \in \mathcal{O}(\lambda; a)} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{h(\pi)} (-t)^{f(\pi)} \chi^\pi$$

を考える.

$(E, 0)$ -partially strict shifted plane partition と diagonal-strict shifted plane partition との関係を見るために, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) (\lambda_1 > \dots > \lambda_r > 0)$, $a = (a_1, \dots, a_r) (a_1 > \dots > a_r > 0)$ に対して,

$$\widetilde{\mathcal{O}}(\lambda; a) = \bigsqcup_b \mathcal{S}_{E, 0}(\lambda; b)$$

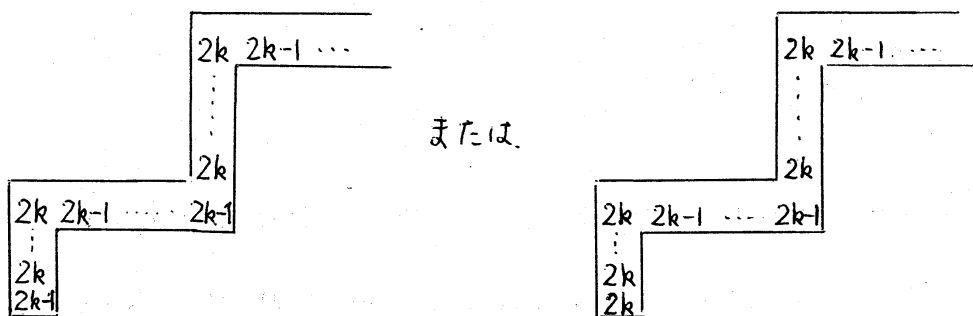
(ここで, $b = (b_1, \dots, b_r)$ は $b_i = 2a_i$ または $2a_i - 1$ ($i = 1, \dots, r$) となる distinct partition 全体を動く) とおく. そして, $\sigma \in \widetilde{\mathcal{O}}(\lambda; a)$ に対して, σ に書かれている数字 $2k, 2k-1$ を全て k で置きかえた ($k = 1, 2, \dots$) ものを $P(\sigma)$ とする. すると, σ が $(E, 0)$ -partially strict であることから $P(\sigma)$ は diagonal-strict となり, $P(\sigma) \in$

$\mathcal{O}(\lambda; a)$ となることかわかる。よって、写像 $P: \widetilde{\mathcal{O}}(\lambda; a) \longrightarrow \mathcal{O}(\lambda; a)$ が定まるが、この写像について次の命題が成り立つ。

命題 1 $\pi \in \mathcal{O}(\lambda; a)$ に対して、

$$\sum_{\sigma \in \widetilde{\mathcal{O}}(\lambda; a), t, P(\sigma) = \pi} t^{e(\sigma)} = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{h(\pi)} t^{f(\pi)}$$

ここで、 $e(\sigma)$ は σ に書かれている数字のうちの偶数の個数である。より詳しく、 $P(\sigma) = \pi$ となる $\sigma \in \widetilde{\mathcal{O}}(\lambda; a)$ は、数字 k が書き込まれている skew shifted diagram $S(sh_k(\pi)/sh_{k+1}(\pi))$ の各連結成分 (rim hook になっている) に



と数字 $2k-1, 2k$ を書き込む (各 $k=1, 2, \dots$ と各連結成分に対して行う) ことにより、全て得られる。

これによって、 $\mathcal{O}(\lambda; a)$ の重みつき母関数は

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \mathcal{O}(\lambda; a)} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{h(\pi)} (-t)^{f(\pi)} x^\pi &= \left(\sum_{\sigma \in \widetilde{\mathcal{O}}(\lambda; a)} z^\sigma \right) \Big|_{\substack{z_{2i-1} = x_i, \\ z_{2i} = -tx_i}} \\ &= \sum_b F(\mathcal{S}_{E_0}(\lambda; b), z) \Big|_{\substack{z_{2i-1} = x_i, \\ z_{2i} = -tx_i}} \end{aligned}$$

($b = (b_1, \dots, b_r)$ は $b_i = 2a_i$ または $2a_i - 1$ ($i=1, \dots, r$) となる partition を動く)。

と書き直される. ここで, 定理1の行列式表示を用いると,
次の定理が得られる.

定理3. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) (\lambda_1 > \dots > \lambda_r > 0)$, $a = (a_1, \dots, a_r) (a_1 > \dots > a_r > 0)$ に
対して,

$$\sum_{\pi \in \mathcal{O}(\lambda; a)} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{h(\pi)} (-t)^{f(\pi)} x^\pi = \det \left(g_{\lambda_i}^{(a_j)}(x; t) - g_{\lambda_i}^{(a_j-1)}(x; t) \right)$$

ここで, $g_k^{(n)}(x; t)$ は, $x_1, \dots, x_n, t$ の多項式で, 母関数

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(n)}(x; t) y^k = \prod_{i=1}^n \frac{1 - t x_i y}{1 - x_i y}$$

で定義される.

この定理の $t = -1$ の場合を用いると, Hall-Littlewood多項式
 $Q_\lambda(x_1, \dots, x_N; -1)$ の recursive formula が得られる. distinct partition
 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) (\lambda_1 > \dots > \lambda_{\ell(\lambda)} > \lambda_{\ell(\lambda)+1} = \dots = \lambda_N = 0)$ に対して, $Q_\lambda(x_1, \dots, x_N; -1)$
は,

$$Q_\lambda(x; -1) = 2^{\ell(\lambda)} \sum_{w \in G_N} w(x_1^{\lambda_1} \dots x_N^{\lambda_N} \prod_{i < j} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j})$$

によつて定義されるが, shifted plane partition を用いて

$$Q_\lambda(x; -1) = \sum_{N \geq a_1 > a_2 > \dots > a_{\ell(\lambda)} \geq 1} \sum_{\pi \in \mathcal{O}(\lambda; a)} 2^{h(\pi)} x^\pi$$

と表すこともできる. ([Mac, Chap III]) よつて, 定理3と [Ok1]

の小行列の和の公式を用いると,

命題 2 ([Sch]) $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) (\lambda_1 > \dots > \lambda_r > 0)$ とする.

(1) r が奇数のとき,

$$Q_\lambda(x; -1) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} Q_{\lambda^{(i)}}(x; -1) Q_{\lambda^{(i,i)}}(x; -1)$$

ここで, $\lambda^{(i)} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r)$

(2) r が偶数のとき

$$Q_\lambda(x; -1) = \sum_{i=2}^r (-1)^i Q_{(\lambda_i, \lambda_{i-1})}(x; -1) Q_{\lambda^{(i,i)}}(x; -1)$$

ここで, $\lambda^{(i,i)} = (\lambda_2, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r)$

§3 Monotone triangle

定理 3 を用いて, $\mathcal{M}(\lambda)$ の重みつき母関数 $M(\lambda)$ を求めることができる.

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) (\lambda_1 > \dots > \lambda_r > 0)$ とし, $\delta_r = (r, r-1, \dots, 2, 1)$ とおく. このとき, 全単射 $\Psi: \mathcal{O}(\lambda; \delta_r) \longrightarrow \mathcal{M}(\lambda)$ が次のようにして得られる. $\pi \in \mathcal{O}(\lambda; \delta_r)$ に対して, $\text{pr}(\pi) = \delta_r$ より $\text{sh}_k(\pi)$ は長さ $r-k+1$ の distinct partition となるから, $\text{sh}_k(\pi) = (t_{k1}, \dots, t_{k, r-k+1})$ とし,

$$T = \begin{array}{cccc} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1,r} \\ & t_{21} & & t_{2,r-1} \\ & & \ddots & \\ & & & t_{r1} \end{array}$$

と並べると, T が monotone triangle となることがわかる. また,

この対応 $\mathcal{O}(\lambda; \delta_r) \ni \pi \longmapsto T \in \mathcal{M}(\lambda)$ が全単射となることもわかる.

さらに, この全単射 Ψ に対して次の命題が成り立つ

命題 3. $\pi \in \mathcal{O}(\lambda; \delta_r)$ に対して,

$$m(\bar{\Psi}(\pi)) = \chi^\pi, \quad sp(\bar{\Psi}(\pi)) = h(\pi) - r$$

$$min(\bar{\Psi}(\pi)) = f(\pi) - h(\pi)$$

例えば

$$\pi = \begin{array}{cccccc} 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & \\ & & 2 & 2 & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 & & \end{array}$$

のとき

$$\bar{\Psi}(\pi) = \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 2 \\ & 6 & 4 & 2 \\ & & 4 & 2 \\ & & & 3 \end{array}$$

で、あり、

$$h(\pi) = 6, \quad f(\pi) = 10$$

$$sp(\bar{\Psi}(\pi)) = 2, \quad min(\bar{\Psi}(\pi)) = 4$$

命題 3 を用いると、 $\mathcal{M}(\lambda)$ の重みつき母関数は

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= \sum_{T \in \mathcal{M}(\lambda)} (1+t)^{sp(T)} t^{min(T)} m(T) \\ &= (1+t)^{-r} \sum_{\pi \in \mathcal{O}(\lambda; \delta_r)} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{h(\pi)} t^{f(\pi)} \chi^\pi \end{aligned}$$

となる。ここで、定理 3 を用いると

$$M(\lambda) = \det((1+t)^{-1} (g_{\lambda_i}^{(r-j+1)}(x; -t) - g_{\lambda_i}^{(r-j)}(x; -t)))_{1 \leq i, j \leq r}$$

この行列式を計算すると,

定理 4 ([To]) $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) (\lambda_1 > \dots > \lambda_r > 0)$, $\lambda - \delta_{r-1} = (\lambda_1 - r + 1, \lambda_2 - r + 2, \dots, \lambda_{r-1} - 1, \lambda_r)$ とすると,

$$M(\lambda) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (t\lambda_i + \lambda_j) \cdot S_{\lambda - \delta_{r-1}}(x_1, \dots, x_r)$$

と表される. ここで, partition $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r) (\mu_1 \geq \dots \geq \mu_r \geq 0)$ に対して $S_\mu(x_1, \dots, x_r)$ は Schur 関数

$$S_\mu(x_1, \dots, x_r) = \det(h_{\mu_i - i + j}^{(r)}(x_1, \dots, x_r))_{1 \leq i, j \leq r}$$

である.

$\lambda = \delta_r$ のとき, この定理は, alternating sign matrix を用いて次のように書き直すことができる. $r \times r$ 行列 $A = (a_{ij})$ は, 次の条件 (A1), (A2), (A3) をみたすとき, r 次 alternating sign matrix といふ

$$(A1) \quad a_{ij} \in \{-1, 0, 1\} \quad (i, j = 1, \dots, r)$$

$$(A2) \quad \sum_{i=1}^r a_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, r), \quad \sum_{j=1}^r a_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, r)$$

$$(A3) \quad \text{各行, 各列では } 1, -1 \text{ が (0 を無視して) 交互に現れる.}$$

r 次 alternating sign matrix の全体を A_r とおく. $A = (a_{ij}) \in A_r$ に対して,

$$s(A) = (A \text{ 中の } -1 \text{ の個数}), \quad z(A) = \sum_{i < k, j > l} a_{ij} a_{kl}$$

とおく. 例えば, $S(A) = 0$ である alternating sign matrix A は置換行列に他ならないし, このとき $i(A)$ は A に対応する置換の転倒数である. また, $r=3$ のとき,

$$A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$i(A) \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 2$$

このとき, $\mathcal{M}(\mathcal{S}_r)$ と A_r の間には, 自然な全単射が存在する.

$T = (t_{ij}) \in \mathcal{M}(\mathcal{S}_r)$ に対して, $r \times r$ 行列 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$, $A = (a_{ij})$ を

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{ある } k \text{ に対して } j = t_{i,k} \text{ となるとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} \tilde{a}_{ij} - \tilde{a}_{i+1,j} & (i=1, \dots, r-1) \\ \tilde{a}_{ij} & (i=r) \end{cases}$$

とおいて定めると, $A \in A_r$ であり, 対応 $\mathcal{M}(\mathcal{S}_r) \ni T \mapsto A \in A_r$ が全単射であることがわかる. 例えば,

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & \\ 3 & 2 & & \\ 2 & & & \end{pmatrix}$$

に対して,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. さらに, この対応で $\mathcal{M}(\mathcal{S}_r) \ni T \longleftrightarrow A \in A_r$ と対応して

いるとすると,

$$s(A) = sp(T), \quad i(A) = sp(T) + \min(T).$$

$r \times r$ 行列 $M = (m_{ij})$ ($m_{ij} \neq 0$) と $A \in \mathcal{A}_r$ に対して, $M^A = \prod_{i,j} m_{ij}^{a_{ij}}$ と書くことにすると, 定理 4 を $\lambda = s_r$ のときに用いることにより,

命題 4 ([RR], [To]) $M = (\chi_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq r}$ に対して,

$$\sum_{A \in \mathcal{A}_r} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{s(A)} t^{i(A)} M^A = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (t\chi_i + \chi_j)$$

$t = -1$ のときを考えると, $\sum_{A \in \mathcal{A}_r} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{s(A)} t^{i(A)} M^A \Big|_{t=-1} = \det M$ で

あり, 上の命題は

$$\det(\chi_i^{j-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\chi_j - \chi_i)$$

となる. また, 上の命題で $\chi_1 = \dots = \chi_r = 1$, $t = 1$ とおくと,

$$\sum_{A \in \mathcal{A}_r} 2^{s(A)} = 2^{\binom{r}{2}}$$

この左辺の 2 を 1 に変えることができれば, $r \times r$ alternating sign matrix の個数 $|\mathcal{A}_r|$ かわかるが, $|\mathcal{A}_r|$ については次の予想がある.

予想 ([MRR2])

$$|\mathcal{A}_r| = \prod_{i=0}^{r-1} \frac{(3i+1)!}{(r+i)!}$$

参 考 文 献

- [An] G.E. Andrews: Plane partitions (III), Invent. Math. 53 (1979)
- [Mac] I.G. Macdonald: Symmetric Functions and Hall Polynomials
Oxford Univ. Press,
- [MRR1] W.H. Mills, D.P. Robbins, and H. Rumsey, Jr.: Proof of the Macdonald conjectures, Invent. Math. 66 (1982)
- [MRR2] ———: Alternating sign matrices and descending plane partitions, J. Combin. Theory Ser. A 34 (1983)
- [Ok1] S. Okada: On the generating functions for certain classes of plane partitions, to appear in J. Combin. Theory. Ser. A
- [Ok2] ———: Partially strict shifted plane partitions, to appear
- [Ok3] ———: ある種の平面分割の母関数について, 数理研講究録
「代数的組合せ論」(1988)
- [RR] D.P. Robbins and H. Rumsey, Jr.: Determinants and alternating sign matrices, Adv. in Math. 62 (1986)
- [Sch] I. Schur: Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen
J. Reine. Angew. Math. 139 (1911)
- [To] T. Tokuyama: A generating function for strict Gelfand patterns and some formulas on characters of general linear groups., to appear in J. of Math. Soc. Japan.